SUCESIONES Y LIMITES

DEFINICIÓN DE "SUCESIÓN"

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero,....

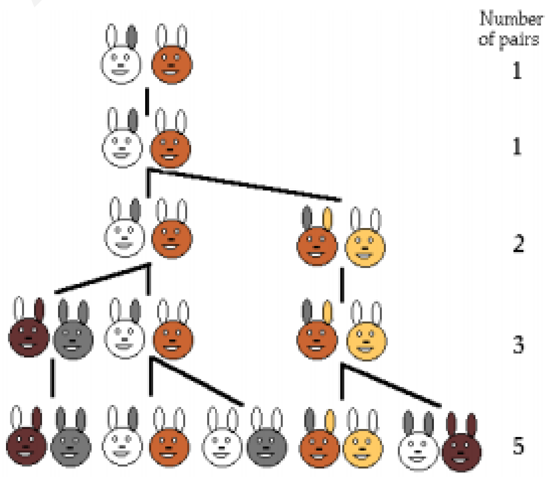
Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Ejemplo histórico: **la sucesión de Fibonacci:**

"Alguien puso en un corral una pareja de conejos recién nacidos con el propósito de averiguar cuántas parejas habrá al cabo de un año. La prolífica naturaleza de estos animalitos indica que cada pareja recién nacida requiere un mes de maduración, durante el cual no se reproduce, pero al finalizar el segundo mes da a luz una nueva pareja, y luego sigue pariendo cada mes otra pareja. ¿Cuántas parejas habrá al término de un año, suponiendo que ningún conejo muere en esta feliz experiencia?"

La solución que dio Fibonacci fue que **cada mes habría las mismas parejas de conejos que ya había el mes anterior (se suponía que no había muerto ninguno) más un número nuevo de parejas igual al número de parejas fértiles, que son las que ya había 2 meses antes.** Si escribimos una serie con el número de parejas que hay cada mes, obtenemos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144……....

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).
Esta secuencia recibe el nombre de sucesión de Fibonacci, y cada número es un número de Fibonacci, que resulta de sumar los dos números anteriores.



TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN

Se llama **término general** de una sucesión, y se simboliza con $\mathbf{a_n}$, al término que representa uno cualquiera de ella.

- Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula: $a_n = f(n)$. Dándole a n un cierto valor natural, se obtiene el término correspondiente.

  - $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$; es decir, $a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$
  - $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ es decir, $a_n = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1.$
  - $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\}$; es decir, $a_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 0.$

Sin embargo, en algunos casos la sucesión se define o bien por comprensión o bien por recurrencia; esta última significa que el término general a_n se define en función de uno o varios términos anteriores.

- La sucesión formada por la unidad y los números primos. No es posible escribir a_n en función de n: $\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$.
- $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$; que da la conocida sucesión de Fibonacci donde cada término es la suma de los dos anteriores: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots\}$

EJERCICIO 1:

Describe el criterio con el que se forman estas sucesiones y añade tres términos a cada una:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$

c) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$

d) $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

e) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6}, \; a_7 = \frac{1}{7}, \; a_8 = \frac{1}{8}$$

b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}$, $a_7 = \sqrt{7}$, $a_8 = \sqrt{8}$

c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37$, $a_7 = 50$, $a_8 = 65$

d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35$, $a_7 = 48$, $a_8 = 63$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21$, $a_7 = 28$, $a_8 = 36$

EJERCICIO 2:

Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \dfrac{2}{10^n}$

b) $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = \dfrac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$

e) $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

f) $f_n = \dfrac{(-1)^n n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \dfrac{3}{2}$; $b_3 = \dfrac{8}{3}$; $b_4 = \dfrac{15}{4}$; $b_5 = \dfrac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \dfrac{5}{3}$; $c_3 = 2$; $c_4 = \dfrac{11}{5}$; $c_5 = \dfrac{7}{3}$

d) $d_1 = \dfrac{1}{2}$; $d_2 = \dfrac{1}{4}$; $d_3 = \dfrac{1}{8}$; $d_4 = \dfrac{1}{16}$; $d_5 = \dfrac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

EJERCICIO 3:

Escribe el término general de estas sucesiones:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

b) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots$

c) $0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{10}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{24}{26}, \ldots$

d) $5{,}1; 5{,}01; 5{,}001; 5{,}0001; \ldots$

a) $a_n = \dfrac{n}{n - 1}$

b) $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) $c_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

d) $d_n = 5 + \dfrac{1}{10^n}$

EJERCICIO 4:

Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:

a) $a_1 = 0 \qquad a_2 = 2 \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \ldots$ b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \ldots$

Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:

a) $4, 7, 3, -4, -7, \ldots$ **b)** $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4, a_2 = 7, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2, b_2 = 3, b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

EJERCICIO 5 : **Si el término general de una sucesión es** $a_n = \dfrac{n^2 + 10}{n+2}$

a) Halla el término segundo y el décimo.
b) ¿Hay algún término que valga 5? Si hay decir que lugar ocupa en la sucesión.
c) ¿Hay algún término que valga 7? Si hay decir que lugar ocupa en la sucesión.

Solución:

a) $a_2 = \dfrac{2^2 + 10}{2+2} = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$; $\qquad a_{10} = \dfrac{10^2 + 10}{10+2} = \dfrac{110}{12} = \dfrac{55}{6}$

b) $a_n = \dfrac{n^2 + 10}{n+2} = 5 \Rightarrow n^2 + 10 = 5n + 10 \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow n = 0$ ó $n = 5$

Como n tiene que ser un número natural positivo $\Rightarrow n = 5 \Rightarrow$ El quinto término de la sucesión.

b) $a_n = \dfrac{n^2 + 10}{n+2} = 7 \Rightarrow n^2 + 10 = 7n + 14 \Rightarrow n^2 - 7n - 4 = 0 \Rightarrow n = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+16}}{2}$

Como n tiene que ser un número natural positivo $\Rightarrow$ No existe ningún término que valga 7.

