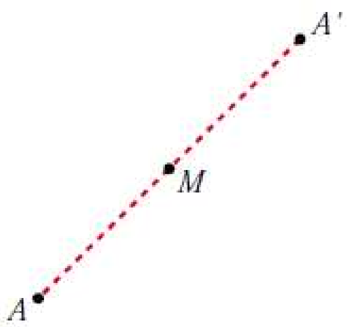
Ejercicio 1.-

Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.



Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M.

Como M es el punto medio del segmento AA', entonces:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \rightarrow x = 4; \ \frac{y+3}{2} = -1 \rightarrow y = -5; \ \frac{z}{2} = 2 \rightarrow z = 4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$

Ejercicio 2.-

¿Cuál es el vector normal del plano $x = -1$?

Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2, 3, 0)$.

El vector normal al plano $x = -1$ es $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Recta: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Ejercicio 3.-

Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \rightarrow \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

Ejercicio 4.-

Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de r es: $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) \,//\, (2, 3, -2)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 4, -1)$

El plano que buscamos es paralelo a $(2, 3, -2)$ y a $(-1, 4, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$

La ecuación del plano es: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

Ejercicio 5.-

Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r.**

El vector dirección de s ha de ser perpendicular al vector dirección de r y al vector normal del plano.

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

Un vector dirección de la recta que buscamos es: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

La recta es: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

Ejercicio 6.-

Halla la ecuación de la recta paralela a $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ **que pase por el punto de intersección de la recta** $s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ **con el plano** $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) \,//\, (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π:

$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$ $\quad \pi: x - y + z = 7$

$1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7$

$5\lambda = 5 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 7.-

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.

Un vector normal al plano es: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 8.-

Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

y es paralelo a $s: \dfrac{1-x}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$.

Un vector dirección de r es: $(1, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -1, -3)$

El plano que buscamos es paralelo a $(1, -1, -3)$ y a $(-2, 3, -4)$. Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (1, -1, -3) \times (-2, 3, -4) = (13, 10, 1)$

Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \\ -y + z = 0 \rightarrow z = y = 1 \end{array}\right\} P(0, 1, 1)$$

La ecuación del plano es: $13(x - 0) + 10(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$$13x + 10y + z - 11 = 0$$

Ejercicio 9.-

Dados el plano π: $ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

☛ *Halla, en función de a, los puntos de corte P, Q y R. Expresa después la dependencia lineal entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.*

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

π con r_1: $\quad a + 2z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{-1-a}{2}$

$$P\left(1, \frac{-1-a}{2}, \frac{-1-a}{2}\right)$$

π con r_2: $\quad 2a + 3z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{-1-2a}{3}$

$$Q\left(2, \frac{-2-4a}{3}, \frac{-1-2a}{3}\right)$$

π con r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{-1-3a}{4}$

$$R\left(3, \frac{-3-9a}{4}, \frac{-1-3a}{4}\right)$$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \; \overrightarrow{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \;\rightarrow\; -2-10a = -1-11a \;\rightarrow\; a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \;\rightarrow\; a = 1$$

Por tanto, $a = 1$.

Ejercicio 10.-

Calcula el ángulo que forma la recta: $\frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90° - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) \;//\; r \qquad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

$$cos\,(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

$$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \;\rightarrow\; \alpha = 2°\ 14'\ 59''$$

Ejercicio 11.-

Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π:

$$\boldsymbol{A(3, 0, -1)} \qquad \boldsymbol{\pi: 2x - 3y - z + 1 = 0}$$

Un vector dirección de la recta es el vector normal al plano: $(2, -3, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

Ejercicio 12.-

Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$dist\,(P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11\text{u}$$

Ejercicio 13.-

Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$\boldsymbol{r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \qquad \pi: x + 3y = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) \;//\; r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array}\right\} \quad \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{d} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; r \;//\; \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π:

$$dist\,(r, \pi) = dist\,[(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21$$

Ejercicio 14.-

Hallar, en cada caso, el ángulo que forma la recta y el plano:

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = -2$ $\qquad \pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad \pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2);\ \vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|-2-8-2|}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0);\ \vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2-2+0|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = 0 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 90° \;\rightarrow\; \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1);\ \vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 90° - \alpha = 30° \;\rightarrow\; \alpha = 60°$$

Ejercicio 15.-

Calcula el ángulo que forman los planos $\alpha: z = 3$ y $\beta: x - y + 2z + 4 = 0$.

