

EXAMEN DE CÁLCULO 1º BACHILLERATO

EJERCICIO 1 Halla a y b para que la función f(x) sea continua en $x = -2$ y en $x = 1$. ¿Sería globalmente continua? Justifica la respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ bx^2 - ax + 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 Dadas las funciones $f(x) = \frac{2-3x}{2x+5}$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$,

- Halla y simplifica las expresiones de $(f \circ g)(x)$
- Halla la expresión de la función inversa de f(x).

EJERCICIO 3 Halla los siguientes límites :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$$

EJERCICIO 4

- Halla la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ utilizando la definición.
- Halla las derivadas de las siguientes funciones y simplifica las expresiones obtenidas.

$$\text{B1) } y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad \text{B2) } y = x^2 e^{4x} \qquad \text{B3) } y = \frac{x^2}{(2x+1)^3}$$

EJERCICIO 5 Representa gráficamente la función $y = 3x^4 - 4x^3$.

EJERCICIO 6 Haz una representación aproximada de la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ a partir de su dominio, los cortes con los ejes de coordenadas y de sus asíntotas.

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} (ax + 4) = \lim_{x \rightarrow -2} (bx^2 - ax + 1)$$

De aquí resulta la ecuación : $-2a + 4 = 4b + 2a + 1 \rightarrow 3 = 4a + 4b$ (*)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (bx^2 - ax + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + b)$$

De aquí resulta la ecuación : $b - a + 1 = 2 + b \rightarrow a = -1$ y sustituyendo en (*), $3 = -4 + 4b \rightarrow b = 7/4$

La función es globalmente continua por serlo en $x = -2$ y $x = 1$ y por ser sus diferentes partes funciones polinómicas que son siempre continuas.

EJERCICIO 2

$$a) x \rightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{2 - \frac{3}{x+1}}{\frac{2}{x+1} + 5} = \frac{2x+2-3}{2+5x+5} = \frac{2x-1}{5x+7} = (f \circ g)(x)$$

$$b) \frac{2-3x}{2x+5} = y \rightarrow \frac{2-3y}{2y+5} = x \rightarrow 2-3y = 2xy+5x \rightarrow 2-5x = 2xy+3y \rightarrow 2-5x = y(2x+3)$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{2-5x}{2x+3}$$

EJERCICIO 3

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = 1/4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

EJERCICIO 4

$$a) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2-3(x+h)+4-2x^2+3x-4}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2+4xh+2h^2-3x-3h+4-2x^2+3x-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh+2h^2-3h}{h} =$$

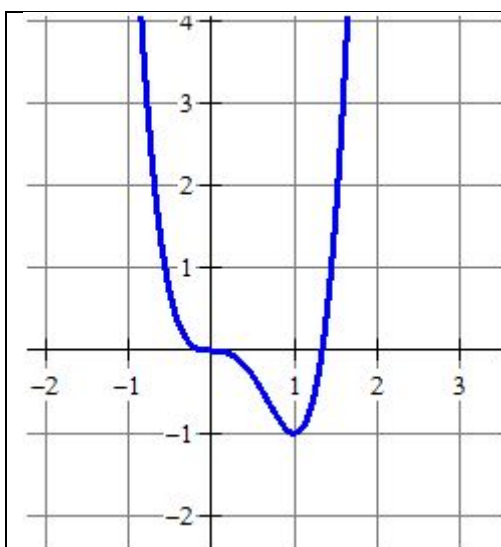
$$\lim_{h \rightarrow 0} (4x+2h-3) = 4x-3$$

$$b) y = \ln x - \ln(x+1) \rightarrow y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x^2+x} = \frac{1}{x^2+x}$$

$$y' = 2xe^{4x} + 4x^2e^{4x}$$

$$y' = \frac{2x(2x+1)^3 - 3(2x+1)^2 \cdot 2x^2}{(2x+1)^6} = \frac{2x(2x+1) - 6x^2}{(2x+1)^4} = \frac{2x-2x^2}{(2x+1)^4}$$

EJERCICIO 5

DOMINIO \mathbb{R}

CORTES EJES

Eje X $x = 0, 4/3$ Eje Y $y = 0$

ASÍNTOTAS No hay (es un polinomio)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

CRECIMIENTO $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0$ si $x = 0, x = 1$

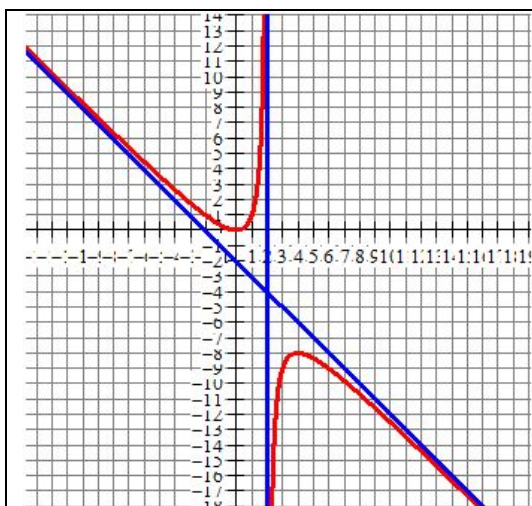
-	0	-	1	+	y'
↙	0	↘	1	↗	y

EXTREMOS RELATIVOS Mínimo en $(1, -1)$ CURVATURA $y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$ $y'' = 0$ si $x = 0, 2/3$

+	0	-	2/3	+	y''
↖	0	↗	2/3	↖	y

Puntos de inflexión en $(0, 0)$ y $(2/3, -48/91)$

EJERCICIO 6

Dominio : $\mathbb{R} - 2$ Cortes ejes : $(0, 0)$

Asíntotas :

Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

Horizontales: No hay ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Oblicuas : } m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} = -2$$

La asíntota es $y = -x - 2$