ALGUNAS SUCESIONES IMPORTANTES

1.- Progresiones Aritméticas

Definición: Una progresión aritmética es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando una cantidad fija, llamada **diferencia** de la progresión.

Término general, a_n, de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene así: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Suma de los n-primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

EJERCICIO 6:

De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; ...

b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; ...

c) 1, 2, 4, 7, 11, ...

d) 14, 13, 11, 8, 4, ...

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

EJERCICIO 7:

De las sucesiones siguientes, indica cuáles son progresiones aritméticas:

a) $a_n = 3n$

b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = \dfrac{8-3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \dfrac{n}{2}$

f) $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = \dfrac{1}{2},\ c_3 = \dfrac{1}{3},\ c_4 = \dfrac{1}{4},\ \ldots$

$c_2 - c_1 = \dfrac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \dfrac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \dfrac{8-3n}{4} - \dfrac{8-3(n-1)}{4} = \dfrac{8-3n-8+3n-3}{4} = \dfrac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \dfrac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \dfrac{n}{2} - \left(5 + \dfrac{n-1}{2}\right) = 5 + \dfrac{n}{2} - 5 - \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \dfrac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

EJERCICIO 8

Calcula los términos a_{10} y a_{100} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) –4, –2, 0, 2, 4, …

b) 2, –3, –8, –13, –18, …

c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots$

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

c) $a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$

EJERCICIO 9

Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 3, 6, 9, 12, 15, …

b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …

c) $c_n = 4n - 2$

d) $d_n = \frac{1 - 2n}{2}$

a) $a_1 = 3;\ a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5;\ b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2;\ c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1\,250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2};\ d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

2.- Progresiones Geométricas

Definición: Una progresión geométrica es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por una cantidad fija, llamada **razón** de la progresión.

Término general, a_n, de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene así: $a_n = a_1 . r^{n-1}$

Suma de los n-primeros términos de una progresión geométrica con $r \neq 1$ es:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_n . r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 . r^n - a_1}{r - 1}$$

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica en la que $|r| < 1$ es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

EJERCICIO 10

De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y también su término general.

a) 32, 16, 8, 4, 2, …

b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …

c) 1, 4, 9, 16, 25, …

d) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, …

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36,\ b_7 = 49,\ b_8 = 64,\ b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$$c_6 = 0{,}00001;\ c_7 = 0{,}000001;\ c_8 = 0{,}0000001;\ c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$$d_6 = 8;\ d_7 = 8\sqrt{2};\ d_8 = 16;\ d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n.$$

EJERCICIO 11

Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:

a) $a_1 = 32,\ r = \frac{1}{2}$ **b)** $a_1 = 10,\ r = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = 2^{-10},\ r = 2$ **d)** $a_1 = -5,\ r = -\frac{1}{4}$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r - 1}, \quad S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

a) $S_{25} = \dfrac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64 \qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{32}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11{,}1 \approx \dfrac{100}{9} \qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11{,}1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2 - 1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\,768$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4 \qquad S_\infty = \dfrac{-5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

3.- Sucesiones de Potencias

Nos encontramos con frecuencia sucesiones del tipo $1^m, 2^m, 3^m, \ldots, n^m$ (Cuadrados, cubos, raíces). Son especialmente importantes:

- La suma de los n primeros cuadrados: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$
- La suma de los n primeros cubos: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2.(n+1)^2}{4}$

EJERCICIO 12

10. **Calcula:** $50^2 + 51^2 + \ldots + 60^2$

$$(1^2 + \ldots + 60^2) - (1^2 + \ldots + 49^2) = \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} =$$
$$= 73\,810 - 40\,425 = 33\,385$$

Halla la suma siguiente:

$$21^3 + 22^3 + 23^3 + \ldots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3$$

$$21^3 + \ldots + 40^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 20^3 + 21^3 + \ldots + 40^3) - (1^3 + \ldots + 20^3) =$$
$$= \frac{40^2 \cdot 41^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 672\,400 - 44\,100 = 628\,300$$

CÁCULO DEL TÉRMINO GENERAL DE ALGUNAS SUCESIONES “RECONOCIBLES”

EJERCICIO 13 **: Halla el término general de las siguientes sucesiones:**

a) $-1, 2, 5, 8, 11, \ldots$ **b)** $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ **c)** $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$ **d)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Solución:

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = -1$ y $d = 3$. Por tanto: $a_n = -1 + (n-1)\cdot 3 = -1 + 3n - 3 \rightarrow a_n = 3n - 4$

b) Es una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = -2$. Por tanto: $a_n = 1\cdot(-2)^{n-1} \rightarrow a_n = (-2)^{n-1}$

c) Es una progresión aritmética con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$. Por tanto : $a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} \rightarrow a_n = \frac{n}{2}$

d) Es una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$. Por tanto : $a_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

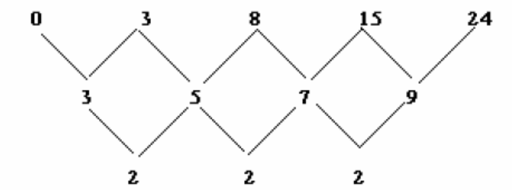
EJERCICIO 14 **: Encuentra el término general de las siguientes sucesiones:**

a) $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$ **b)** $\frac{2}{5}, \frac{4}{6}, \frac{8}{7}, \frac{16}{8}, \frac{32}{9}, \ldots$ **c)** $2, 9, 28, 65, 126, \ldots$

d) $-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ **e)** $1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}, 3, \ldots$ **f)** $-2\,;\ -0{,}5\,;\ 1;\ 2{,}5\,;\ 4\,;\ldots$

Solución:

a) No es aritmética ni geométrica: Restando a cada uno el anterior (2 pasos hasta que se repite)



