EJERCICIOS DE EJEMPLOS

Sea la sucesión $\boldsymbol{a_n = \frac{2n-1}{3n+2}} \quad \boldsymbol{n \in N}$**:**

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2n+2-1}{3n+3+2} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(3n+2)-(2n-1)\cdot(3n+5)}{(3n+5)\cdot(3n+2)} = \frac{6n^2+4n+3n+2-6n^2-10n+3n+5}{(3n+5)\cdot(3n+2)} =$$

$\frac{7}{(3n+5)\cdot(3n+2)} > 0 \quad \forall \ n \in N$ luego la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es monótona creciente.

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)_{IND} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante la distancia entre un término de la sucesión y 2/3 es menor que 10^{-6}?

Nota: es lo mismo decir $a_n \in E(l,\ \varepsilon) \Leftrightarrow d(a_n, l\ ) < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición del término) a partir del cual se cumple:

$d\left(a_n, \frac{2}{3}\right) < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{3\cdot(2n-1)-2\cdot(3n+2)}{3\cdot(3n+2)}\right| < 10^{-6} \quad \Rightarrow$

$\left|\frac{6n-3-6n-4}{3\cdot(3n+2)}\right| < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-7}{3\cdot(3n+2)}\right| < 10^{-6}$

Como $n \in N$ será el valor absoluto $\left|\frac{-7}{3\cdot(3n+2)}\right| = \frac{7}{3\cdot(3n+2)}$ por lo que:

$\left|\frac{-7}{3\cdot(3n+2)}\right| < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{3\cdot(3n+2)} < 10^{-6}$ despejamos n:

$$\frac{7}{3\cdot(3n+2)} < 10^{-6} \Rightarrow \frac{7}{10^{-6}\cdot 3} < (3n+2) \Rightarrow \frac{7}{10^{-6}\cdot 3} - 2 < 3n$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\frac{7}{10^{-6}\cdot 3}-2}{3} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{7-6\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^{-6}} \approx 777777.6666667$$

Esto es, a partir del término a_{777778} se tiene:

$a_n \in E\left(\frac{2}{3},\ 10^{-6}\right) \Leftrightarrow d\left(a_n, \frac{2}{3}\right) < 10^{-6} \Leftrightarrow \left|a_n - \frac{2}{3}\right| < 10^{-6} \quad \forall \ n \geq 777778$

Sea la sucesión $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-2}$ $\quad n \in N$:

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-2} - \frac{n^2+1}{n^2-2} = \frac{n^2+2n+1+1}{n^2+2n+1-2} - \frac{n^2+1}{n^2-2} =$$

$$= \frac{n^2+2n+2}{n^2+2n-1} - \frac{n^2+1}{n^2-2} = \frac{(n^2+2n+2)\cdot(n^2-2)-(n^2+2n-1)\cdot(n^2+1)}{(n^2+2n-1)\cdot(n^2-2)} =$$

$$\frac{n^4-2n^2+2n^3-4n+2n^2-4-n^4-n^2-2n^3-2n+n^2+1}{(n^2+2n-1)\cdot(n^2-2)} = \frac{-6n-3}{(n^2+2n-1)\cdot(n^2-2)} < 0 \quad \forall \ n \geq 2 \quad n \in N$$

luego la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es monótona decreciente.$\forall \ n \geq 2$

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{n^2+1}}{\boldsymbol{n^2-2}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)_{IND} \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{n^2}\cdot\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n^2}}\right)}{\boldsymbol{n^2}\cdot\left(1-\frac{2}{\boldsymbol{n^2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\boldsymbol{n^2}}}{1-\frac{2}{\boldsymbol{n^2}}} = 1$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{n^2+1}}{\boldsymbol{n^2-2}} = 1$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante la distancia entre un término de la sucesión y 1 es menor que 10^{-4}?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término de la sucesión) a partir del cual se cumple:

$d(a_n, 1\ ) < 10^{-4}$ $\quad \left|\frac{\boldsymbol{n^2+1}}{\boldsymbol{n^2-2}} - 1\right| < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\boldsymbol{n^2+1-n^2+2}}{\boldsymbol{n^2-2}}\right| < 10^{-4} \quad \Rightarrow$

