

DETERMINACIÓN DE ASÍNTOTAS EN UNA FUNCIÓN

Las **asíntotas** son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.

Una definición más formal es:

DEFINICIÓN : Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una función $y=f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de **asíntota** de la función.

Las asíntotas pueden ser: $\begin{cases} \text{asíntotas} & \text{verticales} \\ \text{asíntotas} & \text{horizontales} \\ \text{asíntotas} & \text{oblicuas} \end{cases}$

ASÍNTOTAS VERTICALES

Las asíntotas verticales son paralelas al eje OY : $\begin{cases} y \rightarrow +\infty \\ 0 \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$

Entonces existe un número " a " tal que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ **A.V.:** $x=a$

Procedimiento para determinar las asíntotas verticales de una función

1° Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

2° Si la función deja de existir en $x=a$, existirá asíntota vertical " $x=a$ " si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 1: Determina las asíntotas verticales de $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

1° Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

Dominio: Función racional fraccionaria no existe si el denominador se anula $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$; $x = -2$

$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Luego tiene como posible asíntotas verticales: ¿ $x=2$ y $x=-2$.?

2° ¿ A.V. en x=2. ? ¿ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{0} \text{ hay que hacer límites laterales } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{+0} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} \text{ No existe}$$

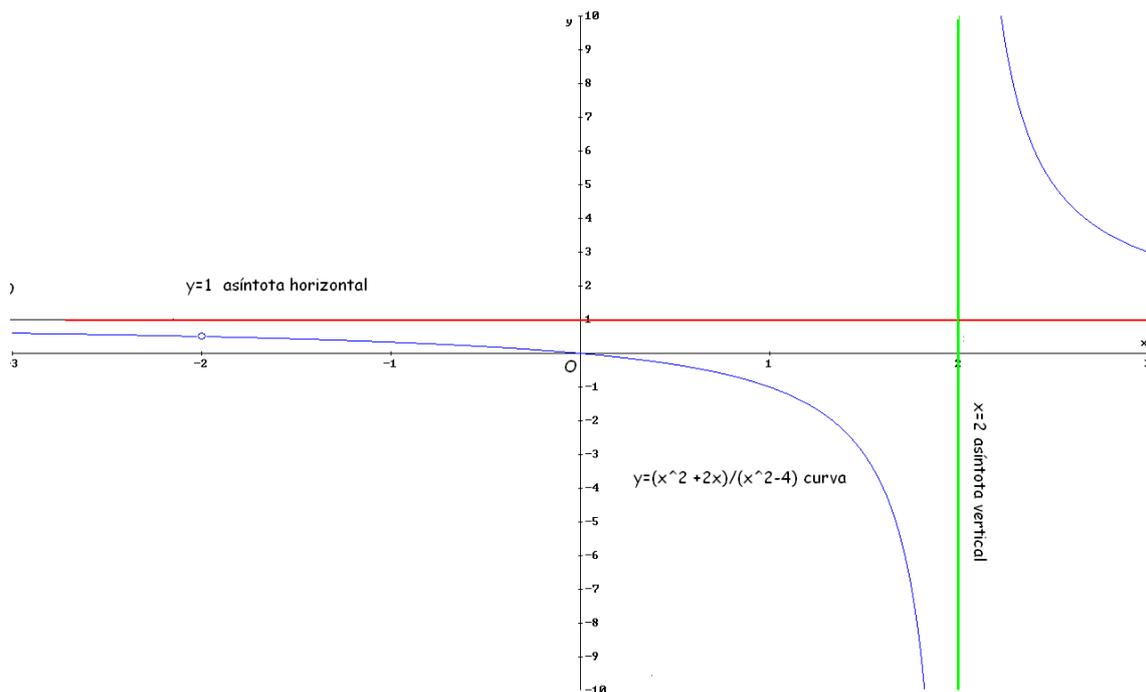
Estos límites nos sirven para determinar que $x=2$ es ASÍNTOTA VERTICAL pues $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ y con ellos también observamos las tendencias de la función (Observar gráfica)

¿ A.V. en x=-2. ? ¿ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

No hay asíntota vertical, en x=-2 la función es discontinua evitable.

