EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Ejercicio 1.-

Discute y resuelve:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{l} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right.$$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}}_{A}\ \begin{array}{|c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible.*

- **Si $a = -3/4$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}}_{A}\ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible.*

- **Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$** → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nº incógnitas* = 3, el sistema es *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

www.yoquieroaprobar.es

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solución: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}$, $y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$, $z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$ with $\underbrace{}_{A}$ under the first two columns

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \;\to\; k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- **Si $k = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\}$ Sumando: $3x = 15 \;\to\; x = 5;\quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$

Solución: $x = 5,\ y = -3$

- **Si $k = 5/3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

www.yoquieroaprobar.es

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x - y &= 13 \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \rightarrow x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \frac{11}{2}$, $y = \frac{-23}{6}$

- **Si** $k \neq 2$ **y** $k \neq 5/3$ → $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema es *incompatible*.

Ejercicio 2.-

Discute y resuelve, en función del parámetro a, **el siguiente sistema de ecuaciones:** $\begin{cases} (a-1)x + \quad\quad y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x + \quad\quad\quad y &= 0 \\ (a-1)x + (a+1)y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

- **Si** $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \; y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda$, $y = \lambda$

- **Si** $a = 1$, queda:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda$, $y = 0$

- **Si** $a \neq 0$ **y** $a \neq 1$ → $ran\,(A) = 2$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 3.-

Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Ejercicio 4.-

Escribe en forma matricial los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = -1 \\ x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 3y + t = 1 \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.-

Escribe en la forma habitual estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{b) } \left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x - y &= 0 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 6.-

Estudia la compatibilidad de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \;\rightarrow\; x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\} \textit{Solución: } (1, -5)$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$.

www.yoquieroaprobar.es

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\to\; ran\ (A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\to\; ran\ (A') = 2 \neq ran\ (A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + \ \ y - z = 6 \end{array}\right\}\ A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{array}}_{A}\ \begin{array}{|c} 3 \\ 0 \\ 6 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Luego $ran\ (A') = 2 = ran\ (A) <$ *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - z = 3 - 3y \\ -x + z = 5y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando: } x = 3 + 2y \\ z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7y \end{array}$$

Soluciones: $x = 3 + 2\lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = 3 + 7\lambda$

www.yoquieroaprobar.es

d) $$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\; + z = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right.\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego, *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\; + z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \quad\; = 3 - z \end{array} \left\} \begin{array}{l} x = \dfrac{3 - z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array} \right\} \text{Hacemos } z = 3\lambda$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = 3\lambda$

e) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ \quad\;\; y + z = -1 \\ 2x + 3y \quad\; = 0 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right.\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la cuarta ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

www.yoquieroaprobar.es

f) $\left.\begin{array}{r} x+3y+\ \ z=-1\\ x-\ \ y-\ \ z=-1\\ 2x+\ \ y+3z=\ \ 5\end{array}\right\}\ A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&3&1\\1&-1&-1\\2&1&3\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}-1\\-1\\5\end{matrix}\right.\right)$

Como $|A|=-14\neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1&3&1\\-1&-1&-1\\5&1&3\end{vmatrix}}{-14}=\frac{0}{-14}=0;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-1&-1\\2&5&3\end{vmatrix}}{-14}=\frac{14}{-14}=-1;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&3&-1\\1&-1&-1\\2&1&5\end{vmatrix}}{-14}=\frac{-28}{-14}=2$$

Solución: $x=0,\ \ y=-1,\ \ z=2$

Ejercicio 7.-

Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{array}{l} 8x+14y=\ \ 2\\ 3x-\ \ 5y=11\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ x-y+z=1\\ -x+y+z=1\end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} 3x-\ \ y\qquad\ \ =\ \ 2\\ 2x+\ \ y+\ \ z=\ \ 0\\ \qquad 3y+2z=-1\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 8x+14y=\ \ 2\\ 3x-\ \ 5y=11\end{array}\right\}\ A'=\begin{pmatrix}8&14&2\\3&-5&11\end{pmatrix}\ \to\ |A|=-82\neq 0$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&14\\11&-5\end{vmatrix}}{-82}=\frac{-164}{-82}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}8&2\\3&11\end{vmatrix}}{-82}=\frac{82}{-82}=-1$$