$\left|\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2}-\boldsymbol{2}}\right| < 10^{-4}$

Como $n \in N$ será el valor absoluto $\left|\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2-2}}\right| = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2-2}}$ $\forall \ n \geq 2 \quad n \in N$ por lo que:

$\left|\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2-2}}\right| < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2-2}} < 10^{-4}$ despejamos n: para $\forall \ n \geq 2 \quad n \in N$

$$\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2-2}} < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad 3 < 10^{-4}\cdot(\boldsymbol{n^2-2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{10^{-4}} + 2 < \boldsymbol{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad n > \sqrt{\frac{3}{10^{-4}}+2} \quad \Rightarrow \quad n \approx 106.27$$

Esto es, a partir del término a_{104} se tiene:

$a_n \in E(1,\ 10^{-4}) \Leftrightarrow d(a_n, 1\ ) < 10^{-4} \Leftrightarrow \quad |a_n - 1| < 10^{-4} \quad \forall \ n \geq 107$

Sea la sucesión $a_n = n^2 - 14n + 49 \quad n \in N$:

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 14(n+1) + 49 - (n^2 - 14n + 49) =$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 14n - 14 + 49 - n^2 + 14n - 49 = 2n - 13$$

Veamos cuando es $2n - 13 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2n > 13 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{13}{2} = 6.5$

$luego \quad a_{n+1} - a_n > 0 \quad para \ \forall \ n \geq 7 \qquad n \in N$

luego la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es monótona creciente (a partir del término séptimo).

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 14n + 49 = (+\infty - \infty)_{IND} \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(1 - \frac{14}{n} + \frac{49}{n^2}\right) = +\infty$$

Por lo tanto: $\lim_{n\to\infty} n^2 - 14n + 49 = +\infty$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante es $a_n > 10^6$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término) a partir del cual se cumple: $n^2 - 14n + 49 > 10^6 \quad \Rightarrow$

despejamos n, para ello, completamos cuadrados en el primer miembro:
$n^2 - 14n + 49 > 10^6 \quad \Rightarrow \quad (n-7)^2 > 10^6 \Rightarrow \sqrt{(n-7)^2} > \sqrt{10^6}$

$\lceil n - 7 \rceil > 10^3$ a partir de n = 7 es ya $n - 7 \geq 0$ por lo que el valor absoluto queda: $n - 7 > 10^3 \quad con \ n > 7 \quad \Rightarrow \quad n > 10^3 + 7 \quad \Rightarrow \quad n > 1007$

Esto es, a partir del término a_{1007} es $|a_n| > 10^6 \quad \forall \ n \geq 1007$

Sea la sucesión $\boldsymbol{a_n = \frac{-n+13}{4n-36}}$ $\quad \boldsymbol{n \in N \quad n > 9}$**:**

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-(n+1)+13}{4(n+1)-36} - \frac{\boldsymbol{-n+13}}{\boldsymbol{4n-36}} = \frac{-n+12}{4n+4-36} - \frac{\boldsymbol{-n+13}}{\boldsymbol{4n-36}}$$
$$= \frac{-n+12}{4n-32} - \frac{\boldsymbol{-n+13}}{\boldsymbol{4n-36}} =$$

$$= \frac{(-n+12)\cdot(\boldsymbol{4n-36}) - (-n+13)\cdot(4n-32)}{(4n-32)\cdot(\boldsymbol{4n-36})} = \frac{-4n^2+36n+48n-432+4n^2-32n-52n+416}{(4n-32)\cdot(\boldsymbol{4n-36})}$$
$$= \frac{-16}{(4n-32)\cdot(\boldsymbol{4n-36})} = \frac{-16}{16(n-8)\cdot(\boldsymbol{n-9})} = \frac{-1}{(n-8)\cdot(\boldsymbol{n-9})}$$

$\frac{-1}{(n-8)\cdot(\boldsymbol{n-9})} < 0 \quad \forall \ n \in N \ \ n > 9$ luego la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es monótona decreciente.

