EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE 2º GRADO

1) $\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=3 \\ 3x+y=5 \end{array}\right\}$ Despejo $y=5-3x$ y sustituimos en la 1ª

$$x^2-(5-3x)^2=3$$

$$x^2-(25+9x^2-30x)=3$$

$$x^2-25-9x^2+30x-3=0$$

$$-8x^2+30x-28=0$$

$$-4x^2+15x-14=0$$

$$x=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4(-4)(-14)}}{-8}=\frac{-15\pm\sqrt{225-224}}{-8}=\frac{-15\pm 1}{-8}$$

$$x \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-15+1}{-8}=\dfrac{-14}{-8}=\dfrac{7}{4} \\ \\ x_2=\dfrac{-15-1}{-8}=\dfrac{-16}{-8}=2 \end{cases}$$

para $x_1=\frac{7}{4} \Rightarrow y=5-3\cdot\frac{7}{4}=5-\frac{21}{24}=\frac{120-21}{24}=\frac{99}{24}$

$$=\frac{33}{8}$$

una solución es $(x,y)=\left(\frac{7}{4},\frac{33}{8}\right)$

para $x_2=2 \Rightarrow y=5-3\cdot 2=5-6=-1$

otra solución es $(x,y)=(2,-1)$

2) $\left.\begin{array}{l} xy=12 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$ Despejo p ej $y=8-x$ y sustituyo en la 1ª:

$$x(8-x)=12$$

$$8x-x^2-12=0 \qquad -x^2+8x-12=0$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4(-1)(-12)}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-48}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{-2}=$$

$$=\frac{-8\pm 4}{-2}= \begin{cases} x=\frac{-8+4}{-2}=\frac{-4}{-2}=2 \\ x=\frac{-8-4}{-2}=\frac{-12}{-2}=6 \end{cases}$$

Para $x=2$ $\quad y=8-2=6$ $\quad$ solución $(x,y)=(2,6)$

Para $x=6$ $\quad y=8-6=2$ $\quad$ solución $(x,y)=(6,2)$

3) $\left.\begin{array}{l} 2x^2+y^2=17 \\ xy=6 \end{array}\right\}$ despejo p ej $y=\frac{6}{x}$ y sustituyo en la 1ª

$$2x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2=17 \; ; \; 2x^2+\frac{36}{x^2}=17$$

$$\frac{2x^4+36}{x^2}=17 \; ; \; 2x^4+36=17x^2 \; ; \; 2x^4-17x^2+36=0$$

ecuac bicuadrada hacemos $x^2=t$ y queda:

$$2t^2-17t+36=0$$

$$t=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot 2\cdot 36}}{4}=\frac{17\pm\sqrt{289-288}}{2}=\frac{17\pm 1}{2}= \begin{cases} 9 \\ 8 \end{cases}$$

1º) $t=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \quad y=\frac{6}{3}=2 \quad \boxed{(x,y)=(3,2)} \\ x=-3 \quad y=\frac{6}{-3}=-2 \quad \boxed{(x,y)=(-3,-2)} \end{cases}$

2º) $t=8 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2} \quad y=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x=-2\sqrt{2} \quad y=\frac{6}{-2\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$(x,y)=(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/2)$

$(x,y)=(-2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2)$

4) $\left.\begin{array}{l} x^2+3y^2=49/4 \\ 8x^2-y^2=-2 \end{array}\right\}$ Fijémonos en que las dos ecuaciones sólo contienen términos en "x^2" e "y^2". Podemos resolverlo por reducción:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+3y^2=49/4 \\ 8x^2-y^2=-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2+3y^2=49/4 \\ 24x^2-3y^2=-6 \end{array}\right\} \text{ los sumo}$$

$$25x^2=\frac{49}{4}-6$$

$$25x^2=\frac{49-24}{4}$$

$$25x^2=\frac{25}{4} \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

Ahora de la 2ª ecuación despejamos y^2:

$$y^2=8x^2+2$$

a) $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=8\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=8\cdot\frac{1}{4}+2=4$

$$y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$$

Soluciones $(x,y)=\begin{cases} (1/2,\ 2) \\ (1/2,\ -2) \end{cases}$

b) $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=8\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2=4 \quad y=\pm 2$

Soluciones $(x,y)=\begin{cases} (-1/2,\ 4) \\ (-1/2,\ -4) \end{cases}$

5) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-6y+11=0 \\ x^2+y^2-6x-8y+21=0 \end{array}\right\}$ Al restar 1ª − 2ª queda

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x-6y+11=0 \\ -x^2-y^2+6x+8y-21=0 \end{array}\right\}$$

$$2x+2y-10=0 \Rightarrow x+y-5=0$$

de esta ecuación despejamos p.ej la "y" y la sustitui-
mos p.ej en la 1ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x-6y+11=0 \\ x+y-5=0 \end{array}\right| \; y=5-x$$

$$x^2+(5-x)^2-4x-6(5-x)+11=0$$ queda una incógnita

$$x^2+25+x^2-10x-4x-30+6x+11=0$$

$$2x^2-8x+6=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

(a ojímetro!) $x=3,1$.

