LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA

<u>EJERCICIO 1</u> : Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $P\,(1, 3)$, y que es tangente a la recta $r: 4x + 3y - 1 = 0$.

Solución:

• El radio, R, de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $P\,(1, 3)$, a la recta tangente,
$r: 4x + 3y - 1 = 0$: $R = \text{dist}(P,\ r) = \dfrac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|4+9-1|}{\sqrt{25}} = \dfrac{12}{5}$

• La ecuación de la circunferencia será: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2$; es decir:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{144}{25} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{106}{25} = 0 \Rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 50x - 150y - 106 = 0$$

<u>EJERCICIO 2</u> :
a) Calcula el centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 24 = 0$
b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 3, que es concéntrica con la anterior.

Solución:
a) Dividimos entre 2 la ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

$\text{Centro} = \left(\dfrac{4}{2}, \dfrac{6}{2}\right) = (2, 3)$

$\text{Radio} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 12} = \sqrt{4 + 9 - 12} = \sqrt{1} = 1$

b) Si tiene centro $(2, 3)$ y radio 3, su ecuación será: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, es decir:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

<u>EJERCICIO 3</u> : Estudia la posición relativa de la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ y la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

Solución:
• Hallamos en centro y el radio de la circunferencia:

$\text{Centro} = C = \left(\dfrac{6}{2}, \dfrac{2}{2}\right) = (3, 1)$

$\text{Radio} = R = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$

• Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C,\ r) = \dfrac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{|6-3+5|}{\sqrt{13}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}} \approx 2{,}22 > 2$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

<u>EJERCICIO 4</u> :
a) Halla el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
b) Estudia la posición relativa de la recta $2x - y = 0$ respecto a la circunferencia anterior.

Solución:

a) $\text{Centro} = \left(\dfrac{2}{2}, \dfrac{0}{2}\right) = (1, 0)$

$\text{Radio} = \sqrt{1^2 + 0^2 - (-3)} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

b) Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{distancia} = \dfrac{|2 \cdot 1 - 0|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} < \text{radio} \rightarrow$ Son secantes.

EJERCICIO 5 : Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$ y cuyo centro es el punto $C\ (2, 1)$.

Solución:

- El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{Radio} = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6-4+5|}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

- La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{49}{25}$, es decir: $25x^2 + 25y^2 - 100x - 50y + 76 = 0$

EJERCICIO 6 : Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P\ (2, -1)$, $Q\ (3, 0)$ y $R\ (0, -2)$.

Solución:

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Hallamos A, B y C teniendo en cuenta que P, Q y R satisfacen la ecuación, por ser puntos de la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{l} 4+1+2A-B+C=0 \\ 9+0+3A+0+C=0 \\ 0+4+0-2B+C=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2A-B+C=-5 \\ 3A \qquad +C=-9 \\ \qquad -2B+C=-4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=3 \\ B=-7 \\ C=-18 \end{array}$$

Por tanto, la ecuación es: $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 18 = 0$

EJERCICIO 7 : Halla el valor de k para que la recta $3x + 4y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = \left(\frac{0}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (0, -2)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{0+4-(-5)} = \sqrt{9} = 3$$

- Calculamos la distancia del centro a la recta dada: $d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + k|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|k-8|}{5}$

- La recta es tangente a la circunferencia cuando:

$$\frac{|k-8|}{5} = 3 \quad \rightarrow \quad |k-8| = 15 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k-8=15 \quad \rightarrow \quad k=23 \\ k-8=-15 \quad \rightarrow \quad k=-7 \end{cases}$$

EJERCICIO 8 : Obtén el centro y el radio de la circunferencia cuyo centro está en la recta $y = 3x$ y que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(1, 4)$.

Solución:

Si tiene su centro en la recta $y = 3x$, las coordenadas de este son $C\ (x, 3x)$.
La distancia de cada uno de los puntos dados al centro ha de ser igual (esta distancia es el radio de la circunferencia):

$$\sqrt{(x-3)^2 + (3x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (3x-4)^2}$$

$$x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 12x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 24x + 16 \Rightarrow 8x = 4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

El centro de la circunferencia es $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{El radio es: } r = \text{dist}(C, (3, 2)) = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

EJERCICIO 9 : Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,2)$ y $B(1,4)$ y tiene su centro en la recta $y = 2x$.