Solución: $x=2,\ \ y=-1$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ x-y+z=1\\ -x+y+z=1\end{array}\right\}\ A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.\right)\ \to\ |A|=-4\neq 0$

www.yoquieroaprobar.es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Solución: $x = 1, \ y = 1, \ z = 1$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \ A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} \ \middle| \ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right) \rightarrow |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

Ejercicio 8.-

Estudia y resuelve los sistemas, cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

www.yoquieroaprobar.es

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \left|\begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego, *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 9.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \cdot X = B$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow$$

$$\rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\to\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\to$$

$$\to\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1, \; y = 2, \; z = -2$

Ejercicio 10.-

Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + \;\; y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right); \quad |A'| = 6 - 7a = 0 \;\to\; a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, $ran\,(A) = ran\,(A')$ → *Sistema compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $ran\,(A) \neq ran\,(A')$ → *Sistema incompatible.*

Ejercicio 11.-

Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:

a) $X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{a) } X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

Como $|A| = -7 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$X \cdot A = I \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1}$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto: $X = \dfrac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1}. La ecuación *no* tiene solución.

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 12.-

Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Luego, existe A^{-1} para cualquier valor de a. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Solo existe A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2a} & \dfrac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \to \quad |A| = (a-2)\,a \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 2$

Existe A^{-1} solo cuando $a \neq 0$ y $a \neq 2$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio 13.-

Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 4 \\ m \\ 2 \end{array}\right.\right)$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

- **Si $m = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{ Contradictorias } \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible}.$$

- **Si $m = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \text{ Contradictorias } \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible}.$$

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado.*

b)

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{1 \quad m \quad 1}}_{A}$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ Contradictorias } \rightarrow \text{ El sistema es } \textit{incompatible}.$$

- **Si $m = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right). \text{ Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales.}$$

$$\underbrace{\hphantom{1 \quad 2 \quad 1}}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → *ran* (A') = *ran* (A) = 2 < *nº incógnitas*

El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado.*

c)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{2 \quad 3 \quad 4}}_{A}$$

www.yoquieroaprobar.es

$|A| = -2m + 2 = 0 \quad \to \quad m = 1$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

entonces: *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$**, queda: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. Sistema *compatible determinado.*

d)
$$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \to \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

- **Si $m = 3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ Contradictorias } \to \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \end{array}\right). \text{ La 1ª y la 3ª fila son iguales.}$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$** → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. Sistema *compatible determinado.*

www.yoquieroaprobar.es

e) $$\left.\begin{array}{rl} x \qquad\; + 2z = & 3 \\ 3x + y + \quad z = & -1 \\ 2y - \quad z = & -2 \\ x - y + mz = & -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} = \overset{\text{FILAS}}{\begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} - 3 \cdot \text{1ª} \\ \text{3ª} \\ \text{4ª} - \text{1ª} \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} = \overset{\text{FILAS}}{\begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} - 2 \cdot \text{1ª} \\ \text{3ª} + \text{1ª} \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) =$$

$$= 18(-m-2) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = 3$

- **Si $m = -2$** → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado.*

- **Si $m \neq -2$** → *ran* (*A'*) = 4 ≠ *ran* (*A*) = 3. Sistema *incompatible.*

f) $$\left.\begin{array}{rl} (1+m)x + \quad y + \qquad z = & 1 \\ x + (1+m)y + \qquad z = & m \\ x + \quad y + (1+m)z = & m^2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} 1 \\ m \\ m^2 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = m^3 + 3m^2 = m^2(m+3) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

- **Si $m = 0$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es *incompatible*. (La 1ª ecuación contradice las otras).

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{cc:c|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ \hdashline 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$

Además, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow ran\ (A') = 3$

Luego el sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 0$ y $m \neq -3$** → $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*.