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{-n+13}}{\boldsymbol{4n-36}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)_{IND} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(-1+\frac{13}{n}\right)}{n\cdot\left(4-\frac{36}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\frac{13}{n}}{4-\frac{36}{n}} = \frac{-1}{4}$$

Por lo tanto: $\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{-n+13}}{\boldsymbol{4n-36}} = \frac{-1}{4}$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante $a_n \in E\left(\frac{-1}{4}, \quad 10^{-3}\right)$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición del término) a partir del cual se cumple:

$$a_n \in E\left(\frac{-1}{4}, \quad 10^{-3}\right) \quad \Rightarrow \quad d\left(a_n, \frac{-1}{4}\right) < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\boldsymbol{-n+13}}{\boldsymbol{4n-36}} - \left(\frac{-1}{4}\right)\right| < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{-n+13}{4n-36} + \frac{1}{4}\right| < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-4n+52+4n-36}{4n-36}\right| < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{6}{4n-36}\right| < 10^{-3}$$

Como $n \in N$ será el valor absoluto $\left|\frac{6}{4n-36}\right| = \frac{6}{4n-36}$ $\quad \boldsymbol{n > 9}$ por lo que:

$\left|\frac{6}{4n-36}\right| < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{4n-36} < 10^{-3}$ despejamos n:

$$\frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{4n-36}} < 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad 6 < 10^{-3}\cdot(4n-36) \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{10^{-3}} < (4n-36)$$

$$\frac{6}{10^{-3}} + 36 < 4n \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\frac{6}{10^{-3}}+36}{4} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{6+36\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3}} = 1509$$

Esto es, a partir del término a_{1510} se tiene:

$$a_n \in E\left(\frac{-1}{4}, \ 10^{-3}\right) \Leftrightarrow d\left(a_n, \frac{-1}{4}\right) < 10^{-3} \Leftrightarrow \left|a_n + \frac{1}{4}\right| < 10^{-3} \quad \forall \ n \geq 1510$$

Sea la sucesión $\boldsymbol{a_n = \frac{25-2n^2}{1-5n^2}}$ $\quad \boldsymbol{n \in N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\mathbf{25 - 2(n+1)^2}}{\mathbf{1 - 5(n+1)^2}} - \frac{\mathbf{25 - 2n^2}}{\mathbf{1 - 5n^2}} = \frac{\mathbf{25 - 2(n^2 + 2n + 1)}}{\mathbf{1 - 5(n^2 + 2n + 1)}} - \frac{\mathbf{25 - 2n^2}}{\mathbf{1 - 5n^2}} =$$

$$= \frac{25-2n^2-4n-2}{1-5n^2-10n-5} - \frac{25-2n^2}{1-5n^2} = \frac{23-2n^2-4n}{-5n^2-10n-4} - \frac{25-2n^2}{1-5n^2} = \frac{(23-2n^2-4n)\cdot(1-5n^2)-(25-2n^2)\cdot(-5n^2-10n-4)}{(-5n^2-10n-4)\cdot(1-5n^2)} =$$

$$\frac{23-115n^2-2n^2+10n^4-4n+20n^3+125n^2+250n+100-10n^4-20n^3-8n^2}{(-5n^2-10n-4)\cdot(1-5n^2)} = \frac{123}{(-5n^2-10n-4)\cdot(1-5n^2)} > 0 \quad \forall\, n \in N$$

luego la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es monótona creciente $\quad \forall \;\; n \in N$

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{25 - 2n^2}}{\mathbf{1 - 5n^2}} \quad = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)_{IND} \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{n^2} \cdot \left(\frac{25}{\boldsymbol{n^2}} - 2\right)}{\boldsymbol{n^2} \cdot \left(\frac{1}{\boldsymbol{n^2}} - 5\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{25}{\boldsymbol{n^2}} - 2}{\frac{1}{\boldsymbol{n^2}} - 5} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{25-2n^2}}{\mathbf{1-5n^2}} = \frac{2}{5}$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante $a_n \in E\left(\frac{2}{5}, \quad 10^{-5}\right)$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término de la sucesión) a partir del cual se cumple:

$$a_n \in E\left(\frac{2}{5}, \quad 10^{-5}\right) \quad \Rightarrow \quad d\left(a_n, \frac{2}{5}\right) < 10^{-5} \qquad \left|\frac{\mathbf{25-2n^2}}{\mathbf{1-5n^2}} - \frac{2}{5}\right| < 10^{-5} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathbf{5(25 - 2n^2) - 2(1 - 5n^2)}}{\mathbf{(1 - 5n^2)5}}\right| < 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathbf{125 - 10n^2 - 2 + 10n^2}}{\mathbf{(1 - 5n^2)5}}\right| < 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(1 - 5n^2)5}}\right| < 10^{-5}$$