$\Rightarrow$ Grado 2 $\Rightarrow S_n = an^2 + bn + c$

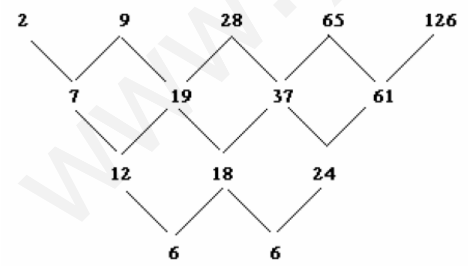
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=8 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3a+b=3 \\ 5a+b=5 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \{2a=2$$

$a = 1$; $3.1 + b = 3 \Rightarrow b = 0$; $1 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow S_n = n^2 - 1$

b) Numerador: Geométrica de $r = 2 \Rightarrow a_n = a_1.r^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$

Denominador: Aritmética de $d = 1 \Rightarrow b_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)1 = 5 + n - 1 = 4 + n$ $\qquad b_n = \frac{2^n}{n+4}$

c) No es aritmética ni geométrica: Restando a cada uno el anterior (3 pasos hasta que se repite)



$\Rightarrow$ Grado 3 $\Rightarrow S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=9 \\ 27a+9b+3c+d=28 \\ 64a+16b+4c+d=65 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \begin{cases} 7a+3b+c=7 \\ 19a+5b+c=19 \\ 37a+7b+c=37 \end{cases} \underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \begin{cases} 12a+2b=12 \\ 18a+2b=18 \end{cases}$$

$$\underset{\text{Restando a cada ecuación la anterior}}{\Rightarrow} \{6a=6$$

$a = 1$; $12.1 + 2b = 12 \Rightarrow b = 0$; $7.1 + 3.0 + c = 7 \Rightarrow c = 0$; $1 + 0 + 0 + d = 2 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow S_n = n^3 + 1$

d) Alternancia de signos $(-1)^n$

Numerador: Aritmética $d = 1 \Rightarrow a_n = 3 + (n-1).1 = n + 2$ $\qquad S_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$

Denominador: Aritmética de $= 1 \Rightarrow b_n = 2 + (n-1).1 = n + 1$

e) $\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \ldots$

Alternancia de signos $(-1)^{n+1}$ $\qquad S_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{2}$

Numerador: Aritmética $d = 1 \Rightarrow a_n = 2 + (n-1).1 = n + 1$

Denominador: Constante $\Rightarrow b_n = 2$

f) Es una progresión aritmética con $a_1 = -2$ y $d = 1{,}5$. Por tanto:

$$a_n = -2 + (n-1)\cdot 1{,}5 = -2 + 1{,}5n - 1{,}5 = 1{,}5n - 3{,}5 \;\Rightarrow\; a_n = 1{,}5n - 3{,}5$$

EJERCICIO 15 **: Halla el criterio de formación de las siguientes sucesiones recurrentes:**

a) 3, 4, 12, 48, 576, 27 648,... **b) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...**

c) 1, 5, 4, –1, –5, –4, 1, 5,... **d) 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8 192,...**

e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81,...

Solución:

a) A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$a_1 = 3 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_n = a_{n-1}\cdot a_{n-2}$ para $n > 2$

b) A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$

c) A partir del tercero, cada término se obtiene restando los dos anteriores:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 5 \quad , \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

d) A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_n = a_{n-1}\cdot a_{n-2}$ para $n > 2$

e) A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores:

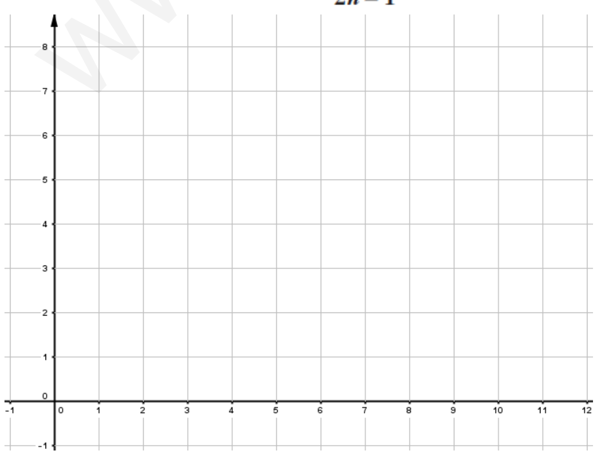
$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 5 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$

REPRESENTACIÓN DE UNA SUCESIÓN

Una forma de representar gráficamente las sucesiones reales es como funciones, es decir, como **pares ordenados (n, a_n)**, lo que puede ser útil en ocasiones para el estudio de sus propiedades. En el eje de abcisas se representan los números naturales n y en el eje de ordenadas los valores reales a_n. Dado que la variable n solo admite valores naturales, la representación gráfica se visualizará, entonces, como un conjunto de puntos aislados.