Ejercicio 14.-

Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\}$ $A = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ \hdashline 3 & -4 & -a \end{array}\right)$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\ (A) = ran\ (A')$.

$$|A| = -5a - 25 = 0 \rightarrow a = -5$$

- **Si $a = -5$** → Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq -5$** → Solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

www.yoquieroaprobar.es

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que *ran* (A) = *ran* (A').

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} a = -3 \\ a = \ \ 2 \end{array}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = -3}$ **o** $\boldsymbol{a = 2}$ → Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -3}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 2}$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 3. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

c) $$\left.\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que *ran* (A) = *ran* (A').

$$|A| = -2a - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-5}{2}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = -\frac{5}{2}}$ → Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -\frac{5}{2}}$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 3. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

d) $$\left.\begin{array}{l} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y + az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3a - 46 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{46}{3}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = \frac{46}{3}}$ → Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq \frac{46}{3}}$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 3. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 15.-

Determina los valores de m para los cuales son incompatibles estos sistemas:

$$\text{a)}\ \begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} (m+1)\,x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)\,y + 3z = 0 \\ (m+1)\,x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & -1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix} m \\ m \\ -1 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = -m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2 = 0 \quad \to \quad m = -1$$

- **Si $m = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias. El sistema es } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m \neq -1$,** es compatible determinado, pues *ran* (A) = *ran* (A') = 3.
- Por tanto, solo es incompatible para $m = -1$.

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{r} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} (m+1) & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = -m^3 - m^2 + 6m = -m(m-2)(m+3) = 0 \begin{array}{l} \nearrow m = 0 \\ \rightarrow m = 2 \\ \searrow m = -3 \end{array}$$

- **Si $m = 0$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right) \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces: *ran* (A) = *ran* (A') = 2 → *Compatible indeterminado.*

www.yoquieroaprobar.es

- **Si $m = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ Contradictorias } \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \end{array}\right) \text{ Como } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -45,$$

entonces: $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$ → Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 0$, $m \neq 2$ y $m \neq -3$** → Sistema *compatible determinado*, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

Por tanto, es incompatible para $m = 2$ y para $m = -3$.

c) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} m-4 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2 - 2m - 15 = 0 \rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{array}{l} m = 5 \\ m = -3 \end{array}$$

- **Si $m = 5$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$; el sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} -7 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 72,$$

entonces $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

- **Si $m \neq 5$ y $m \neq -3$** → Sistema *compatible determinado*, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

Por tanto, es incompatible solo para $m = -3$.

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 16.-

¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} (a+1)x+2y+z=a+3 \\ ax+y=a \\ ax+3y+z=a+2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\}$ $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$, with the first three columns marked $\underbrace{}_{A}$

$$|A|=9a+27=0 \rightarrow a=-3$$

- **Si $a=-3$,** queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=20$, entonces:

ran (A) = 2 ≠ *ran* (A′) = 3 → El sistema es *incompatible.*

- **Si $a=-3$** → *ran* (A) = *ran* (A′) = 3 → *Compatible determinado.*

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$ $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$, with the first three columns marked $\underbrace{}_{A}$

$$|A|=-a^2+3a-2=0 \rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2} \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

- **Si $a=1$,** queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Contradictorias. El sistema es *incompatible.*

www.yoquieroaprobar.es

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 1 \end{array}\right)$$

. Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

luego, *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$** → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$ → *Compatible determinado.*

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

c) $$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + \ \ y \qquad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 3 & 1 & a+2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$$

$|A| = a + 1 = 0$ → $a = -1$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

. La primera fila es la tercera menos la segunda.

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; luego, *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -1$** → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$ → *Compatible determinado.*

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = -1$.

