1ª EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS

1º BACHILLERATO Curso 2008 – 2009

1. **Sabiendo que** $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ **y 270º <** α **<360 , halla (Sin usar la calculadora):**
   a) **El resto de las razones trigonométricas de** α **.**
   b) **Cos(2** α **)**
   c) **Tg(** α **+ 45)**

2. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
   a) $3\cos x - 2\cos 2x = 2$
   b) $sen2x + senx = 0$

3. Demuestra las siguientes igualdades:
   a) $\frac{2senx}{tg2x} + senxtgx = \cos x$
   b) $\frac{1-\cos^2 x}{tgx} = \frac{sen2x}{2}$

4. **La torre de una antena está en la cima de un monte. Desde un punto A se ve la base de la torre con un ángulo de 23º, y el extremo superior de la torre con un ángulo de 28º. Nos alejamos 500 m y observamos la base de la torre con un ángulo de 18º. Determinar la altura del monte y de la torre.**

5. Se quiere medir la distancia que hay entre dos emisoras B y C que están separadas por un lago. Desde un punto A, medimos la distancia AB = 12 km y AC = 7 km y el ángulo Â = 58º.Calcula la distancia BC.

6. **a) Siendo** $z = 1 - 3i$ **y** $w = \sqrt{8}_{45^\circ}$**, calcular:** $z + w, z\cdot w, 2z, \frac{z^3}{w}$

   b) Calcula: $\frac{i^{35} - i^5}{2i^{10}}$

7. a) Opera: $\frac{(1-2i)(-2+i)}{3i(1-i)}$

   b) **Resuelve la siguiente ecuación y expresa el resultado en forma binómica:**
   $\frac{3 - zi + 2i}{2} = z + i$

8. **Siendo** $z = 4\sqrt{3} - 4i$**, se pide:**
   a) z^5
   b) Las raíces cúbicas de z

9. **Halla el valor de x para que el cociente (1 + 3xi) : (3 –4i)**
   a) **Sea un número imaginario puro.**
   b) **Sea un número real.**
   c) **Tenga módulo 1**

10. Encontrar a y b para que $\frac{a-6i}{3+bi} = \sqrt{2}_{315}$

MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO

Ejercicios de exámenes de complejos

1. Calcular: $\sqrt{-2+2\sqrt{3}i} =$

2. Calcular: $a)\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$ $b)\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{\frac{1}{4}}$

3. Expresar en forma binómica el resultado de: $a)\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)^{5}$ $b)(-1+i)^{10}$

4. Calcular: $\sqrt[5]{\dfrac{-8-8\sqrt{3}i}{\left(-2\sqrt{3}\right)^{2}}+2i}$

5. Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} z^4 + 27z = 0 \\ z^5 + 125z^2 = 0 \end{array}\right\{$$

6. Resolver, expresando el resultado de forma binómica y trigonométrica: $\sqrt[3]{\dfrac{5+i}{2+3i}}$

7. Resolver: $a)\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ $b)\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$ $c)\sqrt[4]{81(\cos 120^{\circ}+i sen 120^{\circ})}$

8. Siendo $z=1-3i$ y $w=\sqrt{8}_{45^{\circ}}$, calcular: *z + w, z·w, 2z,* $\dfrac{z^3}{w}$

9. Calcula: $\dfrac{i^{35}-i^{5}}{2\cdot i^{10}}$

10. Opera: $\dfrac{(1-2i)(-2+i)}{3i\cdot(1-i)}$

11. Resuelve la siguiente ecuación y expresa el resultado en forma binómica: $\dfrac{3-zi+2i}{2}=z+i$

12. Siendo $z=4\sqrt{3}-4i$, se pide:

a) z^5

b) Las raíces cúbicas de z.

13. Hallar el valor de x para que el cociente $\dfrac{1+3xi}{3-4i}$:

a) Sea un número imaginario puro.
b) Sea un número real.
c) Tenga módulo 1.

14. Encontrar a y b para que $\dfrac{a-6i}{3+bi}=\sqrt{2}_{315^{\circ}}$

NÚMEROS COMPLEJOS

6 a) $z = 1-3i$, $W = \sqrt{8}_{45^\circ} = 2+2i$

$\downarrow$

$z = \sqrt{10}_{288'40^\circ}$

$z+w = (1-3i)+(2+2i) = 3-i$

$z \cdot w = (1-3i)\cdot(2+2i) = 8-4i$

$2z = 2-6i$

$\dfrac{z^3}{w} = \dfrac{(1-3i)^3}{2+2i} = \dfrac{-26+18i}{2+2i} = -2+11i$

b) $\dfrac{i^{35}-i^5}{2\cdot i^{10}} = \dfrac{(-i)-i}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-2i}{-2} = i$