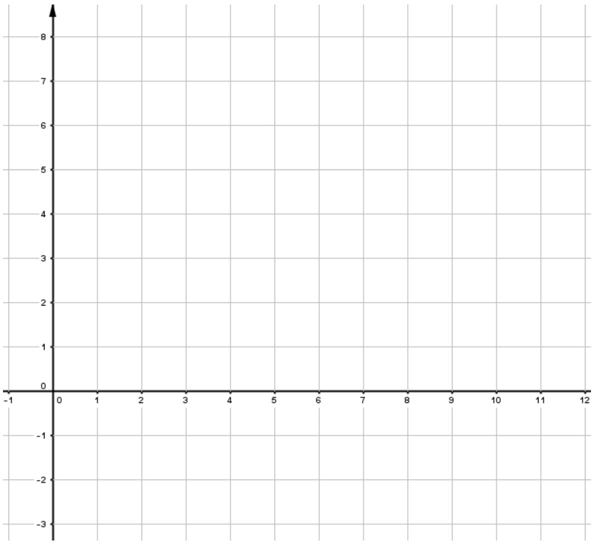
EJERCICIO 16

Representa la sucesión $a_n = \frac{4n+10}{2n-1}$



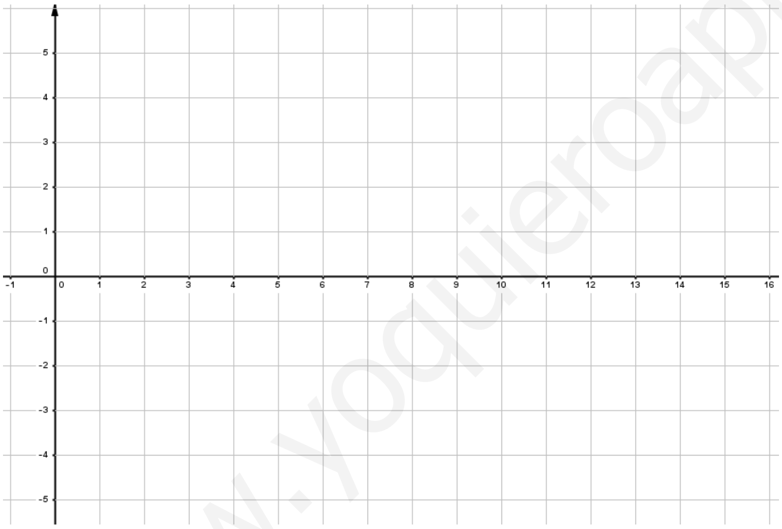
EJERCICIO 17

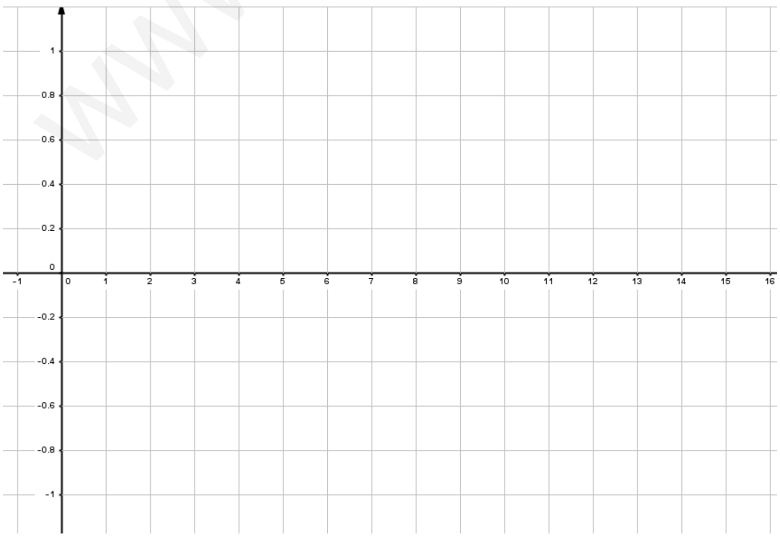
Representa la sucesión $b_n = \frac{n^2}{4} - 2n + 3$



c) $c_n = (-1)^n\, n$

d) $d_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$

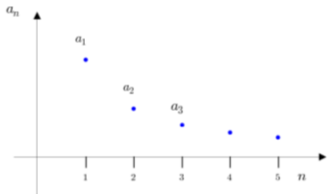


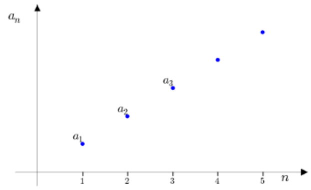


SUCESIONES MONÓTONAS

Definición Diremos que $\{a_n\}$ es :

- *monótona creciente* si, y sólo si, $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- *monótona decreciente* si, y sólo si, $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$





EJERCICIO 18

Estudiar la monotonía de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{2n-1}{n} \qquad b_n = \frac{8n}{1+2n} \qquad c_n = \frac{3n}{n+1} \qquad d_n = \frac{1}{n^3}$$

Solución:

a) Vamos a probar que los términos de esta sucesión verifican $a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que se trata de una sucesión monótona estrictamente creciente.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$$
$$= \frac{(2n+1)\cdot n - (n+1)(2n-1)}{(n+1)\cdot n} = \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{n} - \cancel{2n^2} - \cancel{n} + 1}{(n+1)\cdot n} = \frac{1}{(n+1)\cdot n} > 0$$

el carácter positivo del anterior cociente está garantizado porque n es un número natural.

b) En este caso vamos a demostrar que $b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual la sucesión será monótona creciente.

$$b_n \leq b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \leq \frac{8\cdot(n+1)}{1+2\cdot(n+1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \leq \frac{8n+8}{1+2n+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{8n} + \cancel{16n^2} + \cancel{16n} \leq \cancel{8n} + 8 + \cancel{16n^2} + \cancel{16n} \Leftrightarrow 0 \leq 8$$

lo cual es siempre cierto.

c) La sucesión dada es creciente, ya que $c_n \leq c_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pues

$$c_n \leq c_{n+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3\cdot(n+1)}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3n+3}{n+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{3n^2} + \cancel{6n} \leq \cancel{3n^2} + \cancel{3n} + \cancel{3n} + 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3$$

la expresión última a la cual hemos llegado es siempre cierta, luego la desigualdad inicial también lo es.

d) En este caso demostraremos que $d_n > d_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que la sucesión es monótona estrictamente decreciente.

$$d_n > d_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} > \frac{1}{(n+1)^3} \Leftrightarrow (n+1)^3 > n^3$$

esta desigualdad es cierta para cualquier número natural, luego se cumple siempre.

EJERCICIO 19 Determina si la sucesión $\left\{\frac{n!}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$ es monótona.