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1);\ \vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \;\rightarrow\; \alpha = 35°\ 15'\ 52''$$

Ejercicio 16.-

Calcula la distancia del punto dado a la recta, en los siguientes casos:

a) $P(0, 7, 0)$; $r: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -10 + 3\lambda \end{cases}$

b) $P(1, 0, 0)$; $r: x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = z$

c) $A(1, 2, 3)$; $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $R(-5, 5, -10) \in r$; $\vec{d}(4, 1, 3) \;//\; r$

$\overrightarrow{RP}(5, 2, 10)$

$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 2, 10) \times (4, 1, 3) = (-4, 25, -3)$

$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = \sqrt{25} = 5$$

b) $R(1, -1, 0) \in r$; $\vec{d}(1, 2, 1) \;//\; r$

$\overrightarrow{RP}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (0, 1, 0) \times (1, 2, 1) = (1, 0, -1)$

$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

c) $R(0, 0, 1) \in r$; $\vec{d}(0, 0, 1) \;//\; r$

$\overrightarrow{RA}(1, 2, 2)$

$\overrightarrow{RA} \times \vec{d} = (1, 2, 2) \times (0, 0, 1) = (2, -1, 0)$

$$dist\ (A, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

Ejercicio 17.-

a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad\qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \quad \to \quad p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad\qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

- Punto de intersección:

$\left.\begin{aligned} 4\lambda &= 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda &= 6 + 5\mu \\ 2\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}\right\}$ Sumando las dos últimas ecuaciones:

$1 = 9 + 8\mu \quad \to \quad -8 = 8\mu \quad \to \quad \mu = -1$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

1ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

- Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \quad \to \quad (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$$8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

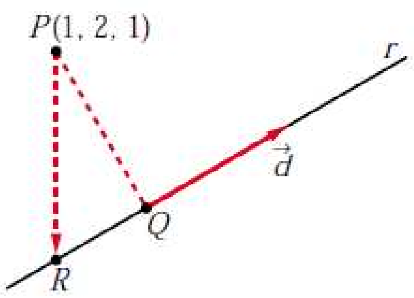
Ejercicio 18.-

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + \phantom{y - {}} z = 2 \end{cases}$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 & \rightarrow \quad y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + \phantom{y - {}} z = 2 & \rightarrow \quad x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \quad \rightarrow \quad (1 - \lambda, -1 -2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustiuyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(12, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

Ejercicio 19.-

Halla el punto P de la recta $r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$\alpha: x + y + z = -3$ y $\beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = - \lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$

• Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$

• Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta\text{: } x+y-z-3=0$$

• La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$

$$\frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1+1+1}},$$ es decir:

$$|6\lambda+3| = 3 \begin{cases} 6\lambda+3 = 3 & \rightarrow \quad 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0 \\ 6\lambda+3 = -3 & \rightarrow \quad 6\lambda = -6 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

Ejercicio 20.-

Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano. Por tanto, la ecuación del plano es:

$1(x-1) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0$

$x + 3y + 2z - 14 = 0$

Ejercicio 21.-

a) Encuentra los puntos de $r\text{: } \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ **que disten** $\frac{1}{3}$ **del plano** $\pi\text{: } 2x - y + 2z + 1 = 0$**.**

b) Obtén los puntos de π **que distan** $\frac{1}{3}$ **de los puntos hallados en el apartado anterior.**

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ z = x \end{array}\right\} \rightarrow \quad r\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \quad \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda+\lambda+2\lambda+1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda+1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda+1 = 1 & \rightarrow \quad \lambda = 0 \\ 5\lambda+1 = -1 & \rightarrow \quad \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para $(0, 0, 0)$:

  Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

  Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \;\rightarrow\; 9\lambda = -1 \;\rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

  Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = \;\; 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

  Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

Ejercicio 22.-

Ejercicio 23.-

Determina la ecuación continua de la recta r que es perpendicular y corta a las rectas s y t de ecuaciones:

s: $(1 + 2\lambda\ ,\ 2 - \lambda,\ 1 + \lambda)$ $\qquad$ **t: $(4 + \mu,\ 6 + \mu,\ 5 - 2\mu)$**