Como $\;n \in N\;$ será el valor absoluto $\left|\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(1-5n^2)5}}\right| = -\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(1-5n^2)5}} \quad \forall \;\; n \in N$ por lo que:

$\left|\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(1-5n^2)5}}\right| < 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(1-5n^2)5}} < 10^{-5}$ despejamos n:

$$-\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(1 - 5n^2)5}} < 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{123}}{\mathbf{(5n^2 - 1)5}} < 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{123}}{\mathbf{5 \cdot 10^{-5}}} < (\mathbf{5n^2 - 1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{123}}{\mathbf{5\cdot 10^{-5}}} + 1 < \mathbf{5n^2} \quad \Rightarrow \quad n > \sqrt{\frac{\frac{\mathbf{123}}{\mathbf{5\cdot 10^{-5}}}+1}{\mathbf{5}}} \quad \Rightarrow \quad n > \sqrt{\frac{\mathbf{123+5\cdot 10^{-5}}}{\mathbf{25\cdot 10^{-5}}}} \quad \approx \mathbf{246000,1}$$

Esto es, a partir del término a_{246001} se tiene:

$$a_n \in E\left(\frac{2}{5}, \; 10^{-5}\right) \Leftrightarrow d\left(a_n, \frac{2}{5}\right) < 10^{-5} \Leftrightarrow \quad \left|a_n - \frac{2}{5}\right| < 10^{-5} \quad \forall \; n \geq 246001$$

Sea la sucesión $\boldsymbol{a_n = -3n^2 + 5n - 1 \quad n \in N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = -3(n+1)^2 + 5(n+1) - 1 - \left(-3n^2 + 5n - 1\right) =$$

$$= -3n^2 - 6n - 3 + 5n + 5 - 1 + 3n^2 - 5n + 1 = -11n + 2$$

Y es $-11n + 2 < 0 \quad \forall \ n \in N \quad luego \quad a_{n+1} - a_n < 0 \quad para \ \forall \ n \in N$ la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es monótona decreciente

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} -3n^2 + 5n - 1 \quad = (-\infty + \infty)_{IND} \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(-3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$$

Por lo tanto: $\lim_{n\to\infty} -3n^2 + 5n - 1 = -\infty$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante es $a_n <$ -10 ^{8}?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término) a partir del cual se cumple: $\quad -3n^2 + 5n - 1 < -10^8 \quad \Rightarrow$

despejamos n, para ello, multiplicamos -1 y completamos cuadrados en el primer miembro:

$$3n^2 - 5n + 1 > 10^8 \quad \Rightarrow \quad 3\left(n^2 - \frac{5n}{3} + \frac{1}{3}\right) > 10^8 \Rightarrow$$

$$3\left(n^2 - \frac{5n}{3} + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{1}{3}\right) > 10^8 \quad \Rightarrow \quad 3\left(\left(n - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right) > 10^8$$

$$3\left(n - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} > 10^8 \quad \Rightarrow \quad 3\left(n - \frac{5}{6}\right)^2 > 10^8 + \frac{13}{12} \quad \Rightarrow \quad \left(n - \frac{5}{6}\right)^2 > \frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\left(n - \frac{5}{6}\right)^2} > \sqrt{\frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}} \quad \Rightarrow \quad \left(n - \frac{5}{6}\right) > \sqrt{\frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}} \quad \Rightarrow$$

$$n > \sqrt{\frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}} + \frac{5}{6} \approx 16666667{,}68$$

Esto es, a partir del término $a_{16666668}$ es $\quad a_n < -10^8 \quad \forall \ n \geq 16666668$