Solución:

Si tiene su centro en la recta $y = 2x$, las coordenadas de este son $C(x, 2x)$.

La distancia de A al centro ha de ser igual que la distancia de B al centro (esta distancia es el radio de la circunferencia): $dist\ (A, C) = dist\ (B, C) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(2x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(2x-4)^2}$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$12x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

El centro de la circunferencia es $C(1, 2)$.

El radio es: $r = dist(A, C) = \sqrt{4} = 2$

La ecuación será: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

<u>EJERCICIO 10</u> : Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2, -3)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Solución:

El radio, R, de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = \text{dist}(C,\ r) = \frac{|6+12+5|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

La ecuación será: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{529}{25} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - \dfrac{204}{25} = 0$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

<u>EJERCICIO 11</u> : Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 2)$.

Solución:

El centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz del segmento de extremos $A(1, 0)$ y $B(3, 2)$:

- Punto medio de A y B $\rightarrow$ $M = \left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{0+2}{2}\right) = (2,\ 1)$
- Pendiente de la recta que pasa por A y B $\rightarrow$ $m = \dfrac{2-0}{3-1} = \dfrac{2}{2} = 1$
- Pendiente de la mediatriz (perpendicular) $\rightarrow$ $\dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{1} = -1$
- Ecuación de la mediatriz: $y = 1 - 1(x-2) \quad \rightarrow \quad y = 1 - x + 2 \quad \rightarrow \quad y = 3 - x$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C(x,\ 3-x)$.

La distancia del centro a los puntos A y B debe ser igual a 2: $\quad \text{dist}(A,\ C) = \sqrt{(x-1)^2+(3-x)^2} = 2$

$$x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x = 3 \ \rightarrow \ y = 0 \\ x = 1 \ \rightarrow \ y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- Centro $(3, 0)$ y radio 2: $(x-3)^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
- Centro $(1, 2)$ y radio 2: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

<u>EJERCICIO 12</u> :

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Solución:

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

$$\text{Centro} = \left(\frac{4}{2},\ \frac{6}{2}\right) = (2,\ 3)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{4+9-4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro (2, 3). Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

<u>EJERCICIO 13</u> : Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

Solución:

Hallamos su centro: $\left.\begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{array}$

$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 11x = 22 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1 \Rightarrow$ El centro es $C(2, -1)$.

El radio, R, es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = \text{dist}(C,\ r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

<u>EJERCICIO 14</u> : Estudia la posición relativa de la recta r: $2x + y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

  $\text{Centro} = C = \left(\frac{4}{2},\ \frac{2}{2}\right) = (2,\ 1)$

  $\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79 < 3 = \text{radio}$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla la posción relativa de la recta $3x + 4y - 25 = 0$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

Solución:

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = \dfrac{25 - 3x}{4} \\ x^2 + \left(\dfrac{25 - 3x}{4}\right)^2 - 25 = 0 \end{array}$$

$$x^2 + \frac{625 - 150x + 9x^2}{16} - 25 = 0 \quad \rightarrow \quad 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 - 400 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 25x^2 - 150x + 225 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 3)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3 \quad \rightarrow \quad y = 4$$

Se cortan en el punto (3, 4). Por tanto, son tangentes.

<u>EJERCICIO 16</u> : Obtén el valor de k para que la recta s: $x + y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

  $\text{Centro} = C = \left(\frac{-6}{2},\ \frac{-2}{2}\right) = (-3,\ -1)$

  $\text{Radio} = r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C,\ s) = \frac{|-3 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k - 4|}{\sqrt{2}}$
- Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}}=2 \quad\rightarrow\quad |k-4|=2\sqrt{2} \quad \begin{cases} k-4=2\sqrt{2} & \rightarrow \quad k=4+2\sqrt{2} \\ k-4=-2\sqrt{2} & \rightarrow \quad k=4-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $k_1=4+2\sqrt{2}$; $k_2=4-2\sqrt{2}$

<u>EJERCICIO 17</u> : Estudia la posición relativa de la recta $y=\dfrac{8-4x}{3}$ y la circunferencia $x^2+y^2-12x-6y+20=0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro}=C=\left(\frac{12}{2},\ \frac{6}{2}\right)=(6,\ 3)$$

$$\text{Radio}=r=\sqrt{36+9-20}=\sqrt{25}=5$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$s: y=\frac{8-4x}{3} \quad\rightarrow\quad 3y=8-4x \quad\rightarrow\quad 4x+3y-8=0 \Rightarrow \text{dist}(C,\ s)=\frac{|24+9-8|}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5=\text{radio}$$

- Como la distancia del centro a la recta es igual al radio, la recta es tangente a la circunferencia.