Solución: Primero calculamos algunos de los primeros términos para determinar si es monótona y en qué sentido:

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{4};\ a_3 = \frac{6}{8};\ a_4 = \frac{24}{16};$$

por lo que,

$$a_1 \leq a_2 < a_3 < a_4$$

y parece indicar que es monótona creciente. Para probarlo, debemos verificar que $a_n < a_{n+1}$, para todo n. Dado que todos los términos son positivos y que involucran factoriales y potencias vamos a probar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{n+1}{2} \geq 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

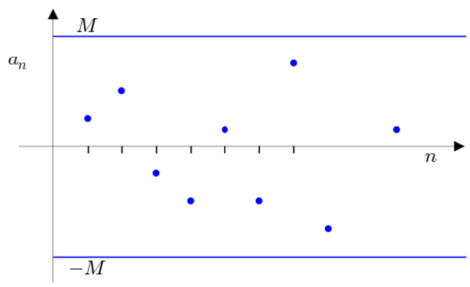
Queda así comprobado que $a_n < a_{n+1}$, para todo n, por lo que la sucesión resulta ser monótona creciente.

SUCESIONES ACOTADAS

Sea $\{a_n\}$ una sucesión real y $M \in \mathbb{R}$.

- Si $a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ diremos que $\{a_n\}$ está *acotada superiormente*. En este caso el número M se llama *cota superior*.
- Si $a_n \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ diremos que $\{a_n\}$ está *acotada inferiormente*. En este caso el número M se llama *cota inferior*.
- Diremos que $\{a_n\}$ está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a decir que
$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Gráficamente, una sucesión acotada es, pues, aquella cuyos términos se encuentran situados en una banda horizontal de anchura $2M$, como puede observarse



Sucesión acotada $|a_n| \leq M$

Ejemplo : Veamos algunos ejemplos de sucesiones acotadas.

- $\{\frac{1}{n}\}$ está acotada porque $|\frac{1}{n}| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{(-1)^{n+1}\}$ está acotada porque $|(-1)^{n+1}| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{n\}$ no está acotada superiormente.

LIMITE DE UNA SUCESIÓN

El límite de una sucesión es el **valor al que se van aproximando los términos de la sucesión, cuando se va avanzando en ella,** esto es, cuando n toma valores cada vez mayores.

- Si se acerca a un número, ℓ, decimos que: $a_n \to \ell$ ó bien $\lim a_n = \ell$
  Y se lee "a_n tiende a ℓ" o bien "El límite de a_n es ℓ"
- Si crece de modo que sus valores acaban superando a cualquier número, decimos que: $a_n \to +\infty$ ó bien $\lim a_n = +\infty$
  Y se lee "a_n tiende a $+\infty$" o bien "El límite de a_n es $+\infty$"
- Si decrece, tomando valores menores que cualquier número negativo por grande que sea su valor absoluto, diremos que: $a_n \to -\infty$ ó bien $\lim a_n = -\infty$
  Y se lee "a_n tiende a $-\infty$" o bien "El límite de a_n es $-\infty$"
- Existen otras sucesiones que no se comportan de ninguna de las tres formas anteriores y por tanto no tienen límite y se llaman oscilantes.

CLASIFICACIÓN DE LAS SUCESIONES SEGÚN SU LÍMITE

- Si tienen limite finito: **Convergentes**
- Si tienen límite infinito ($+\infty$ ó $-\infty$): **Divergentes**
- Si no tienen límite: **Oscilantes**

EJERCICIO 20

Con una calculadora, forma términos de las siguientes sucesiones y estudia a qué valores tienden.

a) $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$ **b)** $b_n = \dfrac{-3n}{n+1}$ **c)** $c_n = \dfrac{1}{5n}$

a) $a_1 = 1$ $a_2 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ $a_{10} = \dfrac{200}{101} = 1{,}98\ldots$ $a_{100} = \dfrac{20\,000}{10\,001} = 1{,}9998$

Se observa que tiende a 2.

b) $b_1 = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$ $b_{10} = -\dfrac{30}{11} = -2{,}757\ldots$ $b_{100} = -\dfrac{300}{101} = -2{,}97\ldots$ $b_{1000} = -\dfrac{3000}{1001} = -2{,}997\ldots$

Se observa que tiende a -3.

c) $c_1 = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ $c_2 = 0{,}1$ $c_{10} = 0{,}02$ $c_{100} = 0{,}002$ $c_{1000} = 0{,}0002$ $c_{10\,000} = 0{,}00002$

Se observa que tiende a 0.

Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$

c) $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{100} \approx 32{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83, \ldots$ $\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987, \ldots$ $\text{lím } b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 10^3, \ldots$ $\text{lím } c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999, \ldots$ $\text{lím } d_n = 5$

Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$

c) $c_n = (-1)^n\, n$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002, \ldots$ $\text{lím } a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962, \ldots$

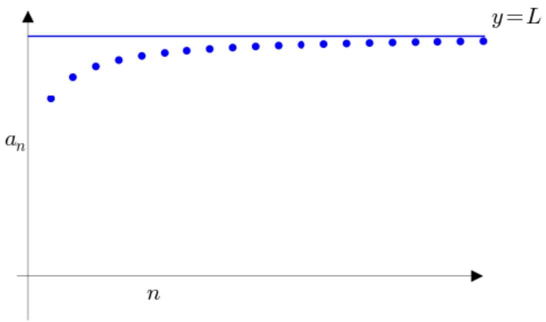
Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a -1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3, \ldots$ $c_{1\,000} = 1\,000$, $c_{1\,001} = -1\,001, \ldots$

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. La sucesión no tiene límite.

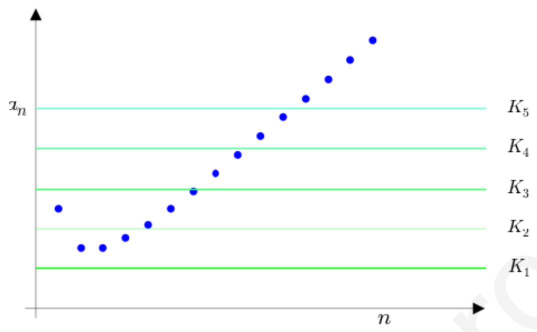
d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5; \ldots$; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196, \ldots$ $\text{lím } d_n = 0$.

