

Aproximaciones y errores

Sea $a \in \mathbb{R}$, " a " es el valor exacto denominaremos por " $\bar{a}$ " a su valor aproximado.

Ej: $a = \sqrt{2}$ será el valor exacto

$$a = 1.414213562...$$

Si tomamos $\bar{a} = 1.41$ este es un valor aproximado de $\sqrt{2}$

Al considerar como valor del número su aproximación estaremos cometiendo un error. La magnitud de dicho error viene dada por: $|V_{\text{exacto}} - V_{\text{aproximado}}|$.

Tipos de aproximaciones.

- Diremos que $\bar{a}$ es una aproximación del número a por truncamiento hasta la cifra decimal de orden n si $\bar{a}$ se obtiene de a eliminando la cifra decimal de orden $n+1$ y siguientes

$$\text{Ej: } \sqrt{2} = 1.41421356...$$

$\bar{a}$ aproximación por truncamiento hasta las milésimas.
($n=3$) $\bar{a} = 1.414$

- Diremos que $\bar{a}$ es una aproximación por redondeo hasta la cifra decimal de orden n si el número $\bar{a}$ se obtiene de a eliminando la cifra decimal de orden $n+1$ y siguientes, aumentando en 1 unidad la cifra de lugar n si la de orden $n+1$ es igual o superior a 5 y dejándola igual si es inferior a 5.

Ej: aproximación por redondeo de $\sqrt{2}$ hasta la cifra de orden $n=4$

$$\bar{a} = 1.4142$$

Por redondeo hasta la cifra de orden 6 ($n=6$)

$$\sqrt{2} = 1'41421356\dots$$

$$\bar{a} = 1'414214$$

Vamos a medir (acotar o poner tope) el error cometido al efectuar una aproximación:

Hemos definido dos tipos de errores:

1) Error absoluto:

$$E_{AB} = |V_{\text{exacto}} - V_{\text{aproximado}}|$$

2) Error relativo

$$E_R = \frac{V_{\text{absoluto}}}{V_{\text{exacto}}}$$

Vamos a analizar con cada una de las aproximaciones cómo son estos errores

Cuando utilizamos la aprox. por truncamiento.

$$\begin{aligned} \text{Error absoluto} &= |V_{\text{exacto}} - V_{\text{aprox}}| = |a - \bar{a}| = \\ &= a - \bar{a} < 10^{-n} \end{aligned}$$

Cuando se realiza la aprox. por truncamiento es $\bar{a}$ siempre inferior a a .
 $\bar{a} < a$

$$Ej: \sqrt{2} = 1'4142\dots$$

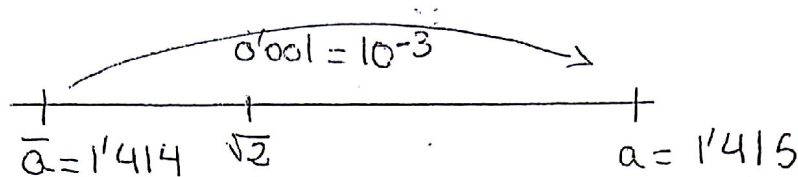
Aproximación por truncamiento hasta la cifra de orden 2 ($n=2$)

$$\bar{a} = 1'41 \quad \text{Vamos (acotamos) el error cometido}$$

$$E_A = |V.\text{exacto} - V.\text{aprox}| = |a - \bar{a}| = |\sqrt{2} - 1'41| < 10^{-2} = 0'01$$

Aprox. de $\sqrt{2}$ con 3 cifras

$$\bar{a} = 1'414 \quad (n=3)$$



$$E_A = |\sqrt{2} - 1'414| < 10^{-3}$$

V. aprox por
truncamiento
hasta la
cifra de orden
"n"

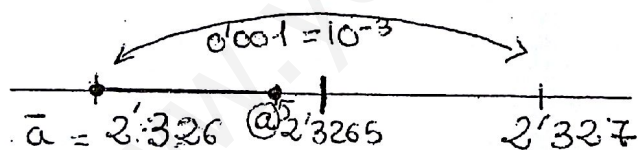
$$|V.\text{exacto} - V.\text{aprox}| < 10^{-n}$$