1º) $x=3$ $\quad y=5-x \quad y=5-3=2$ $\quad \boxed{(x,y)=(3,2)}$

2º) $x=1$ $\quad y=5-x \quad y=5-1=4$ $\quad \boxed{(x,y)=(1,4)}$

6) $\left.\begin{array}{l} 2^x-3^{y-1}=5 \\ 2^{x+1}+8\cdot 3^y=712 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2^x-3^{-1}3^y=5 \\ 2\cdot 2^x+8\cdot 3^y=712 \end{array}\right\}$ Llamo $2^x=a$, $2^y=b$

$\left.\begin{array}{l} a-\frac{1}{3}b=5 \\ 2a+8b=712 \end{array}\right|$ $\left.\begin{array}{l} 3a-b=15 \\ 2a+8b=712 \end{array}\right\}$ por reducción

$\left.\begin{array}{l} 24a-8b=120 \\ 2a+8b=712 \end{array}\right|$ $26a=832 \quad a=\frac{832}{26}=32$

$b=3a-15=3\cdot32-15=81$

$2^x=32=2^5 \quad x=5$

$2^y=81=3^4 \quad y=4$

$\boxed{(x,y)=(5,4)}$

5) $\left.\begin{array}{l} 2x^2-3y^2-4x+6y=6 \\ x^2+y^2+3x-2y=18 \end{array}\right\}$ multiplico la 2ª ecuac por +3 y las sumo:

$$\begin{array}{r} 2x^2-3y^2-4x+6y=6 \\ +3x^2+3y^2+9x-6y=54 \\ \hline 5x^2+5x=60 \end{array}$$

$5x^2+5x=60 \Rightarrow x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0$

(¡a ojímetro!) $x=-4, 3$

1º) $x=-4$ sustituimos por ej en la 2ª ecuac:

$x^2+y^2+3x-2y=18$; $(-4)^2+y^2+3(-4)-2y=18$

$16+y^2-12-2y=18$ $\quad y^2-2y-14=0$

$y=\dfrac{2\pm\sqrt{4+56}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{60}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{15}}{2}=1\pm\sqrt{15}$.

Soluciones $\boxed{(x,y)=\left|\begin{array}{l}(-4,1+\sqrt{15}) \\ (-4,1-\sqrt{15})\end{array}\right.}$

2º) $x=3$ sustituimos en la 2ª ecuac:

$x^2+y^2+3x-2y=18$; $3^2+y^2+9-2y=18$;

$9+y^2+9-2y=18$; $y^2-2y=0$ $\quad y(y-2)=0 \left\langle\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

Soluciones $\boxed{(x,y)=\left|\begin{array}{l}(3,0) \\ (3,2)\end{array}\right.}$

6) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ Fijémonos en que sólo aparecen $\log x$ y $\log y$: $\left.\begin{array}{l} \log x = a \\ \log y = b \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} 2a - 3b = 7 \\ a + b = 1 \end{array}\right\}$ por reducción

$$\begin{array}{r} 2a - 3b = 7 \\ 3a + 3b = 3 \\ \hline 5a = 10 \quad a = 2 \end{array}$$

$b = 1 - a = 1 - 2 = -1$

pero $\log x = a \quad \log x = 2 \Rightarrow x = 100$

$\log y = b \quad \log y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}$

$$\boxed{(x, y) = \left(100, \frac{1}{10}\right)}$$

7) $\begin{cases} x + y = 20 \longrightarrow \text{despejo por ej la } y = 20 - x \text{ y} \\ \log x + \log y = 2 \rightarrow \log xy = 2 \Rightarrow xy = 100 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ xy = 100 \end{array}\right\}$ queda de 2º grado. $y = 20 - x$

$x(20 - x) = 100$

$20x - x^2 - 100 = 0 \quad -x^2 + 20x - 100 = 0$

$x^2 - 20x + 100 = 0 \quad x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = 10$

pero $x = 10 \Rightarrow y = 20 - x \quad y = 20 - 10 = 10$

Solución $\boxed{(x, y) = (10, 10)}$