<u>EJERCICIO 18</u> : Halla la posición relativa de la recta r: $x+y=2$ con respecto a la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro}=C=\left(\frac{-2}{2},\ \frac{-4}{2}\right)=(-1,\ -2)$$

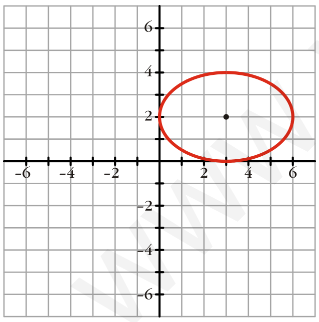
$$\text{Radio}=R=\sqrt{1+4-1}=\sqrt{4}=2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C,r)=\dfrac{|-1-2-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\approx 3{,}53>2=\text{radio}$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

ELIPSE

<u>EJERCICIO 19</u> : Escribe la ecuación de la siguiente elipse y halla sus semiejes, sus focos y su excentricidad:



Solución:

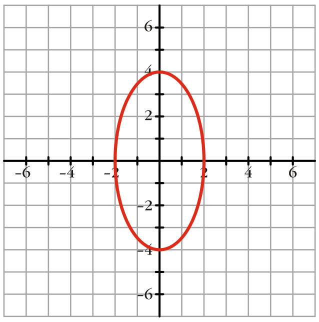
Ecuación: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

Semieje mayor: 3; semieje menor: 2

Focos: $F(3+\sqrt{5},\ 2)$ y $F'(3-\sqrt{5},\ 2)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}75$

<u>EJERCICIO 20</u> : Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



Solución:

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

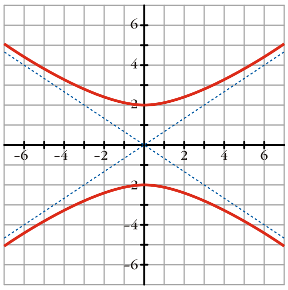
Focos : $F\left(0,\ \sqrt{12}\right)$ y $F'\left(0,\ -\sqrt{12}\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

HIPÉRBOLA

<u>EJERCICIO 21</u> : Pon la ecuación de la siguiente hipérbola, su semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



Solución:

Ecuación: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

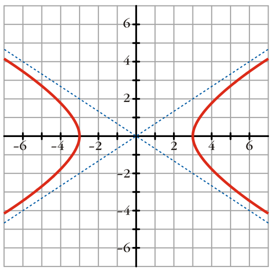
Semieje: 2

Focos : $F\left(0,\ \sqrt{13}\right)$ y $F'\left(0,\ -\sqrt{13}\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}8$

Asíntotas: $y = \dfrac{2}{3}x$; $y = \dfrac{-2}{3}x$

<u>EJERCICIO 22</u> : Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



Solución:

Ecuación: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Semieje: 3

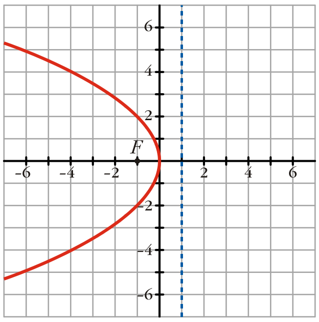
Focos: $F(\sqrt{13},\ 0)$ y $F'(-\sqrt{13},\ 0)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{3} \approx 1{,}2$

Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x$; $y = \frac{-2}{3}x$

PARÁBOLA

EJERCICIO 23 : Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:

Directriz: $x = 1$. Foco $(-1, 0)$.

