EXAMEN 1º BACHILLERATO . NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Pregunta 1 (2,5 puntos).

a) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}-2\sqrt{3}}$

b) Calcula y simplifica dando el resultado, si es posible, en forma de un único radical:

- $\dfrac{2}{3}\sqrt{45}-\dfrac{\sqrt{20}}{2}+4\sqrt{125}-\sqrt{5}$
- $\dfrac{a^{-4}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{a}}{3\sqrt{a}}$

Pregunta 2 (2 puntos). Queremos realizar un experimento colocando una cantidad de partículas en una probeta. El primer día colocamos 1000 y cada día añadimos la mitad de lo añadido el día anterior (consideramos que podemos dividir las partículas tanto como queramos).

a) Escribe una fórmula que nos indique el número de partículas que se añaden a la probeta dependiendo del día.

b) ¿Cuántas partículas tendremos al cabo de cuatro semanas? (No es necesario realizar la operación, puede dejarse indicado).

c) Si se pudiera repetir el proceso indefinidamente, ¿cuántas partículas tendremos al final?

Pregunta 3. Resuelve las siguientes ecuaciones o sistemas:

a) $x^4-x^3-5x^2+3x+6=0$ **(1 punto)**

b) $7^{1+2x}-50\cdot 7^x+7=0$ **(1 punto)**

c) $\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}=5$ (**1 punto)**

d) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{x+1}{x-1}=-\dfrac{5}{4}$ (**1 punto)**

e) $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ \log\dfrac{x}{y}=1\end{cases}$ **(1,5 puntos)**

SOLUCIONES

1.

a) Racionaliza y simplifica:

$$\frac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}-2\sqrt{3}}=\frac{\left(3\sqrt{4}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{4}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{4}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{4}+2\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(3\sqrt{4}\right)^2+2\cdot3\sqrt{4}\cdot2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{4}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{36+24\sqrt{3}+12}{36-12}=\frac{24\sqrt{3}+48}{24}=\sqrt{3}+2$$

b) Calcula y simplifica dando el resultado, si es posible, en forma de un único radical:

$$\frac{2}{3}\sqrt{45}-\frac{\sqrt{20}}{2}+4\sqrt{125}-\sqrt{5}=\frac{2}{3}\sqrt{3^2\cdot5}-\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot5}+4\sqrt{5^3}-\sqrt{5}=$$

$$=\frac{2\cdot3}{3}\sqrt{5}-\frac{2}{2}\sqrt{5}+4\cdot5\sqrt{5}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}-\sqrt{5}+20\sqrt{5}-\sqrt{5}=21\sqrt{5}$$

$$\frac{a^{-4}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{a}}{3\sqrt{a}}=\frac{a^{-4}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{-4}}{3a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3a^{4+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}a^{-\frac{9}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{a^{-9}}$$

2 . Queremos realizar un experimento colocando una cantidad de partículas en una probeta. El primer día colocamos 1000 y cada día añadimos la mitad de lo añadido el día anterior (consideramos que podemos dividir las partículas tanto como queramos).

a) Escribe una fórmula que nos indique el número de partículas que se añaden a la probeta dependiendo del día.

$1000, 500, 250, 125, \ldots.$ es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ (decreciente)

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}\rightarrow a_n=1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) ¿Cuántas partículas tendremos al cabo de cuatro semanas? (No es necesario realizar la operación, puede dejarse indicado). Veintiocho días:

$$Sn=\frac{a_n r-a_1}{r-1}\rightarrow S_{28}=\frac{a_{28}\cdot0{,}5-1000}{-0{,}5}=\frac{1000\cdot0{,}5^{27}\cdot0{,}5-1000}{-0{,}5}$$

$$S_{28}=\frac{1000(0{,}5^{28}-1)}{-0{,}5}\approx2000$$

c) Si se pudiera repetir el proceso indefinidamente, ¿cuántas partículas tendremos al final?

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1000}{1-\frac{1}{2}}=2000$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones o sistemas:

a) $x^4-x^3-5x^2+3x+6=0$ primero, factorizamos el polinomio

	1	-1	-5	3	6
-1		-1	2	3	-6
	1	-2	-3	6	0
2		2	0	-6	
	1	0	-3	0	

$$x^4-x^3-5x^2+3x+6=(x+1)(x-2)\left(x^2-3\right)=0$$

Solución:

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

$x-2=0\Rightarrow x=2$

$x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

b) $7^{1+2x}-50\cdot7^x+7=0\rightarrow7\cdot7^{2x}-50\cdot7^x+7=0$, llamamos $z=7^x$

$$7z^2-50z+7=0\Rightarrow z=\frac{50\pm\sqrt{50^2-4\cdot49}}{14}=\frac{50\pm\sqrt{2304}}{14}=\frac{50\pm48}{14}=\left\langle\begin{array}{l}7\\ \frac{1}{7}\end{array}\right.$$

$$z=\left\langle\begin{array}{l}7^x=7\Rightarrow x=1\\ 7^x=\frac{1}{7}=7^{-1}\Rightarrow x=-1\end{array}\right.$$

Soluciones: $1,-1$

c) $\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}=5\rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2+4=5\sqrt{x}\Rightarrow x+4=5\sqrt{x}\Rightarrow\frac{x+4}{5}=\sqrt{x}$

$$\left(\frac{x+4}{5}\right)^2=x\Rightarrow\frac{x^2+8x+16}{25}=x\Rightarrow x^2+8x+16=25x\Rightarrow x^2-17x+16=0$$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot16}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{17\pm15}{2}=\left\langle\begin{array}{l}16\\ 1\end{array}\right.$$

Soluciones: $16, 1$

d) $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}=-\frac{5}{4}\rightarrow$ m.c.m.= $4(x+1)(x-1)=4(x^2-1)$

$$\frac{4\cdot2x}{4(x^2-1)}-\frac{4(x+1)(x+1)}{4(x^2-1)}=-\frac{5(x^2-1)}{4(x^2-1)}\rightarrow8x-4\left(x^2+2x+1\right)=-5x^2+5$$

$$8x-4x^2-8x+4=-5x^2+5\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

ninguna de las dos posibles soluciones serviría ya que para ambos valores de x se anula algún denominador de la ecuación original

e) $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ \log\frac{x}{y}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\log(x\cdot y)=\log1000\\ \log\frac{x}{y}=\log10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\cdot y=1000\\ \frac{x}{y}=10\Rightarrow x=10y\end{cases}$

sustituimos x en la primera ecuación: $10y\cdot y=1000\Rightarrow y^2=100\Rightarrow y=\pm10$

no vale la negativa (no existen los logaritmos de números negativos), luego la solución es: $x=100,\ y=10$