Gráfica:



Ejemplo 2: Determina las asíntotas verticales de $y = \frac{x^2}{(x-4)^2}$

1° Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

Dominio: Función racional fraccionaria no existe si el denominador se anula

$$(x-4)^2 = 0; \quad x = 4$$

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{4\}$$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=4$?

2° ¿ A.V. en $x=4$. ? ¿ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-4)^2} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

Este límite nos sirve para determinar que $x=4$ es ASÍNTOTA VERTICAL pues $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$ con ellos también observamos las tendencias de la función

Ejemplo 3: Determina las asíntotas verticales de $y = \log(-x+4)$

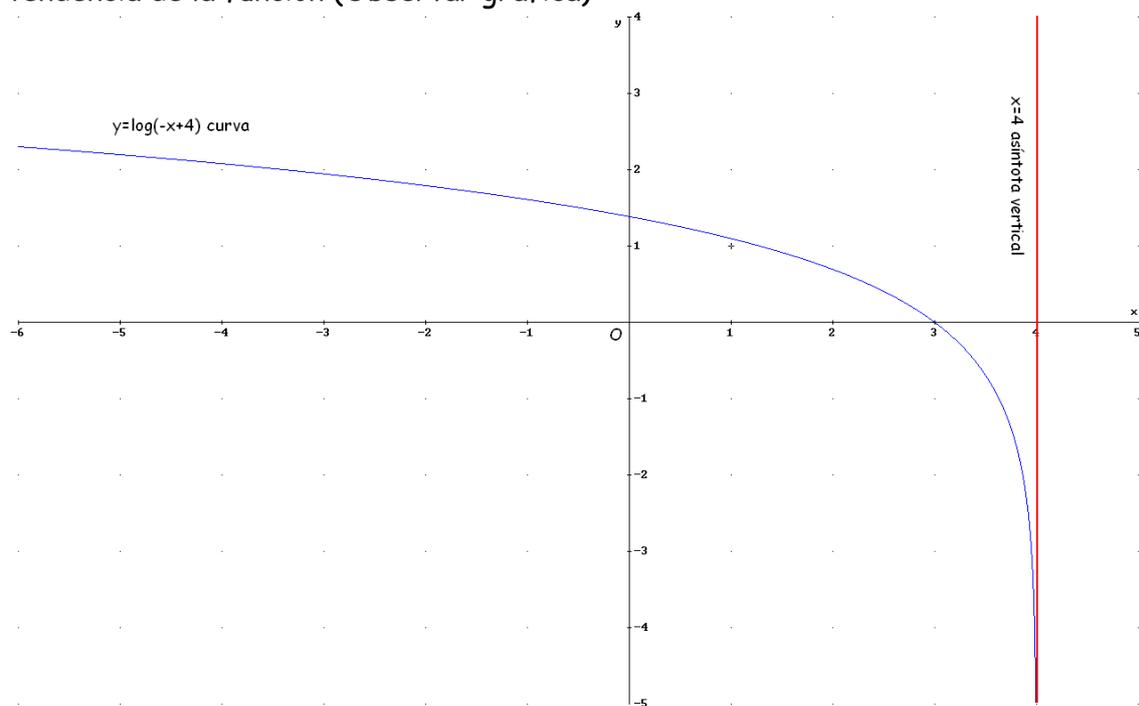
1° Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

Dominio: Función logarítmica sólo existe si $-x+4 > 0 \Rightarrow -x > -4 \Rightarrow x < 4$
luego $D[f(x)] = \forall x \in (-\infty, 4)$

Puede tener como asíntota vertical cuando se acerca a la izquierda de $x=4$

2° ¿ A.V. en $x=4$. ? ¿ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$?

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \log(-x+4) = \log(+0) = -\infty$ Este límite nos sirve para determinar que $x=4$ es ASÍNTOTA VERTICAL, pues $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ y con el también observamos la tendencia de la función (Observar gráfica)



ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Las asíntotas horizontales son paralelas al eje OX: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ 0 \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$

Si existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ entonces "y=k" será una asíntota horizontal.