Un vector genérico de origen en s y extremo en t es:

$$\overrightarrow{ST}(3 - 2\lambda + \mu,\ 4 + \lambda + \mu,\ 4 - \lambda - 2\mu)$$

Este vector ha de ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ST}\cdot(2, -1, 1) = 0 \ \rightarrow\ 6 - 4\lambda + 2\mu - 4 - \lambda - \mu + 4 - \lambda - 2\mu = 0 \ \rightarrow\ 6\lambda + \mu = 6 \\ \overrightarrow{ST}\cdot(1, 1, -2) = 0 \ \rightarrow\ 3 - 2\lambda + \mu + 4 + \lambda + \mu - 8 + 2\lambda + 4\mu = 0 \ \rightarrow\ \lambda + 6\mu = 1 \end{array}\right\}$$

$\lambda = 1,\ \ \mu = 0$

La recta que buscamos, corta a s en $S(3, 1, 2)$, y corta a t en $T(4, 6, 5)$.

Un vector dirección es $\overrightarrow{ST}(1, 5, 3)$.

Su ecuación continua es: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$

Ejercicio 24.-

Halla los puntos simétricos de $P(1,\ 2,\ 3)$ respecto del plano α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$

- Simétrico respecto del plano:
  - Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

  - Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$

- Simétrico respecto de la recta:

  • Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 & \rightarrow \quad y = x + 3 \\ 4x - z = 0 & \rightarrow \quad z = 4x \end{cases}\right\} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

  • Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

  • Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Ejercicio 25.-

Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 + z \\ x - y = 2 - z \end{array}\right\} \text{ Restando: } \left.\begin{array}{l} x = \quad 1 + 2z \\ y = x + z - 2 = -1 + 3z \end{array}\right\} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenemos el punto de corte de r con π:

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\ (P, r) = dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14}\right)\right| = \sqrt{\frac{1050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} \approx 2{,}31$$

Ejercicio 26.-

Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de la ecuación $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\ [(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

Ejercicio 27.-

Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C:

a) Escribe la ecuación del plano π.

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) \parallel (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M = (4, 4, 1)$.

La ecuación del plano es: $1(x-4) - 3(y-4) + 2(z-1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$y = z = 0 \;\rightarrow\; x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -6 \;\rightarrow\; A(-6, 0, 0)$

$x = z = 0 \;\rightarrow\; -3y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \;\rightarrow\; -2z + 6 = 0 \;\rightarrow\; z = -3 \;\rightarrow\; C(0, 0, -3)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\,(6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 \text{ u}^3$$

Ejercicio 28.-

Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$

$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \;\rightarrow\; 2\lambda = 4 \;\rightarrow\; \lambda = 2$

El punto es $P'(5, 1, 2)$

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

$$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$$

Ejercicio 29.-

Dadas las rectas r y s:

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \ \rightarrow \ -6\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -\dfrac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \ \rightarrow \ -2 + 3\mu = 0 \ \rightarrow \ \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es: $$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{6} + \lambda \\ z = -\dfrac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 30.-

Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano α: $x - 3y + 2z + 12 = 0$.

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π, perpendicular a α y que contiene a r.

$P(1, 1, 2)$; $\vec{d}_r(2, 1, 2)$; $\vec{n}(1, -3, 2)$

$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 31.-

Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m+1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2+1+1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1$$

$$|m+1| = \sqrt{m^2+2} \quad \rightarrow \quad (m+1)^2 = m^2+2 \quad \rightarrow \quad m^2+1+2m = m^2+2$$

$$2m = 1 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

Ejercicio 32.-

La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene ese plano en cada uno de estos casos:

I) $a = 0,\ b = 0$ II) $b = 0,\ c = 0$

III) $a = 0,\ c = 0$ IV) $d = 0$

I) Es perpendicular al eje OZ. (Paralelo al plano OXY).

II) Es perpendicular al eje OX. (Paralelo al plano OYZ).

III) Es perpendicular al eje OY. (Paralelo al plano OXZ).

IV) Pasa por el origen, (0, 0, 0).

Ejercicio 33.-

Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?

