# EJERCICIOS DE PRODUCTOS VECTORIAL Y MIXTO. APLICACIONES

## Ejercicio 1.-

**Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a $\pi$ y a $\sigma$:**

$$\pi: x - 2y = 5 \qquad\qquad \sigma: 2x + z = 7$$

Un vector normal al plano es: $(1, -2, 0) \times (2, 0, 1) = (-2, -1, 4)$

La ecuación del plano será: $-2x - y + 4z = 0$

## Ejercicio 2.-

**Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:**

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, $\pi$, que contiene a $r$ y es paralelo a $s$:

$$\left.\begin{array}{l} (12, 0, 5) \,//\, r \\ (0, 1, 0) \,//\, s \end{array}\right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de $r$, y, por tanto, de $\pi$.

Ecuación de $\pi$: $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

$$-5x + 12z - 31 = 0$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segundo método:

Punto genérico de $r$: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de $s$: $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en $r$ y su extremo en $s$ es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 & \rightarrow & -169\lambda - 169 = 0 & \rightarrow & \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 & \rightarrow & 4 + \mu = 0 & \rightarrow & \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en $r$ y en $s$, obtenemos los puntos $R$ y $S$: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$.

$$dist\ (r, s) = dist\ (R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer método:

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d}'(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d}'| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = \dfrac{169}{13} = 13$

**Ejercicio 3.-**

**Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: $A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -11)$**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC}(4, -2, -16) \end{array}\right\} \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1\,560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,560}}{2} \approx 19{,}75\ \text{u}^2$$

**Ejercicio 4.-**

**Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2) \\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)\end{array}\right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

**Ejercicio 5.-**

**Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:**

**$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$**

- Área del triángulo $ABC$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo $ABD$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo $ACD$:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} \approx 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo $BCD$:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} \approx 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total $= 14 + 22{,}68 + 43{,}15 + 60{,}19 = 140{,}02 \text{ u}^2$

• Volumen: $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$ $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$ $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = \frac{306}{6} \approx 51{,}33 \text{ u}^3$$

**Ejercicio 6.-**

**Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$**

***☛ Recuerda que $V = 1/3 \cdot$ área base $\times$ altura.***

***En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí.***

***Hazlo también utilizando el producto mixto y comprueba que obtienes el mismo resultado.***

• Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad A\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{1}{6},\ 0,\ 0\right)$$

$$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad C\left(0,\ -\frac{1}{5},\ 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

• Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

• Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\ |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = |\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

**Ejercicio 7.-**

**Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta** $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{4}$ **y que pasa por el punto (–1, 1, 0), y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.**

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x+1) + 3(y-1) + 4(z-0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; A\left(0,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; B\left(\frac{1}{2},\, 0,\, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; C\left(0,\, \frac{1}{3},\, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144}\ \text{u}^3$$

**Ejercicio 8.-**

**Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 2)$ y es perpendicular a las rectas $r_1$ y $r_2$:**

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas $r_1$ y $r_2$:

$$r_1\text{: } (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \quad \rightarrow \quad \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2\text{: } (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $r_1$ y a $r_2$:

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \quad \rightarrow \quad \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto $P(1, 2, 2)$, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + \ \ 6\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

**Ejercicio 9.-**

**Halla la ecuación del plano $\pi$ que contiene a la recta $r$: $\begin{cases} x + \ \ y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z \quad\ \ = 0 \end{cases}$**

**y es ortogonal al plano $\sigma$: $2x - y + 3z + 1 = 0$.**

**Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por $\pi$ y $\sigma$.**

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta $r$:

$$P(1, -1, 1) \in r \quad \rightarrow \quad P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \quad \rightarrow \quad \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$$

Si $\pi$ es ortogonal a $\sigma$, el vector normal de $\sigma$ es paralelo a $\pi$:

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \quad \rightarrow \quad (2, -1, 3) \,//\, \pi$$