Ejercicio 17.-

Discute y resuelve según los valores de m: $\begin{cases} mx + \ \ y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} mx + \ \ y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{cc c} m & 1 & 2 - 2m \\ 1 & m & m - 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad}_{A}$$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{array}{l} \nearrow m = \ \ 1 \\ \searrow m = -1 \end{array}$$

www.yoquieroaprobar.es

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x + y = 0 \;\rightarrow\; y = x$. *Soluciones:* $x = \lambda,\; y = -\lambda$

- **Si $m = -1$,** queda:

$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2m & 1 \\ m-1 & m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{-2m^2+m+1}{m^2-1} = \frac{(-2m-1)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{-2m-1}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2-2m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m^2+m-2}{m^2-1} = \frac{(m+2)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+2}{m+1}$$

Solución: $x = \dfrac{-2m-1}{m+1};\; y = \dfrac{m+2}{m+1}$

Ejercicio 18.-

Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.***

$$AXB = C \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1$ $\rightarrow$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 19.-

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB+CX=D$.

$$AB+CX=D \;\rightarrow\; CX=D-AB \;\rightarrow\; X=C^{-1}\cdot(D-AB)$$

- Calculamos C^{-1} ($|C|=-2\neq 0 \;\rightarrow\;$ existe C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(C) \longrightarrow (Adj(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj(C))^t$$

$$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}=C^{-1}$$

- Calculamos $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 20.-

Resuelve la ecuación: $\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}7\\ -2\\ -1\end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos A^{-1} ($|A|=16\neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\-5&7&2\\-5&-9&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1&2\\5&7&-2\\-5&9&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Por tanto:

$$A\cdot X=B\;\rightarrow\;X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}16\\-16\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; es decir: $x=1,\; y=-1,\; z=1$

Ejercicio 21.-

Discute y resuelve, según los diferentes valores del parámetro a, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l}ax+7y+20z=1\\ax+8y+23z=1\\x\quad\;\;-\;az=1\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ax\qquad\;=2\\\quad ay+2z=0\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l}ax+7y+20z=1\\ax+8y+23z=1\\x\quad\;\;-\;az=1\end{array}\right\}$ $A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}a&7&20\\a&8&23\\1&0&-a\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.\right)$ $\quad |A|=1-a^2=0\left\langle\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$

- **Si $a=1$**, queda:

$A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&7&20\\1&8&23\\1&0&-1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.\right)$. Observamos que la 1ª y la 3ª columna son iguales.

Además, $\begin{vmatrix}1&8\\1&0\end{vmatrix}=-8\neq0$; luego, $ran\,(A)=ran\,(A')=2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 1ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}x+8y=1-23z\\x\qquad=1+\;\;z\end{array}\right\}\;8y=1-23z-1-z=-24z\;\rightarrow\;y=-3z$$

Soluciones: $(1+\lambda,\,-3\lambda,\,\lambda)$

www.yoquieroaprobar.es

- **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & 7 & 20 \\ -1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Luego, $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = n^{o}$ *incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 + a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{3 - 3a}{1 - a^2} = \frac{3(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{3}{1 + a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a - 1}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-1}{1 + a}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{1 + a}$, $y = \dfrac{3}{1 + a}$, $z = \dfrac{-1}{1 + a}$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax \quad\quad &= 2 \\ ay + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = -a(2 - a) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$ Sistema **incompatible** (la 2ª ecuación es imposible).

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right).$$ La 1ª y la 3ª columna son iguales.

www.yoquieroaprobar.es

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; luego, *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x \qquad\quad\ \ = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - x - z = -z \end{array}\right\} \textit{Soluciones: } (1, -\lambda, \lambda)$$

- **Si** $a \neq 0$ **y** $a \neq 2$ → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{-2(2-a)}{-a(2-a)} = \frac{2}{a}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{2(2-a)}{-a(2-a)} = \frac{-2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{-a(2-a)}{-a(2-a)} = 1; \qquad \textit{Solución: } x = \frac{2}{a},\ y = \frac{-2}{a},\ z = 1$$

Ejercicio 22.-

Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ a-2 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

- **Si** $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right.\right).$$ La 1ª y la 3ª fila son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$; luego, *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas*.

www.yoquieroaprobar.es

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3ª ecuación (puesto que es igual que la 1ª):