Ecuación: $y^2 = -4x$

LUGARES GEOMÉTRICOS

EJERCICIO 24 : Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas r_1: $x + 3y - 1 = 0$ y r_2: $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que:

$dist(P, r_1) = dist(P, r_2)$, es decir: $\frac{|x + 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{10}}$

$$|x + 3y - 1| = |3x - y + 4| \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 3x - y + 4 \ \rightarrow\ 2x - 4y + 5 = 0 \\ x + 3y - 1 = -3x + y - 4 \ \rightarrow\ 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

EJERCICIO 25 : Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$.

Solución:

Los puntos $P(x,y)$ de la mediatriz cumplen que:

$dist(P, A) = dist(P, B)$, es decir: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros y operamos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1$$
$$4x - 4y - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x - y - 1 = 0$$

Es una recta perpendicular al segmento AB, que pasa por su punto medio.

RECOPILACIÓN

EJERCICIO 26 : ¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos $A(0, 1)$ y $B(0, -1)$ es 8?. Halla su ecuación.

Solución:
Es una elipse de focos A y B y constante $k = 8$. Hallamos su ecuación:
Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$dist\,(P, A) + dist\,(P, B) = 4,\ \text{ es decir: } \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4$$

Elevamos al cuadrado y operamos para simplificar:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$
$$8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4y + 16$$
$$2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = y + 4$$
$$4\left(x^2 + y^2 + 2y + 1\right) = (y+4)^2$$
$$4x^2 + 4y^2 + 8y + 4 = y^2 + 8y + 16$$
$$4x^2 + 3y^2 = 12.\ \text{Dividimos entre } 12: \ \frac{4x^2}{12} + \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \ \rightarrow \ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.\ \text{Es una elipse.}$$

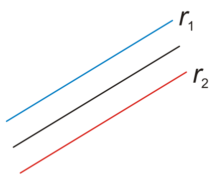
EJERCICIO 27 : Halla el lugar goemétrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a $Q(2, 4)$ sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Solución:
Es una circunferencia de centro $(2, 4)$ y radio 3. Hallamos su ecuación:
Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$dist\,(P, Q) = 3,\ \text{ es decir: } \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3.\ \text{Elevamos al cuadrado y operamos:}$$
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9 \ \rightarrow \ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

EJERCICIO 28 : Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a la recta r_1: $x + y + 1 = 0$ sea igual que su distancia a la recta r_2: $2x + 2y + 4 = 0$.

Solución:
Las dos rectas dadas, r_1: $x + y + 1 = 0$ y r_2: $x + y + 2 = 0$, son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:
Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$dist\,(P, r_1) = dist\,(P, r_2),\ \text{ es decir: } \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x+y+1| = |x+y+2| \ \begin{cases} x+y+1 = x+y+2 \ \rightarrow \ 1 = 2 \ \rightarrow \ \text{Imposible} \\ x+y+1 = -x-y-2 \ \rightarrow \ 2x+2y+3 = 0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a r_1 y r_2.

EJERCICIO 29 : Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, *P*(*x*, *y*), tales que el triángulo *ABP* sea rectángulo en *P*, siendo *A*(2, 1) y *B*(−6, 1). Interpreta la figura que obtienes.

Solución:
Para que el triángulo sea rectángulo en *P*, se ha de cumplir que:

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-x,\ 1-y)\cdot(-6-x,\ 1-y) = 0$$

$$(2-x)(-6-x) + (1-y)^2 = 0$$

$$-12 - 2x + 6x + x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0;\ \text{es decir:}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Obtenemos una circunferencia de centro (−2, 1) (que es el punto medio del segmento *AB*) y de radio 4.

EJERCICIO 30 : Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos *A*(−4, 0) y *B*(4, 0) es 40. Identifica la figura resultante.

Solucion:
Si *P*(*x*, *y*) es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[\text{dist}\ (P,\ A)]^2 + [\text{dist}\ (P,\ B)]^2 = 40;\ \text{es decir:}$$

$$(x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro (0, 0) y radio 2.

EJERCICIO 31 : Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano tales que su distancia al punto *A*(1, 0), es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Solución:
Si *P*(*x*, *y*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P,\ A) = 3\,\text{dist}(P,\ x=2),\ \text{es decir:}\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3|x-2|.\ \text{Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0.\ \text{Es una hipérbola.}$$

EJERCICIO 32 : Obtén el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano tales que:

$$\frac{\textit{dist}(P,\ A)}{\textit{dist}(P,\ r)} = 2,\ \textbf{siendo}\ A(1,0)\ \textbf{y}\ r: y = 4$$

¿Qué figura obtienes?