Obtenemos un vector normal a $\pi$: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \quad \rightarrow \quad (5, 7, -1)$

La ecuación del plano $\pi$ es: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por $\pi$ y $\sigma$:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\text{: } 5x + 7y - \ \ z + 3 = 0 \\ \sigma\text{: } 2x - \ \ y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 7y - \ \ z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \ R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta: $\begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$

**Ejercicio 10.-**

**Dados la recta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ y el plano $\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0$, halla el plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.**

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \quad \rightarrow \quad P(0, 1, -1); \ \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a $\vec{d}$ y a $\vec{n}$ y contendrá a $P$.

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \quad \rightarrow \quad (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

**Ejercicio 11.-**

**Determina la perpendicular común a las rectas:**

$$r: \begin{cases} x + \ \ y = z + 4 \\ x + 2y = \quad\ \ 7 \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x - \quad\ \ 2 = 0 \\ \quad\ \ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \left.\begin{cases} x + \ \ y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando la 1ª ecuación a la 2ª: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z \end{array}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto genérico de } r \text{ es: } R(1 + 2\lambda,\ 3 - \lambda,\ \lambda)$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto genérico de } s \text{ es: } S(2,\ -3,\ \mu)$$

Un vector genérico de origen en $r$ y extremo en $s$ es: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda,\ -6 + \lambda,\ \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a $r$ y a $s$:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \end{array} \right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5};\ \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array} \right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

**Ejercicio 12.-**

**Dados la recta** $r: \begin{cases} x - \quad 2z + 3 = 0 \\ y - \; z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi$: $x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta situada en el plano** $\pi$, **que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** $r$.

Un vector dirección de $r$ es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano $\pi$). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

**Ejercicio 13.-**

**Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas:** $(-1 + 3\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)$ **y es perpendicular al plano** $2x + y - 3z + 4 = 0$.

**Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.**

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \quad \rightarrow \quad (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$$\vec{d}(3, 2, 1); \ \vec{n}(2, 1, -3)$$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

$$90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 20°\ 55'\ 29''$$

**Ejercicio 14.-**

**Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento $PQ$ trazamos un plano $\pi$ perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos $A$, $B$ y $C$.**

**a) Escribe la ecuación de $\pi$.**

**b) Calcula el área del triángulo $ABC$.**

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento $PQ$: $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x-1) - 3(y-4) + 1(z-4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$$y = z = 0 \;\to\; 2x + 6 = 0 \;\to\; x = -3 \;\to\; A(-3, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \;\to\; -3y + 6 = 0 \;\to\; y = 2 \;\to\; B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \;\to\; z + 6 = 0 \;\to\; z = -6 \;\to\; C(0, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0) \quad \overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \;\to\; |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

**Ejercicio 15.-**

**Sea $r_1$ la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea $r_2$ la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.**

**Obtén, de manera razonada, la distancia entre $r_1$ y $r_2$.**

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r_1: \overrightarrow{AB}(4, -2, 0) \;//\; (2, -1, 0)$$

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$r_2$: $\overrightarrow{CD}(3, 2, -7)$

$$r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de $r_1$ y $r_2$:

$\overrightarrow{AC}(-2, -4, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre $r_1$ y $r_2$:

$$dist\,(r_1, r_2) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1{,}22$$

**Ejercicio 16.-**

**Calcula la distancia entre las siguientes rectas:**

$$r: \begin{cases} x - \quad z = -2 \\ \quad y - z = -4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - \quad z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 & \rightarrow & x = -2 + z \\ y - z = -4 & \rightarrow & y = -4 + z \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 & \rightarrow & x = z \\ y + z = 0 & \rightarrow & y = -z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(-2, -4, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 4, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

• Hallamos la distancia entre las rectas:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{4}{|(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)|} =$$