Procedimiento para determinar las asíntotas horizontales de una función

Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ si alguno de ellos toma un valor finito "k", existirá asíntota horizontal y=k.

Nota:

- En el caso de funciones del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ existirá asíntota horizontal si "grado de P(x) \leq grado de Q(x)". En estos casos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$$

- En el caso de funciones del tipo exponencial $y = a^{f(x)}$ existirá asíntota horizontal "y=0" si $\begin{cases} 0 < a < 1 & y \rightarrow +\infty \\ a > 1 & y \rightarrow -\infty \end{cases}$

- Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota "y=k" hacemos lo siguiente:

	$Y_1=f(x)$	$Y_1- K$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
x=100	y = f(100)	$Y_1- K > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el +∞
		$Y_1- K < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	y = f(-100)	$Y_1- K > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞
		$Y_1- K < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el -∞

Ejemplo 4: Determina las asíntotas horizontales de $y = \frac{1-x}{x^2}$

1º Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = -0$

El -0 indica que la curva se encuentra por debajo de la asíntota y=0

2º Tenemos dos opciones:

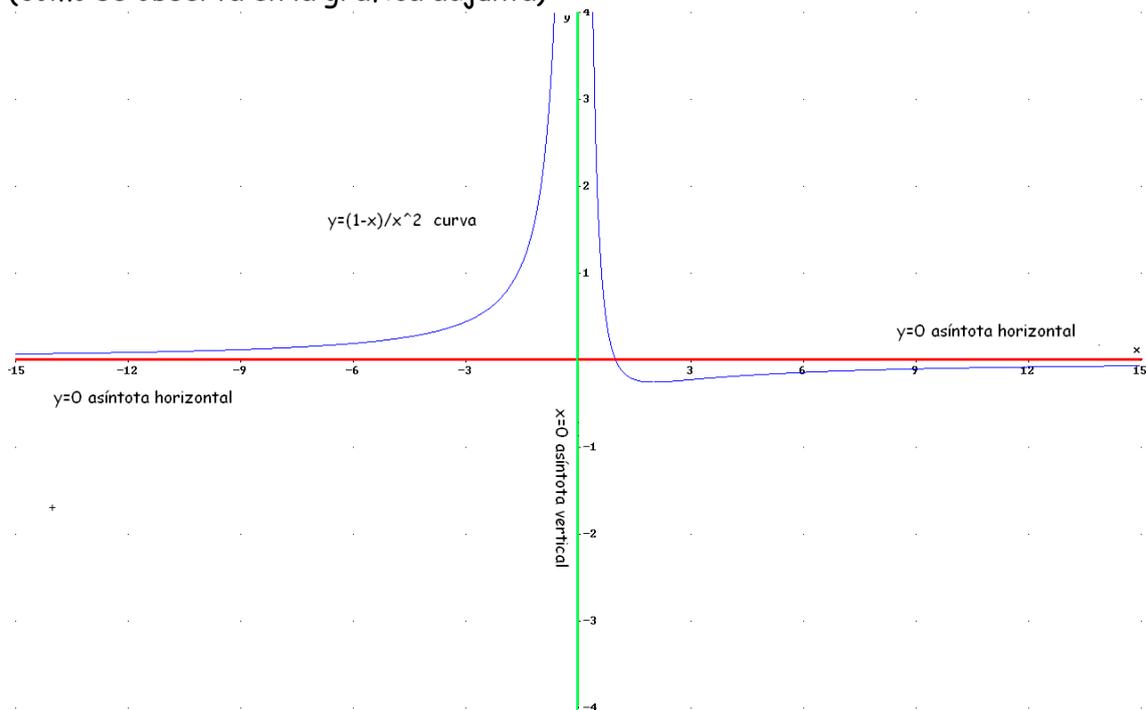
- Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = +0$

El +0 indica que la curva se encuentra por encima de la asíntota y=0

- O directamente calculamos la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{1-x}{x^2}$	$Y_1 - k$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y_1 = \frac{1-100}{100^2} = -0,0099$	$-0,0099 - 0 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{1+100}{(-100)^2} = 0,0101$	$0,0101 - 0 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 5: Determina las asíntotas horizontales de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