Ej: Sea $a = 2'326481\dots$

a) Obtener una cota para el error absoluto cuando se toma una aproximación por truncamiento hasta la cifra de orden 3.

$$V.\text{exacto} = a = 2'326481\dots$$

$$V.\text{aproximado trunc.} = \bar{a} = 2'326$$



En una aproximación por truncamiento siempre es $\bar{a}$ menor que el exacto (a)

$$\bar{a} < a$$

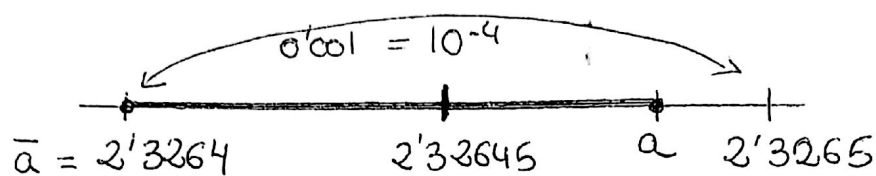
↓ ↓
V. aprox exacto

$$\text{Error abs} = d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| = |a - \underbrace{2'326}_0| =$$

$$= \underbrace{a - 2'326}_{\text{Error}} < 10^{-3}$$

b) Idem cuando se toma una aproximación por truncamiento hasta la cifra de orden 4.

$$\bar{a} = 2'3264$$



$$\begin{aligned} \text{Error abs} &= d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| = |a - 2'3264| = \\ &= \underbrace{a - 2'3264}_{\text{Error}} < 10^{-4} \end{aligned}$$

En general;

Si $\bar{a}$ es una aproximación de a por truncamiento hasta la cifra decimal de orden n una cota (tope) para el error absoluto que se comete viene dada por:

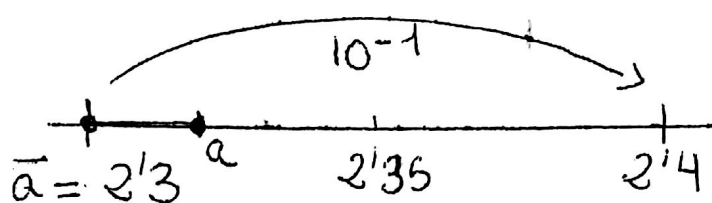
$$\boxed{\text{Error abs} = d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| < 10^{-n}}$$

Si la aproximación se realiza por redondeo estudiemos con un ejemplo la cota para el error absoluto.

$$\text{Sea } a = 2'326481\dots$$

a) Cota para el error absoluto cuando se toma una aproximación por redondeo hasta la cifra de orden 1

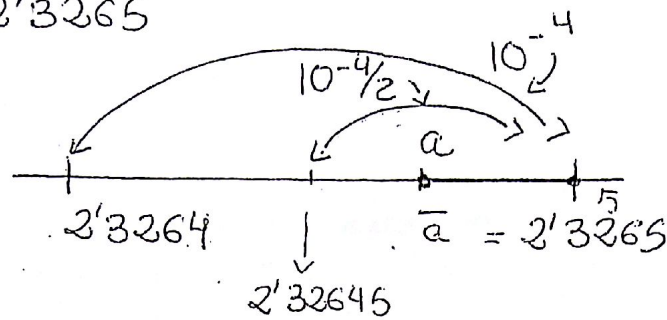
$$\bar{a} = 2'3 \text{ (por redondeo)}$$



$$\text{Error abs} = d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| = |a - 2'3| < \frac{10^{-1}}{2}$$

b) Idem cuando se hace una aproximación por redondeo hasta la cifra de orden 4.

$$\bar{a} = 2'3265$$



$$\text{Error abs} = d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| < \frac{10^{-4}}{2}$$

En general;

Si $\bar{a}$ es una aproximación por redondeo de a hasta la cifra de orden n una cota, para el error absoluto es:

$$\text{Error abs} = d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| < \frac{10^{-n}}{2}$$

Ejercicio.