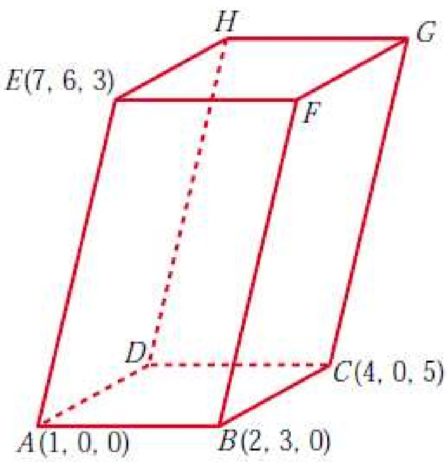
$$= \frac{4}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{4+4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

**Ejercicio 17.-**

**Halla el volumen de un paralelepípedo de bases *ABCD* y *EFGH* sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.**

**Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.**

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:




• Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad \rightarrow \quad (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

$D(3, -3, 5)$

• Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \quad \rightarrow \quad (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

$F(8, 9, 3)$

• Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \quad \rightarrow \quad (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5) \quad \rightarrow \quad G(10, 6, 8)$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \quad \rightarrow \quad (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5) \quad \rightarrow \quad H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0)$ $\overrightarrow{AD}(2, -3, 5)$, $\overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$

**Ejercicio 18.-**

**Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, $S$, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a $P$ y a $S$ es perpendicular a la recta $r$.**

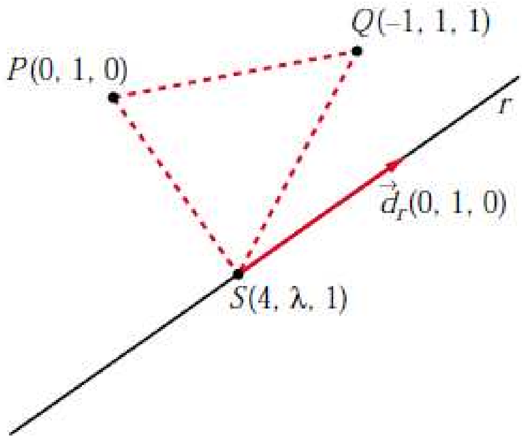
**a) Determina las coordenadas de $S$.**

**b) Calcula el área del triángulo $PQS$.**

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$




b) $\overrightarrow{PS}(4,\ 0,\ 1)$ $\overrightarrow{PQ}(-1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

**Ejercicio 19.-**

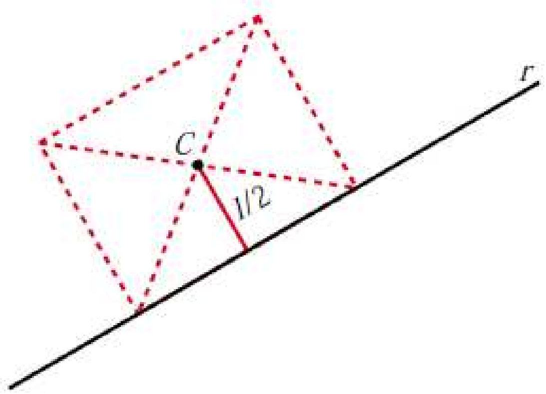
**Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

**a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.**

**b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.**

a) Es el plano, $\pi$, que contiene a $C$ y a $r$. $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.




$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \ // \ \pi$

Un vector normal al plano es:

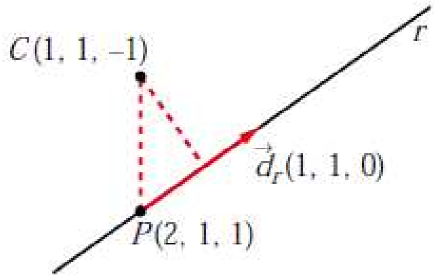
$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$

$2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de $C$ a $r$ es la mitad del lado del cuadrado.




$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$dist\ (C, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4 + 4 + 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ lado del cuadrado $= l = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$