Solución:
Si *P*(*x*, *y*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ r)} = 2,\ \text{es decir: dist}(P,\ A) = 2\cdot\text{dist}(P,\ r)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\cdot|y-4|.\ \text{Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(y^2 - 8y + 16)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4y^2 - 32y + 64$$

$$x^2 - 3y^2 - 2x + 32y - 63 = 0.\ \text{Es una hipérbola.}$$

<u>EJERCICIO 33</u> : Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano cuya distancia a *A*(2, 0) sea el doble de la distancia a *B*(−1, 0). Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, A) = 2 \cdot \text{dist}(P, B), \text{ es decir: } \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4. \text{ Es una circunferencia de centro } (-2, 0) \text{ y radio } 2.$$

<u>EJERCICIO 34</u>

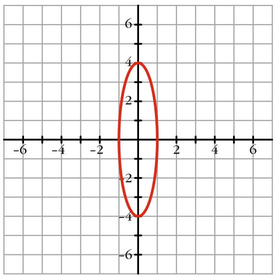
a) Describe la siguiente cónica y represéntala gráficamente: $16x^2 + y^2 = 16$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $16x^2 + y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una elipse de semiejes 1 y 4. Su gráfica es:



b) Puesto que $a^2 - b^2 = c^2$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c = \pm\sqrt{15}$

Los focos son $F\left(0, \sqrt{15}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{15}\right)$

<u>EJERCICIO 35</u>

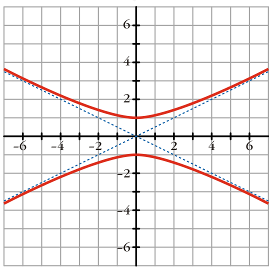
a) Identifica la siguiente cónica y represéntala: $4y^2 - x^2 = 4$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $4y^2 - x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \dfrac{y^2}{1} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

Es una hipérbola, cuya gráfica es:



b) Como $c^2 - a^2 = b^2$, y $a = 1$ y $b = 2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 5 \quad \rightarrow \quad c = \pm\sqrt{5}$

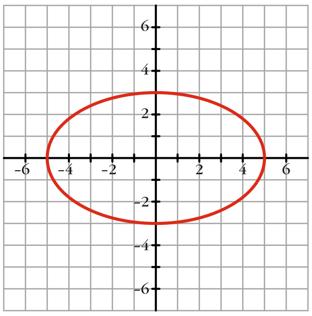
Los focos son $F\left(0, \sqrt{5}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

EJERCICIO 36 : Identifica la siguiente cónica y represéntala: $9x^2 + 25y^2 = 225$

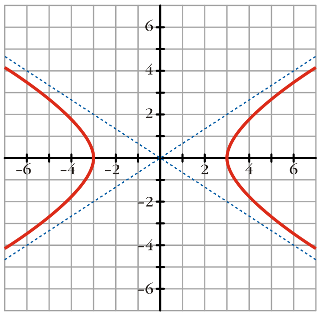
Solución:

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Es una elipse de semiejes 5 y 3. Su gráfica es:



EJERCICIO 37 : Obtén la ecuación de la cónica cuya gráfica es:



Solución:

Observamos que la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; y que $a = 3$.

Como las asíntotas son $y = \pm\frac{2}{3}x$ y $a = 3 \quad \rightarrow \quad b = 2$

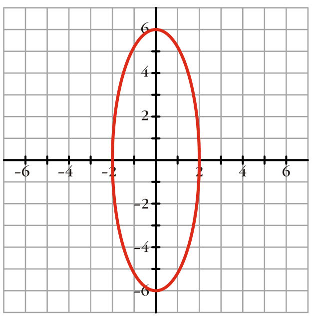
Así, la ecuación será: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

EJERCICIO 38 : Describe la siguiente cónica y represéntala: $36x^2 + 4y^2 = 144$

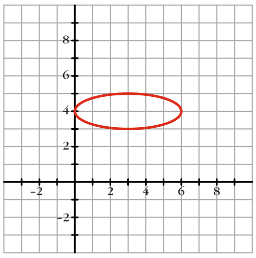
Solución:

$$36x^2 + 4y^2 = 144 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Es una elipse se semiejes 2 y 6. Su gráfica es:



EJERCICIO 39 : Escribe la ecuación de la siguiente cónica:



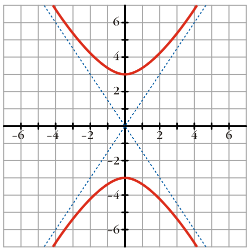
Solución:

Es una elipse de centro $(3, 4)$ y semiejes 3 y 1. Su ecuación será: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{1}=1$

EJERCICIO 40 : Identifica la siguiente cónica y represéntala gráficamente: $4y^2 - 9x^2 = 36$

Solución:

$4y^2-9x^2=36 \quad\rightarrow\quad \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1.$ Es una hipérbola, cuya gráfica es:



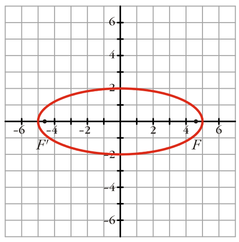
EJERCICIO 41 : Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

a) $4x^2 + 25y^2 = 100$ **b) $4y^2 - x^2 = 4$**

Solución:

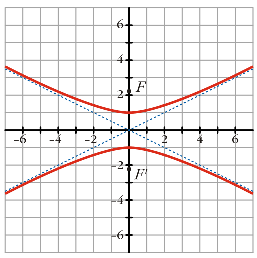
a) $4x^2+25y^2=100 \quad\rightarrow\quad \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$$\text{Es una elipse:}\begin{cases}\text{Semieje mayor: } 5\\ \text{Semieje menor: } 2\\ \text{Focos: } F\left(\sqrt{21},\ 0\right) \text{ y } F'\left(-\sqrt{21},\ 0\right)\\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}\approx 0{,}92\end{cases}$$



b) $4y^2-x^2=4 \quad\rightarrow\quad y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

$$\text{Es una hipérbola:}\begin{cases}\text{Semieje: } 1\\ \text{Focos: } F\left(0,\ \sqrt{5}\right) \text{ y } F'\left(0,\ -\sqrt{5}\right)\\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{5}}{1}\approx 2{,}24\\ \text{Asíntotas: } y=\dfrac{1}{2}x\ ;\quad y=\dfrac{-1}{2}x\end{cases}$$



EJERCICIO 42 : **Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:**

a) $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1$

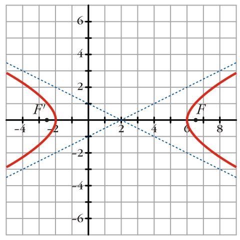
Solución:

a) Es una hipérbola de centro $P(2,\,0)$.

Los focos son: $F\left(2+2\sqrt{5},\,0\right)$ y $F'\left(2-2\sqrt{5},\,0\right)$

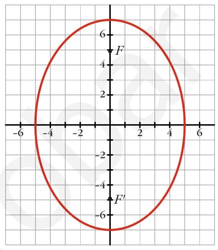
La excentricidad es: $e=\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}12$

Las asíntotas son: $y=\dfrac{1}{2}(x-2)$; $y=\dfrac{-1}{2}(x-2)$



b) Es una elipse de centro C(0,0)

$$\text{Es una elipse}:\begin{cases}\text{Semieje mayor: } 7\\ \text{Semieje menor: } 5\\ \text{Focos: } F\left(0,\,\sqrt{24}\right) \text{ y } F'\left(0,\,-\sqrt{24}\right)\\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{24}}{7}\approx 0{,}7\end{cases}$$



EJERCICIO 43 : **Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:**

a) $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1$

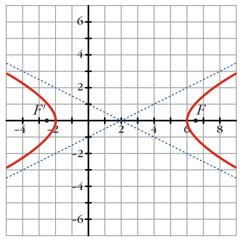
Solución:

a) Es una hipérbola de centro $P(2,\,0)$.