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y+6z=0\\2x+2y+4z=2\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x+y+3z=0\\x+y+2z=1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}y+3z=-x\\y+2z=1-x\end{array}\right\}\quad\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-x&3\\1-x&2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{x-3}{-1}=3-x;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&-x\\1&1-x\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Soluciones: $x=\lambda,\ y=3-\lambda,\ z=-1$

- **Si $a=-2$,** queda:

$$A'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}-2&2&6&0\\2&-2&4&2\\2&-2&6&-4\end{array}\right)}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix}2&6\\-2&4\end{vmatrix}=20$ y $\begin{vmatrix}2&6&0\\-2&4&2\\-2&6&-4\end{vmatrix}=-128\neq 0$, entonces $ran\,(A)=2\neq ran\,(A')=3$.

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a\neq 2$ y $a\neq -2$** → $ran\,(A)=ran\,(A')=3=$ *nº incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

Ejercicio 23.-

Averigua los valores de α para los cuales admiten infinitas soluciones los sistemas siguientes. Obtén todas las soluciones e interpreta geométricamente los resultados obtenidos:

a) $\left\{\begin{array}{l}x+y+2z=3\\x+2y+\alpha z=5\\2x+y-3z=4\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l}\alpha x-y=1\\x-\alpha y=2\alpha-1\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l}x+y+2z=3\\x+2y+\alpha z=5\\2x+y-3z=4\end{array}\right\}\quad A'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\1&2&\alpha&5\\2&1&-3&4\end{array}\right)}_{A}\qquad |A|=\alpha-9=0\ \rightarrow\ \alpha=9$

- **Si $\alpha=9$,** queda:

$A'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&3\\1&2&9&5\\2&1&-3&4\end{array}\right)}_{A}$. Como $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$ y $\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&5\\2&1&4\end{vmatrix}=0$, entonces:

www.yoquieroaprobar.es

ran (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 3 - 2z \\ x + 2y = 5 - 9z \end{array}\right\} \ x = \frac{\begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 5-9z & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 5z; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 1 & 5-9z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 7z$$

Soluciones: $x = 1 + 5\lambda, \ y = 2 - 7\lambda, \ z = \lambda$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en una recta.

- **Si** $\alpha \neq 9$ → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & \alpha \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \frac{\alpha - 9}{\alpha - 9} = 1; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & \alpha \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \frac{2\alpha - 18}{\alpha - 9} = \frac{2(\alpha - 9)}{\alpha - 9} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \frac{0}{\alpha - 9} = 0.$$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 0$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en el punto (1, 2, 0).

b) $$\left.\begin{array}{l} \alpha x - \ \ y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{matrix}}_{A} \ \middle| \ \begin{matrix} 1 \\ 2\alpha - 1 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = -\alpha^2 + 1 = 0 \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

- **Si** $\alpha = 1$, queda:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x - y = 1$ → $x = 1 + y$. *Soluciones:* $x = 1 + \lambda, \ y = \lambda$.

Geométricamente son rectas coincidentes (se trata de la misma recta).

www.yoquieroaprobar.es

- **Si** $\alpha = -1$, queda:

$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible.*

Geométricamente, son dos rectas paralelas.

- **Si** $\alpha \neq 1$ **y** $\alpha \neq -1$ → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\alpha - 1 & -\alpha \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha - 1}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-1}{1 + \alpha}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Solución: $x = \dfrac{-1}{1 + \alpha}$; $y = \dfrac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$

Geométricamente son dos rectas que se cortan en un punto.

Ejercicio 24.-

Discute la compatibilidad del siguiente sistema según los diversos valores de λ y resuélvelo para $\lambda = -1$ y para $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} \lambda \\ 2 \\ \lambda \end{matrix}\right.\right)$$

$|A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$

- **Si** $\lambda = -1$, queda:

$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}\right.\right)$. La 1ª y la 3ª ecuación son iguales.

www.yoquieroaprobar.es

Como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{l} -x-y=-1-2z \\ 2x-y=\;\;2+\;\;z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=1+2z \\ 2x-y=2+\;\;z \end{array}\right\} \text{ Sumando: } 3x = 3+3z \;\to\; x = 1+z$$