Gráficamente el concepto de límite se interpreta como que la cola de la sucesión se aproxima a una recta horizontal de ecuación $y = L$, si $\lim a_n = L$;



Sucesión convergente

o por el contrario, la cola supera cualquier cota K si $\lim a_n = +\infty$;



Sucesión divergente

DEFINICIÓN "FORMAL" DEL CONCEPTO DE LIMITE DE UNA SUCESIÓN

Definición Diremos que $\{a_n\}$ es *convergente* y tiene límite $\lambda \in \mathbb{R}$ sii

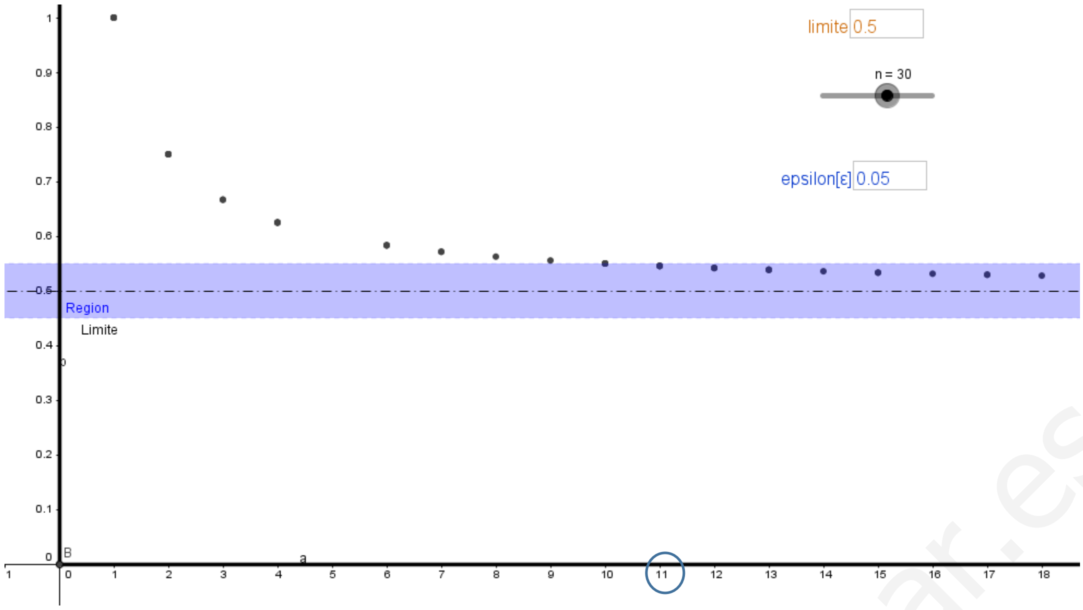
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad / \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - \lambda| < \epsilon$$

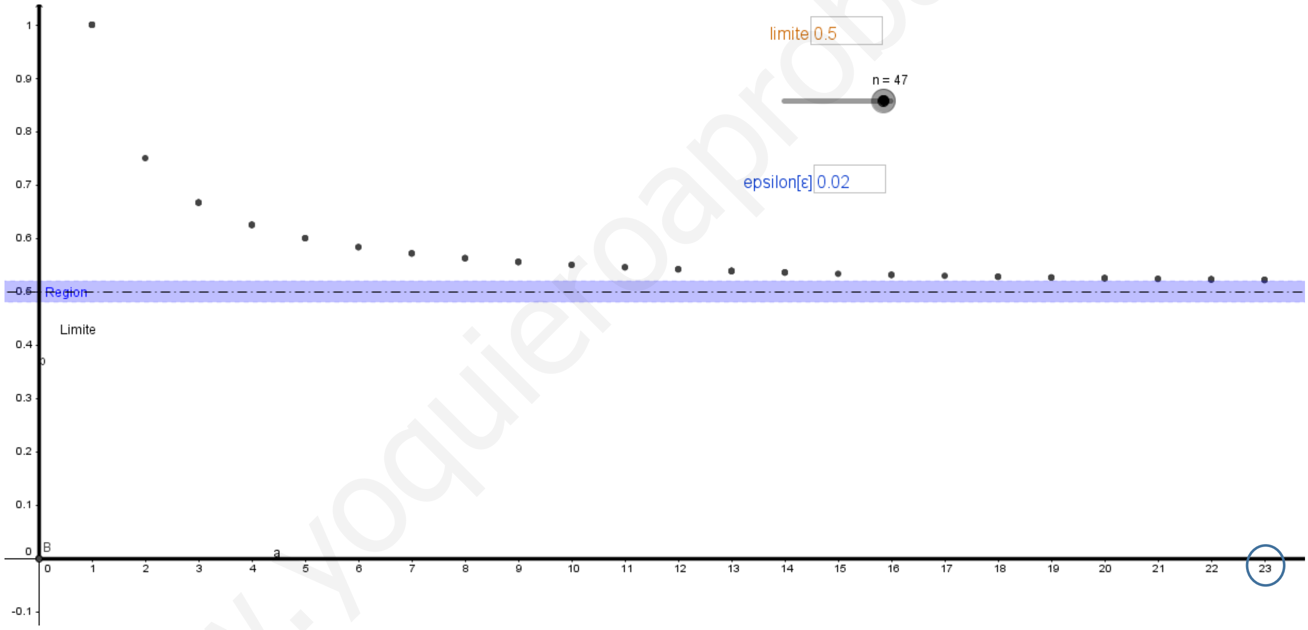
y lo escribiremos $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lambda$.