Los focos son: $F\left(2+2\sqrt{5},\,0\right)$ y $F'\left(2-2\sqrt{5},\,0\right)$

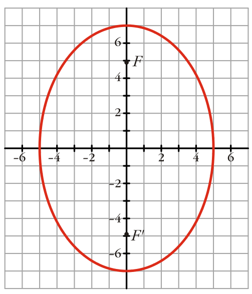
La excentricidad es: $e=\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}12$

Las asíntotas son: $y=\dfrac{1}{2}(x-2)$; $y=\dfrac{-1}{2}(x-2)$



b) Es una elipse de centro C(0,0)

$$\text{Es una elipse}:\begin{cases}\text{Semieje mayor: } 7\\ \text{Semieje menor: } 5\\ \text{Focos: } F\left(0,\,\sqrt{24}\right) \text{ y } F'\left(0,\,-\sqrt{24}\right)\\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{24}}{7}\approx 0{,}7\end{cases}$$



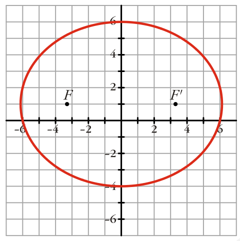
EJERCICIO 44 : Identifica estas cónicas, halla sus elementos y dibújalas:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ **b)** $y^2 - 4x = 0$

Solución:

a) Es una elipse de centro $P(0, 1)$.

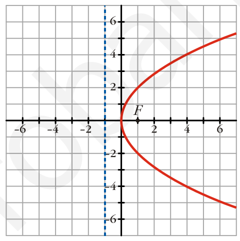
Semieje mayor: 6; semieje menor: 5



Focos: $F\left(\sqrt{11}, 11\right)$ y $F'\left(-\sqrt{11}, 1\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0{,}55$

b) $y^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = 4x$



Es una parábola: $\begin{cases} \text{Vértice: } (0,\ 0) \\ \text{Foco: } (1,\ 0) \\ \text{Directriz: } x = -1 \end{cases}$

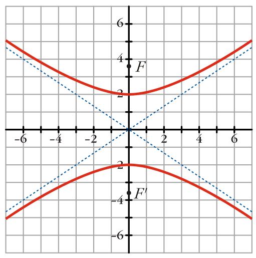
EJERCICIO 45 : Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ **b)** $25x^2 + 100y^2 = 2500$

Solución:

a) Es una hipérbola.

Semieje: 2



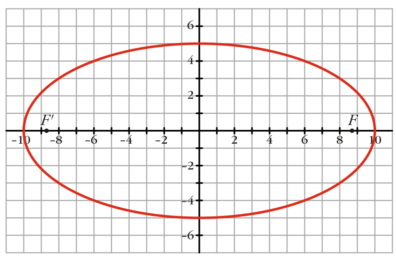
Focos: $F\left(0, \sqrt{13}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{13}\right)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}8$

Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x$; $y = \frac{-2}{3}x$

b) $25x^2 + 100y^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

Es una elipse: $\begin{cases} \text{Semieje mayor: } 10; \text{ semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F\left(5\sqrt{3},\ 0\right) \text{ y } F'\left(-5\sqrt{3},\ 0\right) \\ \text{Excentricidad: } \frac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}87 \end{cases}$



<u>EJERCICIO 46</u> : Dadas las siguientes cónicas, identifícalas, obtén sus elementos característicos y represéntalas gráficamente:

a) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ **b)** $y^2-9x^2=9$

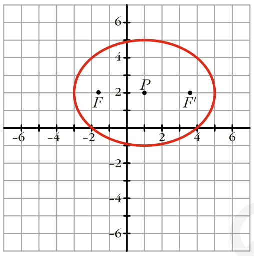
Solución:

a) Es una elipse de centro $P(1, 2)$.

Semieje mayor: 4; semieje menor: 3

$\text{Focos}: \ F\left(1+\sqrt{7},\ 2\right) \text{ y } F'\left(1-\sqrt{7},\ 2\right)$

Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{7}}{4}\approx 0{,}66$



b) $y^2-9x^2=9 \quad \rightarrow \quad \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{1}=1$

$$\text{Es una hipérbola:} \begin{cases} \text{Semieje: } 3 \\ \text{Focos}: \ F\left(0,\ \sqrt{10}\right) \text{y } F'\left(0,\ -\sqrt{10}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}\approx 1{,}05 \\ \text{Asíntotas: } \ y=3x \ ; \quad y=-3x \end{cases}$$