Infinitas. Todas las que, pasando por P, están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P.

Ejercicio 34.-

Dadas las rectas r, s y t:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r.

- Escribimos las ecuaciones de r, s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano, π, que contiene a r y a s:

  Las rectas r y s se cortan en el punto $(-2, 2, 2)$, luego el plano π contiene a este punto.

Un vector normal al plano es:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0,\ 1,\ 1) \times (1,\ -1,\ -2) = (-1,\ 1,\ -1) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1,\ -1,\ 1)$$

Luego el plano es: π: $1(x+2) - 1(y-2) + 1(z-2) = 0$

π: $x - y + z + 2 = 0$

- P es el punto de corte de π con la recta t:

$k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k + 1 + k + k + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3k + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad k = -1$

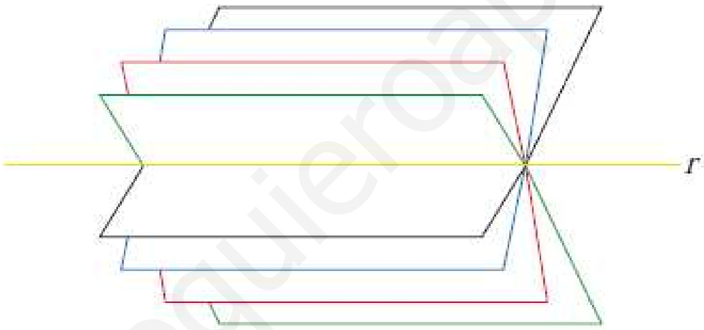
El punto es $P(-1,\ 0,\ -1)$

Ejercicio 35.-

Haz de planos

La recta r: $\begin{cases} \pi\text{: } 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma\text{: } \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **es la intersección de los planos** π **y** σ.

El conjunto de todos los planos que contienen a r **se llama** ***HAZ DE PLANOS*** **de arista** r, **y su expresión analítica es:** $a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Para cada par de valores de a **y** b **(salvo para** $a = 0$ **y** $b = 0$**) se obtiene la ecuación de un plano del haz.**

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k **uno de los planos del haz es perpendicular a la recta** t: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z}{k}$**? ¿Cuál es ese plano del haz?**

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

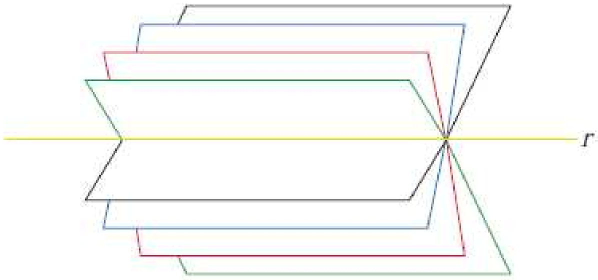
d) Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s:

$$s\text{: } \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Haz de planos

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **es la intersección de los planos** π **y** σ.

El conjunto de todos los planos que contienen a r **se llama** *HAZ DE PLANOS* **de arista** r, **y su expresión analítica es:** $a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Para cada par de valores de a **y** b **(salvo para** $a = 0$ **y** $b = 0$**) se obtiene la ecuación de un plano del haz.**

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k **uno de los planos del haz es perpendicular a la recta**

$t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$**? ¿Cuál es ese plano del haz?**

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s:

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a + 11b = 0 \quad \to \quad a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \quad \to \quad -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \quad \to \quad k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \quad \to \quad k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \quad \rightarrow \quad (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \quad \rightarrow \quad -2x + 10 = 3y + 3 \quad \rightarrow \quad -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \rightarrow \quad x - 5 = 3z - 9 \quad \rightarrow \quad x - 3z + 4 = 0$$

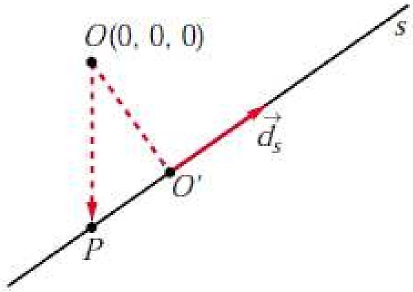
$$s: \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \to \quad 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \quad \to \quad 14\lambda + 20 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego: $O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$