Traducción:

Que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lambda$ significa:

Dada una cantidad muy pequeña $\varepsilon > 0$ siempre encontramos una posición n_0 en la sucesión (que corresponde al término a_{n_0} de la sucesión) tal que, a partir de ese término de la sucesión en adelante $\forall \ n \geq n_0$, la distancia entre un término a_n de la sucesión y el limite λ es MENOR que la cantidad fijada ε , esto es, $d(a_n, \lambda) < \varepsilon$, o lo que es lo mismo $|a_n - \lambda| < \varepsilon$ o que $a_n \in E(\lambda, \varepsilon)$ (entorno de centro λ y radio ε)





EJERCICIO 20

Dada la sucesión $a_n = \dfrac{6n}{3n+1}$:

a) Halla su límite.

b) Calcula las distancias entre los términos a_{10}, a_{100} y a_{1000}, y el límite.

c) ¿A partir de qué término esta distancia es menor que una centésima?

d) ¿Y menor que una diezmilésima?

a) Calculamos algunos términos:

$a_{10} = 1{,}9354\ldots$ $\quad a_{100} = 1{,}993355\ldots$ $\quad a_{1000} = 1{,}999333\ldots$ $\quad$ Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n}{3n+1} = 2$.

b) $|a_{10} - 2| = |1{,}9354 - 2| = 0{,}0646$; $|a_{100} - 2| = |1{,}993355 - 2| = 0{,}006645$; $|a_{1000} - 2| = |1{,}999333 - 2| = 0{,}000667$

c) $||a_{10} - 2| = \left|\dfrac{6n}{3n+1} - 2\right| = \left|\dfrac{6n - 6n + 2}{3n+1}\right| = \dfrac{2}{3n+1} < \dfrac{1}{100} \Rightarrow 200 < 3n + 1 \Rightarrow \dfrac{200-1}{3} < n \Rightarrow 66{,}33 < n$

A partir del término 67, la diferencia entre los términos de la sucesión y su límite es menor que una centésima.

d) $|a_{10} - 2| = \dfrac{2}{3n+1} < \dfrac{1}{10\,000} \Rightarrow 20\,000 < 3n + 1 \Rightarrow \dfrac{20\,000 - 1}{3} < n \Rightarrow 6666{,}33 < n$. A partir del término 6667, la diferencia entre los términos de la sucesión y su límite es menor que una diezmilésima.

La sucesión de término general $b_n = \dfrac{3}{n+1}$ tiene por límite 0. Halla a partir de qué término se verifica que $|b_n - 0| < 0{,}00001$.

$$\left|\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{100\,000} \Rightarrow 300\,000 < n + 1 \Rightarrow n > 299\,999$$

Por tanto, a partir del término 299 999 se verifica que: $|b_n - 0| < \dfrac{1}{100\,000}$

La sucesión de término general $c_n = \dfrac{n^2+2}{2n^2+1}$ tiene por límite $\dfrac{1}{2}$. Calcula a partir de qué término se verifica que $\left|c_n - \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}0001$.

$$\left|\frac{n^2+2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{2n^2+4-2n^2-1}{4n^2+2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{3}{4n^2+2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow 30\,000 < 4n^2 + 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 29\,998 < 4n^2 \Rightarrow n > \sqrt{\dfrac{29\,998}{4}} = 86{,}6$. Por tanto, a partir del término 87 se verifica que: $\left|c_n - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{10\,000}$

Dados $k = 10\,000$ y la sucesión de término general $a_n = n^2 - 1$, averigua a partir de qué valor del índice n sus términos son mayores que k.

$$|a_n| > 10\,000 \Rightarrow |n^2 - 1| > 10\,000 \Rightarrow n^2 > 9999 \Rightarrow n > \sqrt{9999} = 99{,}995$$

A partir del término 100, los términos siguientes son mayores que 10 000.

CÁLCULO DE LÍMITES

1. $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ (Excepto $\infty - \infty$)
2. $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$ (Excepto $\infty - \infty$)
3. $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ (Excepto $0.\infty$)
4. $\lim (a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n$ (Excepto ∞ / ∞ y $0 / 0$)
5. $\lim a_n^{b_n} = \lim a_n^{\lim b_n}$ (Excepto $0^0, \infty^0, 1^\infty$)

Nota : $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1^\infty & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$ $\qquad a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1^\infty & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$

Estos excepciones reciben el nombre de **indeterminaciones** y cada una se resuelve de un modo determinado

Límite de sucesiones del tipo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K}{n^p} = 0 \quad con\, p > 0 \quad y \quad K \in R$

Ejemplos: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K}{n} = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K}{n^2} = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K}{\sqrt{n}} = 0 \qquad etc$

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Con la aritmética infinita, pueden presentarse los siguientes tipos de indeterminaciones:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty - \infty,\quad 0 \cdot \infty,\quad 1^\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0$$

Veamos cómo resolver algunas de ellas:

Indeterminación Tipo ∞ - ∞

Se saca factor común la mayor potencia y tenemos en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K}{n^p} = 0 \quad con\ p > 0$

Ejemplos:

$$\lim_{n\to\infty} -4n^3 + 5n^2 - n + 1 = \lim_{n\to\infty} n^3\left(-4 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty(-4 + 0 - 0 + 0) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n^4 - 3n^3 + 7n - 2 = \lim_{n\to\infty} n^4\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^3} - \frac{2}{n^4}\right) = +\infty(2 - 0 + 0 - 0) = +\infty$$

Regla:
El límite es más infinito si el coeficiente del término de mayor grado es positivo y es menos infinito si el coeficiente del término de mayor grado es negativo.