$35 \underline{|4}$ $\quad 5 \underline{|4}$ $\quad 10 \underline{|4}$

$3 \;\; 8$ $\quad 1 \;\; 1$ $\quad 2 \;\; 2$

	R
$i^1 = i$	1
$i^2 = -1$	2
$i^3 = -i$	3
$i^4 = 1$	0

---

7 a) $\dfrac{(1-2i)(-2+i)}{3i(1-i)} = \dfrac{5i}{3+3i} = \dfrac{5}{6}+\dfrac{5}{6}i$

b) $\dfrac{3-zi+2i}{2} = z+i \rightarrow 3-zi+2i = 2z+2i \rightarrow 3 = 2z+zi$

$3 = (2+i)z \rightarrow z = \dfrac{3}{2+i}\cdot\dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{6-3i}{5} = \dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{5}i$

---

8 $z = 4\sqrt{3}-4i = 8_{330^\circ}$

a) $z^5 = (8_{330})^5 = 8^5{}_{330\cdot 5} = 32768_{1650^\circ} = 32768_{210^\circ}$

b) $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8_{330^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{330+k360}{3}} = 2 \begin{cases} 110^\circ \\ 230^\circ \\ 350^\circ \end{cases}$

---

(9) $\frac{1+3xi}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(3-12x)+(9x+4)i}{25}$

a) $\frac{3-12x}{25} = 0 \qquad x = \frac{1}{4}$

b) $\frac{9x+4}{25} = 0 \qquad x = \frac{-4}{9}$

c) $\sqrt{\left(\frac{3-12x}{25}\right)^2 + \left(\frac{9x+4}{25}\right)^2} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

---

(10) $\frac{a-6i}{3+bi} = \sqrt{2}_{315}$

$\frac{a-6i}{3+bi} \cdot \frac{3-bi}{3-bi} = \frac{3a-18i-abi+6bi^2}{9+b^2} = \frac{(3a-6b)}{9+b^2} + \frac{(-18-ab)i}{9+b^2}$

$\sqrt{2}_{315°} = \sqrt{2}\cos 315 + \sqrt{2}\operatorname{sen} 315 i = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i = 1-i$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3a-6b}{9+b^2} = 1 \\ \frac{-18-ab}{9+b^2} = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3a-6b = 9+b^2 \\ -18-ab = -9-b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{9+b^2+6b}{3} \\ -18-\left(\frac{9+b^2+6b}{3}\right)b = -9-b^2 \end{array}$

$54 + 9b + b^3 + 6b^2 = -27 - 3b^2 \rightarrow b^3 + 9b^2 + 9b + 81 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 9 & 9 & 81 \\ -9 & & -9 & 0 & -81 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b=-9 \rightarrow a=12 \\ b=3i \rightarrow a=6i \\ b=-3i \rightarrow a=-6i \end{array}}$$

$x^2+9=0$

$x^2=-9$

$x=\pm\sqrt{-9}=\pm 3i$

---

(1) $\sqrt{-2+2\sqrt{3}i} = \sqrt{4_{120^\circ}} = \sqrt{4}\left\{\begin{array}{l}\frac{120+k360}{2}\\ k=0,1\end{array}\right. =$

$= 2_{60}, 2_{240^\circ}$

---

(2) a) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12} = \left(\frac{2-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{12} =$

$= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}_{\,\underline{|75^\circ}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{12}_{\underline{|75\cdot 12}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{6}_{900^\circ} =$

$= \left(2-\sqrt{3}\right)^{6}_{180^\circ}$

b) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{2_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{315}}} = \sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{2}}_{-255^\circ}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{105^\circ}} =$

$= \sqrt[8]{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{105+k360}{4}\\ k=0,1,2,3\end{array}\right.$ $\quad \sqrt[8]{2}_{26'25^\circ}, \sqrt[8]{2}_{116'25^\circ}$

$\sqrt[8]{2}_{206'25^\circ}, \sqrt[8]{2}_{296'25^\circ}$

---

③ a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)^5 = \left(3_{30^\circ}\right)^5 = 3^5{}_{150^\circ} =$

$243_{150^\circ} = 243(\cos 150^\circ + i\,\mathrm{sen}\,150^\circ) =$

$= 243\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{-243\sqrt{3}}{2} + \frac{243}{2}i$

b) $(-1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^{10} = (\sqrt{2})^{10}{}_{1350^\circ} =$

$= 2^5{}_{270^\circ} = 32_{270^\circ} = 32(\cos 270 + \mathrm{sen}\,270\, i) = 0 - 32i$

$= -32i$

---

④ $x = \sqrt[5]{\frac{-8-8\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3})^2}} + 2i$

Calculemos a parte la raíz

$y = \sqrt[5]{\frac{16_{240^\circ}}{12}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}_{240^\circ}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}} \begin{cases} \frac{240+k360}{5} \\ k=0,1,2,3,4 \end{cases}$