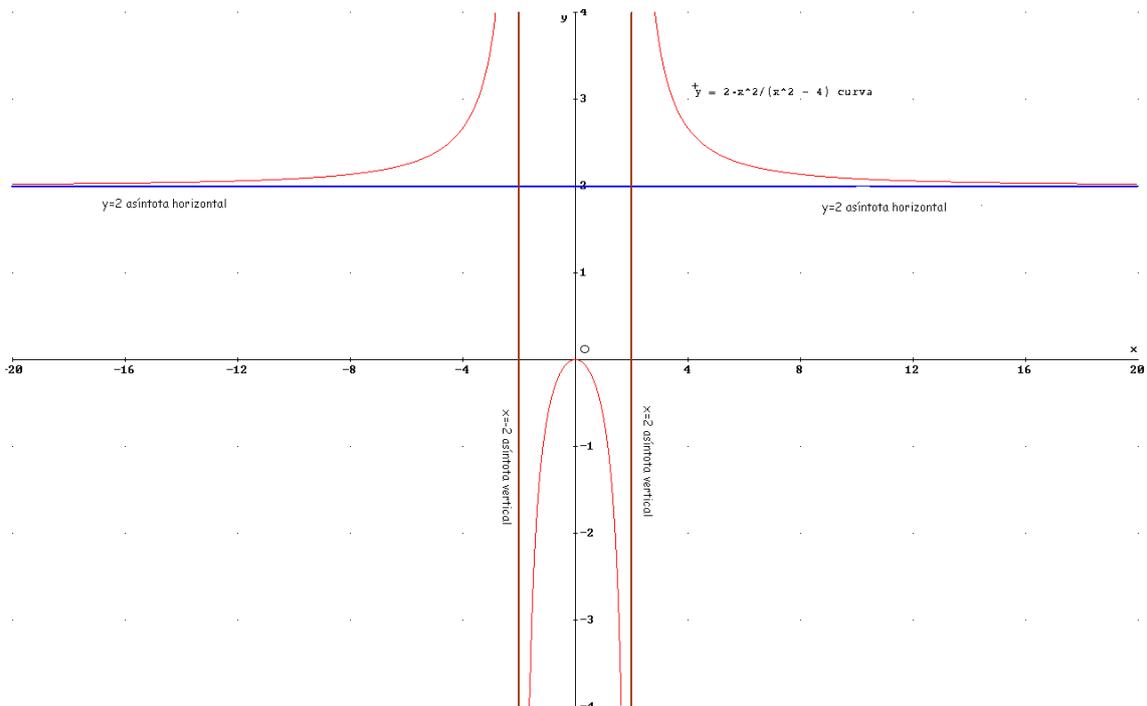
1º Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

2º Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$	$Y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 - 4} = 2,00080032$	$2,00080032 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(-100)^2}{(-100)^2 - 4} = 2,00080032 > 2$	$2,00080032 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 6: Determina las asíntotas horizontales de $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$ (ejemplo 1)