$y = 1+2z-x = 1+2z-1-z = z$

Soluciones: $x = 1+\lambda,\; y = \lambda,\; z = \lambda$

- **Si $\lambda \neq -1$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = n^{\underline{o}}$ *incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos para el caso en que $\lambda = \mathbf{2}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \qquad \textit{Solución: } x = \frac{2}{3},\; y = \frac{2}{3},\; z = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 25.-

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?

b) Calcula A^{-1} cuando exista.

c) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

a) $|A| = b$ será el seno de algún número real cuando $-1 \leq b \leq 1$.

b) Existirá A^{-1} cuando $|A| \neq 0$, es decir, cuando $b \neq 0$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} \to \begin{cases} a = -\dfrac{a}{b} \to ab + a = 0 \to a(b+1) = 0 \\ b = \dfrac{1}{b} \to b^2 = 1 \begin{cases} b = \;\;1 \to a = 0 \\ b = -1 \to a \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

$$A = A^{-1} \text{ cuando } \begin{cases} \bullet\; a = 0 \text{ y } b = 1 \;\to\; (0,\, 1) \\ \bullet\; b = -1 \text{ y } a \text{ cualquier número real} \;\to\; (a,\, -1) \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 26.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real:

a) Encuentra los valores de λ para los que AB es invertible.

b) Determina los valores de λ para los que BA es invertible.

c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$A \cdot B$ es invertible cuando $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\lambda \neq -2$.

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda - 3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$|B \cdot A| = 0 \quad \rightarrow \quad B \cdot A$ no es invertible.

c) $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema es compatible indeterminado, para cualquier valor de a y b. Por tanto, no puede ser compatible determinado.

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 27.-

Dado el sistema: $S: \begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \qquad + \qquad z = \beta \\ x \qquad - \qquad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$

a) Demuestra que es compatible determinado para cualquier valor de α y β.

b) Resuélvelo para $\alpha = \beta = 1$.

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \qquad + \quad z = \beta \\ x \qquad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix} \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) Si $\alpha = \beta = 1$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right)$, con $|A| = -2$. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}. \quad \textit{Solución: } x = \frac{-1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 28.-

El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3.

¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que $ran\ (A) = ran\ (A') =$ $= n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. El sistema sería compatible determinado. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial (0, 0, 0).

---

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 29.-

El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

Ejercicio 29.-

¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

Ejercicio 30.-

Dadas estas ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido para añadir la ecuación.

a) Por ejemplo, $3x - 2y + z = 1$ contradice la 1ª ecuación; luego, si añadimos esta ecuación, el sistema obtenido sería incompatible.

b) Por ejemplo, si añadimos la ecuación $y = 0$, como

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$ el sistema sería compatible determinado.

Ejercicio 31.-

¿Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones lineal homogéneo no tenga solución? ¿Puede ocurrir que tenga infinitas soluciones? Razona las respuestas.

Un sistema homogéneo siempre tiene, al menos, la solución trivial (0, 0, 0). Además, *ran* (A) = *ran* (A'); luego, siempre es compatible. Si *ran* (A) = *nº incógnitas*, entonces solo tendría la solución trivial; y, si *ran* (A) < *nº incógnitas*, sería compatible indeterminado, es decir, tendría infinitas soluciones.

Ejercicio 32.-

www.yoquieroaprobar.es

En general, ¿qué relación existe entre el determinante de una matriz A, de orden 3×3, y el determinante de la matriz formada por sus adjuntos? Para demostrarlo, ten en cuenta que: $|A \cdot B| = |A|\ |B|$ y la expresión de A^{-1}.

- Sabemos que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$|A_{ij}| = |A_{ji}|\ .$$

- Por otra parte, tenemos que (suponemos que existe A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| = |A^{-1}|$$

- También sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \rightarrow \quad |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Uniendo las dos igualdades obtenidas, tenemos que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \quad \rightarrow \quad |A_{ij}| = |A|^2 \ \ (A \text{ de orden } 3 \times 3)$$

www.yoquieroaprobar.es