Indeterminación Tipo ∞/∞

Se saca factor común la mayor potencia en el numerador y en el denominador, luego se simplifica y tenemos en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K}{n^p} = 0 \quad con\ p > 0$

Ejemplos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + n^2 - 2n - 1}{-3n^3 + 5n^2 + 2} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)_{IND} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(4 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(-3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{-3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}} = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^5 + n^2 - 2n - 1}{-3n^3 + 5n^2 + 2} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)_{IND} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(4 + \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^5}\right)}{n^3\left(-3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4 + \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^5}\right)}{\left(-3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right)} = (+\infty)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^3 + n^2 - 2n - 1}{3n^4 + 5n^2 + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)_{IND} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(-5 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(3 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-5 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{n\left(3 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right)} = \frac{-5}{+\infty} = 0$$

Regla:

- Si el grado del numerador es mayor que el del denominador el límite es $\pm\infty$ (Dependiendo del signo del coeficiente de mayor grado del numerador y del denominador)
- Si el grado del numerador es menor que el del denominador el límite es 0.
- Si el grado del numerador y denominador es el mismo el límite es igual al cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y denominador.

Indeterminación Tipo (∞ - ∞) con expresiones radicales

Se elimina la indeterminación multiplicando y dividiendo por el conjugado, para quitarnos la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = (+\infty) - (+\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1 - (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1 - n^2 + 1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2-1}=(+\infty)-(+\infty)_{IND}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2-1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2-2n+3}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2-2n+3}+\sqrt{n^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3-(n^2-1)}{\sqrt{n^2-2n+3}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3-n^2+1}{\sqrt{n^2-2n+3}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+4}{\sqrt{n^2-2n+3}+\sqrt{n^2-1}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)_{IND}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-2+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-2+\frac{4}{n}\right)}{n\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-2+\frac{4}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{-2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-1$$

EL NÚMERO “e”

Consideremos la sucesión de término general siguiente: $(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \; con \;\; n\in N$

Ésta sucesión verifica lo siguiente:

1. Es monótona creciente, esto es, $a_n < a_{n+1} \quad \forall\; n\in N$
2. Está acotada superiormente, pues $a_n < 3 \quad \forall\; n\in N$

Aplicando un teorema que afirma que toda sucesión monótona creciente y que esté acotada superiormente es convergente (tiene limite), podemos decir, que la sucesión $(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene limite, el cuál, es un número irracional denominado “e” (en honor a Leonard Euler):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\cong 2{,}7118281\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

HISTORIA DEL NÚMERO e

Primer ejemplo. Crecimiento de un capital

En el siglo XVII los matemáticos se preguntaban. ¿Con arreglo a qué ley aumentaría un capital colocado a interés compuesto si el interés se acumulara a cada momento al capital?. Es decir, sin esperar a transcurrir un año, sino desde el momento que comenzara a producir intereses.

Por ejemplo, 1 € colocado al 100%, al cabo de un año, tendríamos 1 + 1 = 2 €.

Colocados de nuevo al 100%, tendríamos al cabo del segundo año 2 + 2 = 4 €

Al tercer año 4 + 4 = 8 €.

En general, al cabo de n años tendríamos $(1 + 1)^n$ euros.

Pero, ¿por qué hacer la acumulación al cabo de 1 año?. ¿Por qué no hacerla al cabo de 6 meses ($\frac{1}{2}$ año)?.

En ese caso, nuestro euro al cabo de 6 meses habría producido 0,5 € y el capital total se habría convertido en $(1 + \frac{1}{2})$ euros. Pero este capital estaría ahora produciendo intereses durante el medio año restante, lo que resultaría $\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2})$ euros.

En total.

$$(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2{,}25\ €$$

¿Y si hiciéramos la acumulación día a día?

$$\left[1 + \frac{1}{365}\right]^{365}$$

¿Y si la hiciéramos hora a hora?

$$\left[1 + \frac{1}{8760}\right]^{8760}$$

¿Y si la hiciéramos segundo a segundo?

$$\left[1 + \frac{1}{31536000}\right]^{31536000}$$

Curiosamente, por más que subdividamos el tiempo, el capital no crece indefinidamente, sino que la sucesión de término general.

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n} \qquad \text{con } n \Rightarrow \infty$$

Se mantiene por debajo de un cierto límite.

Se podrían dar más ejemplos que son **casos particulares de la llamada ley del crecimiento,** donde una cierta magnitud (dinero, habitantes, bacilos, etc), susceptible de multiplicarse a un ritmo constante cada cierto tiempo, el crecimiento se agrega a la población inicial y toma parte a su vez, en su multiplicación

Al límite de la sucesión de término general.

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n}$$

Lo llamamos, número **e,** o número de Euler.

Observemos, cómo va modificando su valor al ir añadiendo términos.

$$\left[1+\frac{1}{1}\right]^{1} = 2$$

$$\left[1+\frac{1}{2}\right]^{2} = 2{,}25$$

$$\left[1+\frac{1}{3}\right]^{3} = 2{,}37$$

$$\left[1+\frac{1}{4}\right]^{4} = 2{,}44$$

$$\left[1+\frac{1}{5}\right]^{5} = 2{,}488$$

....

$$\left[1+\frac{1}{10}\right]^{10} = 2{,}5936$$

....

$$\left[1+\frac{1}{50}\right]^{50} = 2{,}6915$$

....

$$\left[1+\frac{1}{200}\right]^{200} = 2{,}7164$$

....

Conforme mayor es n, la expresión se va haciendo mayor. Sin embargo, el valor de dicha expresión va creciendo cada vez más despacio, al crecer n. Los sucesivos valores forman una sucesión convergente acotada. El valor límite de esta sucesión recibe el nombre de número e y su valor es.

$$e = 2{,}718281828459.....$$

Es un número irracional y además trascendente. Es decir, que no es solución de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales.

Indeterminación Tipo 1^{∞}

Se resuelve utilizando el nº "e":

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \qquad \text{en general} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \qquad con\ a_n \to \pm\infty$$

De éste modo, si tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = (1^{\infty})_{\ IND} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n\cdot(a_n-1)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = (1^{+\infty})_{\ IND} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+4}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\cdot\left(\frac{2n+1-2n-4}{2n+4}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\cdot\left(\frac{-3}{2n+4}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n^2}{(n+1)\cdot(2n+4)}} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$