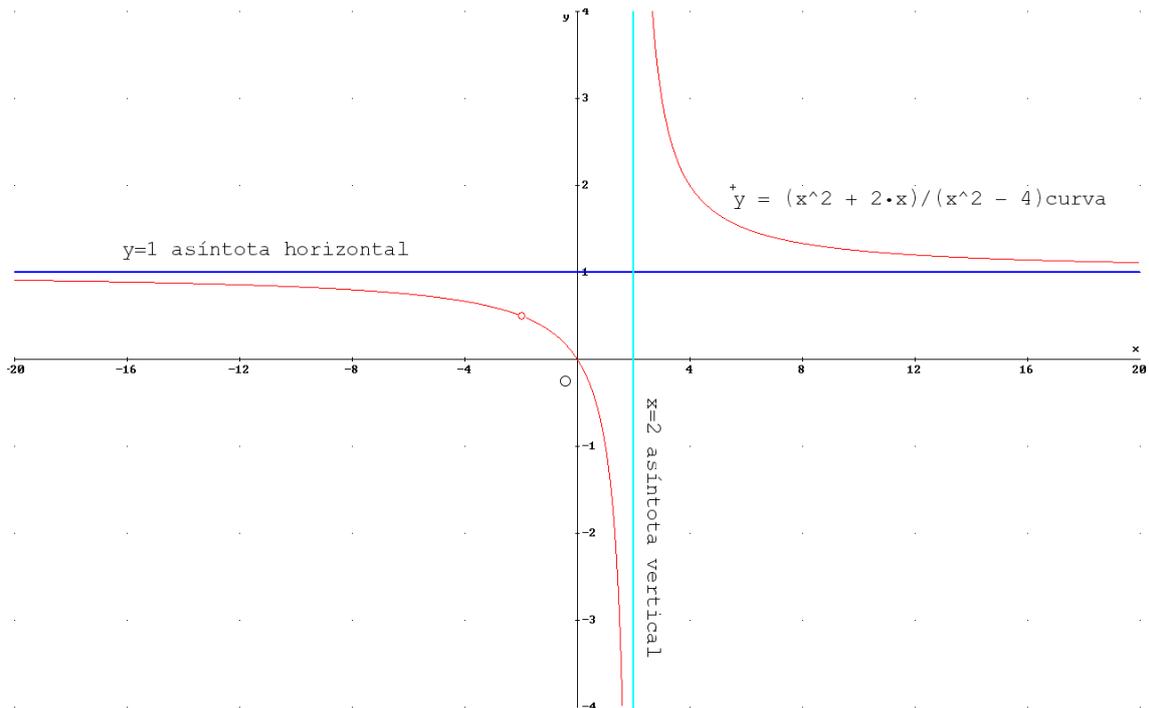
1º Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ Luego "y=1" será una asíntota horizontal.}$$

2º Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$	$y_1 - 1$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{(100)^2 + 2 \cdot 100}{(100)^2 - 4} = 1,020408163$	$1,020408163 - 1 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{(100)^2 - 2 \cdot 100}{(100)^2 - 4} = 0,9803921569$	$0,9803921 - 1 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 7: Determina las asíntotas horizontales de $y = \frac{-2x^2 + x - 8}{x^2 + 4}$

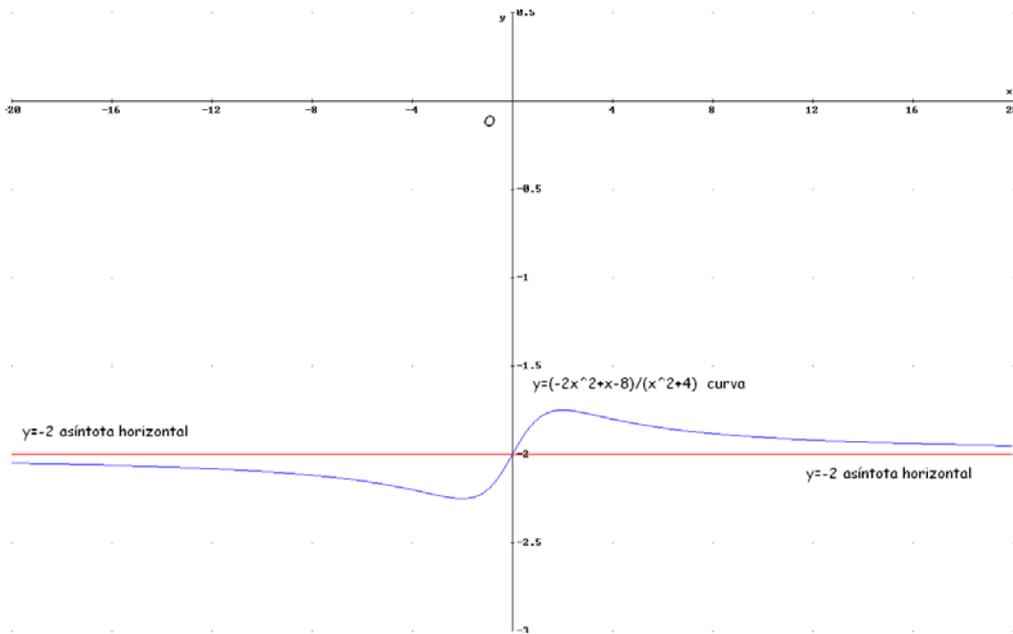
1° Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 8}{x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ Luego "y=-2" será una asíntota horizontal.}$$

2° Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{-2x^2 + x - 8}{x^2 + 4}$	$Y_1 - (-2)$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
x=100	$y = \frac{-2 \cdot (100)^2 + 100 - 8}{(-100)^2 + 4} = -1,990003998$	$-1,990003998 + 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y = \frac{-2 \cdot (-100)^2 - 100 - 8}{(-100)^2 + 4} = -2,0099996002$	$-2,0099996002 + 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 8: Determina las asíntotas horizontales de $y = 10 + 3^x$.

Nota: En este caso por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

1° Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (10 + 3^x) = 10 + 3^{+\infty} = +\infty$ Luego no existe asíntota horizontal en el $+\infty$. (como se observa en la gráfica adjunta)

2° Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

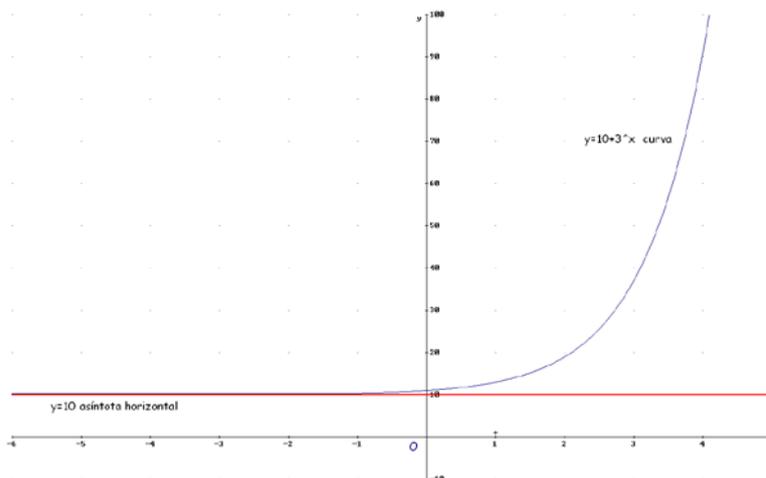
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (10 + 3^x) \underset{(x \text{ por } -x)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (10 + 3^{-x}) = 10 + 3^{-\infty} = 10 + \frac{1}{3^{+\infty}} = 10 + \frac{1}{+\infty} = 10 + 0 = 10$$

Luego " $y=10$ " será una asíntota horizontal.

3° Posición relativa de la gráfica y la asíntota.

	$y = 10 + 3^x$	$Y_1 - (10)$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x = -100$	$y = 10 + 3^{-100}$	$10 + 3^{-100} - 10 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



ASÍNTOTAS OBLICUAS

Son rectas asíntotas a una función del tipo $y = mx + n$ siendo $m \neq 0$

Si una función tiene asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

Procedimiento para determinar las asíntotas oblicuas de una función

1° Se calcula m : $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$ o $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$

2° Se calcula n : $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ si $n \in \mathbb{R}$ o $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$ si $n \in \mathbb{R}$

Nota:

- Si una función tiene asíntotas horizontales no tiene oblicuas.
- En el caso de funciones del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ existirá asíntota oblicua si "grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$ + 1".
- Si $m \neq 0$ en el caso de funciones del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ este valor es el mismo cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, por lo tanto sólo es necesario calcular el valor cuando $x \rightarrow +\infty$.

3° Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$Y_1=f(x)$	$Y_2=mx+n$	$Y_1 - Y_2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y_1 = f(100)$	$y_2 = 100m + n$	$Y_1 - Y_2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
			$Y_1 - Y_2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = f(-100)$	$y_2 = -100m + n$	$Y_1 - Y_2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$
			$Y_1 - Y_2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

Ejemplo 9: Determina las asíntotas oblicuas de $y = \frac{x^2}{2x-2}$

1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

- Si $m \neq 0$ en el caso de funciones del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ este valor es el mismo cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$ por lo tanto sólo es necesario calcular el valor cuando $x \rightarrow +\infty$.