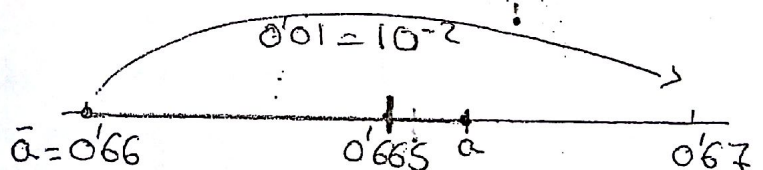
Si para $a = \frac{2}{3}$ se toma como valor aproximado por truncamiento hasta la cifra de orden 2 y luego se toma una aproximación por redondeo hasta la cifra de orden 5 obtener respectivamente las cotas para el error absoluto en cada caso:

$$a = \frac{2}{3} = 0'6666\dots$$

a) Trunc: $\bar{a} = 0'66$

$$\begin{aligned} E_A = d(a, \bar{a}) &= |a - \bar{a}| < 10^{-n} = \\ &= |a - 0'66| < 10^{-2} = 0'01 \end{aligned}$$

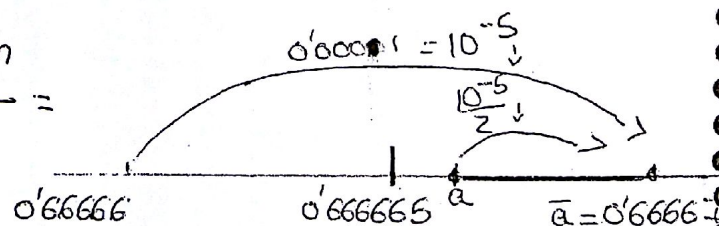
$\Rightarrow$ Error inferior a 1 centésima.



b) Red: $\bar{a} = 0'66667$

$$\begin{aligned} E_A = d(a, \bar{a}) &= |a - \bar{a}| < \frac{10^{-n}}{2} = \\ &= |a - 0'66667| < \frac{10^{-5}}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Error inferior a una cien milésima.



Otro tipo de error que se define es el error relativo, así:

$$E_{\text{Relativo}} = \frac{E_{\text{absoluto}}}{V_{\text{exacto}}}$$

Multiplicado por cien expresa el error en términos de porcentaje.

Como generalmente el valor exacto no suele tenerse con todas sus cifras vamos a obtener una cota (tpe) del error relativo; en la que no aparezca el valor exacto, para ello tanto si consideramos la aproximación por truncamiento o por redondeo tenemos: Cantidad pequeña (épsilon)

$$E_{\Delta} = d(a, \bar{a}) = |a - \bar{a}| < \overset{\downarrow}{\epsilon}$$

$$\text{Tomo } |a - \bar{a}| < \epsilon \quad (\text{significa})$$

$$-\epsilon < a - \bar{a} < \epsilon \quad (\text{sumo } \bar{a})$$

$$\bar{a} - \epsilon < a < \bar{a} + \epsilon$$

$$\underset{V. \text{aprox}}{\bar{a}} - \epsilon < \underset{V. \text{exacto}}{a} < \bar{a} + \epsilon$$

$\bar{a} - \epsilon$ es una cota inferior para "a"

$\bar{a} + \epsilon$ es una cota superior para "a"

$$\text{Entonces: } E_r = \frac{E_{\Delta}}{a} < \boxed{\frac{E_{\Delta}(\text{Cota})}{\bar{a} - \epsilon}} \leftarrow \begin{matrix} \text{Cota para} \\ \text{el error} \\ \text{relativo} \end{matrix}$$

Ej: Cota para el error relativo en el de antes:

$$a) \bar{a} = 0.66 \quad \epsilon = 10^{-2} \quad E_{\Delta} < 10^{-2}$$

$$E_r = \frac{E_{\Delta}}{a} < \frac{\text{Cota } E_{\Delta}}{\bar{a} - \epsilon} = \frac{10^{-2}}{0.66 - 10^{-2}} = 0.01538...$$

$$\times 100 \approx 1.6\%$$

El error relativo con seguridad es inferior al 1.6 %