Sistemas ecuacs. exponenciales y logarítmicas

Sistemas de ecs. exponenciales y logarítmicos

Resuelve los siguientes sistemas:

Ejercicio 1 $\left.\begin{array}{c}\log x+\log y^3=5\\ \log x/y=1\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c}\log x+\log y^3=5\\ \log x/y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}\log x+3\log y=5\\ \log x-\log y=1\end{array}\right\}$$

Cambiando de signo la segunda ecuación y sumándole la 1^a:

$$\begin{array}{c}\log x+3\log y=5\\ -\log x+\log y=-1\\ \hline 4\log y=4\end{array}$$

de donde

$$\log y=1$$

sustituyendo este valor en la 1^a ecuación

$$\log x+3=5\rightarrow\log x=2$$

Como $\left[\begin{array}{c}\log x=2\\ \log y=1\end{array}\right]$ aplicando la definición de logaritmo decimal podemos afirmar

$$\left[\begin{array}{c}x=10^2=100\\ y=10\end{array}\right]$$

Ejercicio 2 $\left.\begin{array}{c}\log x+\log y=2\\ x-y=20\end{array}\right\}$

Aislando la incógnita x en la 2^a ecuación $x=20+y$ y sustituyendo en la 1^a tendremos:

$$\log(20+y)+\log y=2$$
$$\log\left(20y+y^2\right)=\log 100$$

De donde, obtenemos la ecuación

$$20y + y^2 = 100$$
$$y^2 + 20y - 100 = 0$$

cuyas soluciones son :

$$y = \frac{-20 \pm \sqrt{800}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -10 + 10\sqrt{2} \\ -10 - 10\sqrt{2} \end{cases}$$

Si $y = -10 + 10\sqrt{2} \rightarrow x = 20 - 10 + 10\sqrt{2} = 10 + 10\sqrt{2}$

La solución $y = -10 - 10\sqrt{2}$ no es válida; ya que $\log\left(-10 - 10\sqrt{2}\right)$ no es un número real.

Ejercicio 3 $\left.\begin{array}{r} 2^x - 4^{2y} = 0 \\ x - y = 15 \end{array}\right\}$

Como $4^{2y} = \left(2^2\right)^{2y} = 2^{4y}$; entonces el sistema queda así:

$$\left.\begin{array}{r} 2^x - 2^{4y} = 0 \\ x - y = 15 \end{array}\right\}$$

Como $2^x - 2^{4y} = 0 \rightarrow 2^x = 2^{4y} \rightarrow x = 4y$

Con lo que resolver el sistema inicial es equivalente a resolver:

$$\left.\begin{array}{r} x = 4y \\ x - y = 15 \end{array}\right\}$$

cuya solución es

$$\begin{bmatrix} x = 20 \\ \text{e} \\ y = 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4 $\left.\begin{array}{r} 2^{2x+5y} = 2 \\ 2^{-x+y} = 8 \end{array}\right\}$

Escribiendo los términos independientes como potencias de 2 :

$$\left.\begin{array}{r} 2^{2x+5y} = 2^1 \\ 2^{-x+y} = 2^3 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver :

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 1 \\ -x + y = 3 \end{array}\right\}$$

Para ello multiplicamos la 2^a ec. por 2 y le sumamos la primera:

$$\begin{array}{r} 2x+5y=1 \\ -2x+2y=6 \\ \hline 7y=7 \end{array}$$

De donde:

$$y=1$$

Sustituyendo en la 1^a y calculando x, obtendremos

$$x=-2$$

Ejercicio 5 $\left.\begin{array}{c} 2^x+2^y=24 \\ 2^x\cdot 2^y=128 \end{array}\right\}$

Despejando de la 1^a ec 2^xtendremos que:

$$2^x=24-2^y$$

sustituyendo dicha expresión en la segunda, obtenemos la siguiente ecuación:

$$(24-2^y)\,2^y=128$$

Multiplicando y transponiendo términos:

$$\begin{array}{rcl} -\left(2^y\right)^2+24\cdot 2^y-128 & = & 0 \\ \left(2^y\right)^2-24\cdot 2^y+128 & = & 0 \end{array}$$

obtenemos una ecuación de segundo grado (la incógnita es 2^y) cuyas soluciones son:

$$2^y=\frac{24\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{24\pm 8}{2}=\left\{\begin{array}{c} 16 \\ 8 \end{array}\right.$$

Si $2^y=16\rightarrow 2^x=24-16=8$

Como $\left[\begin{array}{c} 2^y=16=2^4 \\ \text{y} \\ 2^x=8=2^3 \end{array}\right]\rightarrow x=3$ e $y=4$

Si $2^y=8\rightarrow 2^x=24-8=16$

Como $\left[\begin{array}{c} 2^y=8=2^3 \\ \text{y} \\ 2^x=16=2^4 \end{array}\right]\rightarrow x=4$ e $y=3$

Nota 1: Si en la 1^a ecuación $2^x+2^y=24\rightarrow 2^y=24-2^x$ aislamos y ; obtenemos la siguiente función logarítmica[1]

$$y=\log_2\left(24-2^x\right)$$

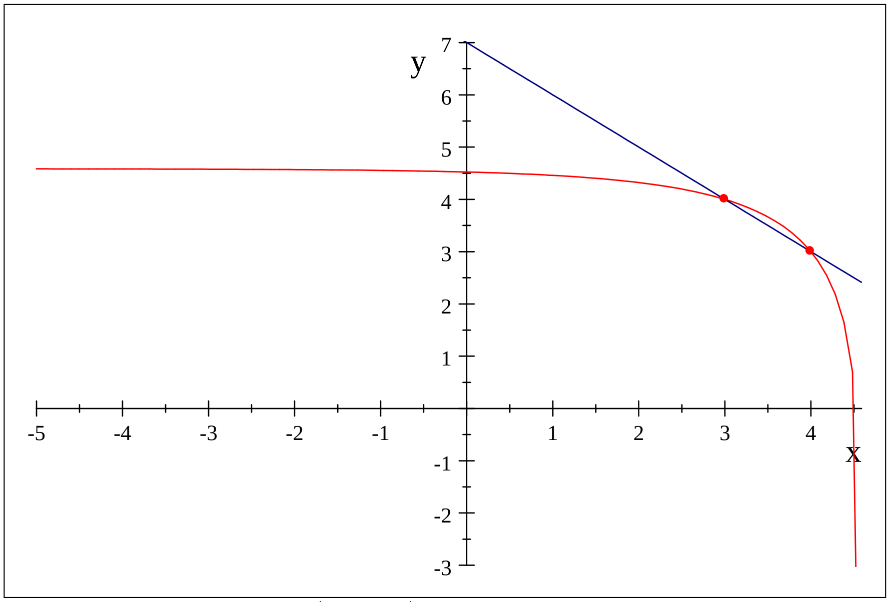
[1] Su dominio de definición es :
$D(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /24-2^x>0\}=(-\infty,\log_2 24)$

Nota 2: La 2^a ecuación $2^x 2^y = 128 \rightarrow 2^y = \frac{128}{2^x}$ corresponde a la función:

$$\begin{aligned} y &= \log_2 \left(\frac{128}{2^x} \right) = \log_2 2^7 - \log_2 2^x \\ y &= -x + 7 \end{aligned}$$

fíjate que es una recta

Nota: Ambas gráficas se cortan en los puntos $P_1(3,4)$ y $P_2(4,3)$



$y = \log_2 (24 - 2^x)$ e $y = -x + 7$