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = \frac{1}{2}x + n \rightarrow n = y - \frac{1}{2}x$

2° Se calcula el "n":

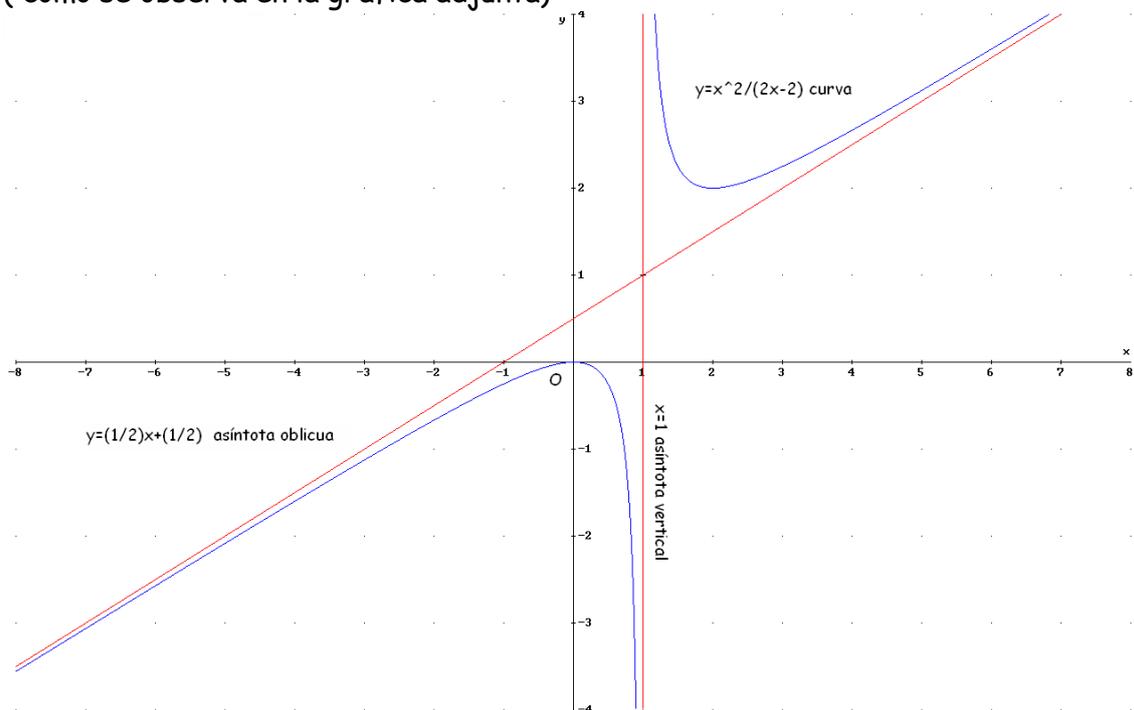
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Luego " $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \frac{x^2}{2x-2}$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \frac{100^2}{2 \cdot 100 - 2} = 50,505050\dots$	$y_2 = \frac{100}{2} + \frac{1}{2} = 50,5$	$50,505050\dots - 50,5 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{(-100)^2}{2 \cdot (-100) - 2} = -49,5049505\dots$	$y_2 = \frac{-100}{2} + \frac{1}{2} = -49,5$	$-49,5049505 - (-49,5) < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 10: Determina las asíntotas oblicuas de $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 9x} = 1$$

- Si $m \neq 0$ en el caso de funciones del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ este valor es el mismo cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$ por lo tanto sólo es necesario calcular el valor cuando $x \rightarrow +\infty$.

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

2° Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{x} = -0$$

Luego " $y=x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$	$y=x$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \frac{100^3}{100^2 + 9} = 99,91008093$	$y_2 = 100$	$99,91008093 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{(-100)^3}{(-100)^2 + 9} = -99,91008093$	$y_2 = -100$	$-99,91008093 - (-100) > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)