$x_1 = y_1 + 2i = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}_{48^\circ} + 2i = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}(\cos 48 + i\,\mathrm{sen}\,48) + 2i$

$\left.\begin{array}{l} x_2 = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}_{120^\circ} + 2i = \ldots \\ x_3 = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}_{192^\circ} + 2i = \ldots \\ x_4 = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}_{264^\circ} + 2i = \ldots \\ x_5 = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}_{336^\circ} + 2i = \ldots \end{array}\right\}$ Calculadora y decimales ¡¡Quién se inventa estos problemas para un examen!!! ④

---

⑤ $\begin{cases} z^4+27z=0 \\ z^5+125z^2=0 \end{cases}$

• $z^4+27z=0 \qquad z(z^3+27)=0 \qquad \begin{array}{l} z=0 \\ z^3+27=0 \end{array}$

$$z=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^\circ}}=\sqrt[3]{27}\begin{cases}\frac{180+k360}{3} \\ k=0,1,2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}3_{60^\circ} \\ 3_{180^\circ} \\ 3_{300^\circ}\end{cases}$$

• $z^5+125z^2=0 \qquad z^2=0$

$z^2(z^3+125)=0 \qquad z^3=-125 \qquad z=\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{125_{180^\circ}}$

$$=5\begin{cases}\frac{180+k360}{3} \\ k=0,1,2\end{cases}=\begin{cases}5_{60^\circ} \\ 5_{180^\circ} \\ 5_{300^\circ}\end{cases}$$

Solución del sistema: $z=0$

———o———

⑥ • $\sqrt[3]{\frac{5+i}{2+3i}}=\sqrt[3]{\overline{\sqrt{26}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^\circ}}=\sqrt[6]{2}\begin{cases}\frac{315^\circ+k360^\circ}{3} \\ k=0,1,2\end{cases}=$

$$=\sqrt[6]{2}_{105^\circ},\ \sqrt[6]{2}_{225^\circ},\ \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$$

———o———

⑦ a) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270°}} = \sqrt[3]{1} \begin{cases} \frac{270+k360}{3} \\ k=0,1,2 \end{cases} =$

$= 1_{90°}, 1_{210°}, 1_{330°}$

b) $\sqrt[3]{\frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}_{135°}}{2_{60°}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}_{75°}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \begin{cases} \frac{75+k360}{3} \\ k=0,1,2 \end{cases} =$

$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \begin{cases} 25° \\ 145° \\ 265° \end{cases}$

c) $\sqrt[4]{81(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)} = \sqrt[4]{81_{120°}} = \sqrt[4]{81} \begin{cases} \frac{120+k360}{4} \\ k=0,1,2,3 \end{cases} =$

$= 3_{30°}, 3_{120°}, 3_{210°}, 3_{300°}$

——o——

⑧ $z = 1-3i \quad , w = \sqrt{8}_{45°} = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2+2i$

$z+w = (1-3i)+(2+2i) = 3-i$

$z \cdot w = 8-4i$

$2 \cdot z = 2-6i$

$\frac{z^3}{w} = \frac{(1-3i)^3}{2+2i} = \frac{-26+18i}{2+2i} = -2+11i$

——o——

⑨ $\frac{i^{35} - i^5}{2 \cdot i^{10}} = \frac{(-i)-i}{2(-1)} = \frac{-2i}{-2} = i$

——o——

⑩ $\frac{(1-2i)(-2+i)}{3i(1-i)} = \frac{5i}{3+3i} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6}i$

——o——

(11) $\frac{3-2i+2i}{2} = z+i \rightarrow 3-2i+2i = 2z+2i \rightarrow$

$2z+2i = 3+2i-2i \rightarrow (2+i)z = 3 \rightarrow z = \frac{3}{2+i} \rightarrow$

$z = \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

(12) $z = 4\sqrt{3} - 4i = 8_{330^\circ}$

a) $z^5 = (8_{330^\circ})^5 = 8^5{}_{330 \cdot 5} = 32768_{1650^\circ} =$

$= 32768_{210^\circ}$

b) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i} = \sqrt[3]{8_{330^\circ}} = \sqrt[3]{8} \begin{cases} \frac{330^\circ + k360}{2} \\ k=0,1,2 \end{cases} =$

$= 2_{165^\circ}, \ 2_{285^\circ}, \ 2_{405^\circ}$

(13) $\frac{1+3xi}{3-4i} \cdot \frac{(3+4i)}{(3+4i)} = \frac{3+9xi+4i+12xi^2}{9+16} = \frac{(3-12x)}{25} + \frac{(9x+4)i}{25}$

a) $\frac{3-12x}{25} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$; b) $\frac{9x+4}{25} = 0 \quad x = \frac{-4}{9}$

c) $\sqrt{\left(\frac{3-12x}{25}\right)^2 + \left(\frac{9x+4}{25}\right)^2} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

(14) Igual que el 10 de la otra hoja.