

8.- LÍMITES DE FUNCIONES

1.- DOMINIO DE DEFINICIÓN

- Halla el dominio de definición de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$
Solución: El dominio es $\mathbf{R} - \{2,3\}$
- Halla el dominio de definición de $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
Solución: El dominio es $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$.
- Halla el dominio de definición de $f(x) = x^3$
Solución: El dominio es \mathbf{R} .
- Calcula el dominio de definición de la función $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$
Solución: $[-5, \infty)$
- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+4}$
Solución: $(-\infty, -4) \cup (-4, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.- OPERACIONES CON FUNCIONES

- Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$, y $g(x) = x + 1$, define la función $(f-g)$. Calcula las imágenes de $1/2$, -1 y 0 mediante la función $f-g$.
Solución: $(f-g)(x) = 2x^2 - x - 2$, $(f-g)(1/2) = -2$, $(f-g)(-1) = 1$, $(f-g)(0) = -2$.
- Dadas las funciones $f(x) = -x+1$ y $g(x) = 2x+1$, define f/g . Calcula las imágenes de los números -1 , 1 y $1/2$ mediante $\frac{f}{g}$
Solución: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x+1}{2x+1}$, $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $(f/g)(-1) = -2$, $(f/g)(1) = 1$.
- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$
Solución: $\{-1, 1\}$
- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3-x}}$
Solución: $\mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$
- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
Solución: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- Sean $s(x) = x^2$ y $t(x) = \text{sen } x$, determina $(t \circ s)(x)$
Solución: $(t \circ s)(x) = \text{sen}(x^2)$.
- Sean $p(x) = 2^x$ y $t(x) = \text{sen } x$, expresa con las funciones $p(x)$ y $t(x)$, operadas con "+" y "o"
a) $f(x) = 2^{\text{sen } x}$ b) $f(x) = \text{sen}(2^x)$
Solución: a) $2^{\text{sen } x} = (p \circ t)(x)$ b) $\text{sen } 2^x = (t \circ p)(x)$.
- Sea la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ determina la función $f \circ f$
Solución: $(f \circ f)(x) = \frac{1+x}{2+x}$
- Sean la funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{Ln}(x)$ determina las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$
Solución: a) $(f \circ g)(x) = \text{Ln}^2 x$, $(g \circ f)(x) = \text{Ln}(x^2)$.

3.- FUNCIONES INVERSAS

15. Obtén la función inversa de $y = 3x - 5$
Solución: $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$
16. Calcula la función inversa de $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$
Solución: $f^{-1}(x) = (-x+3)^2 - 5$
17. Calcula la función inversa de $f(x) = \frac{6}{x+3}$
Solución: $f^{-1}(x) = \frac{6-3x}{x}$
18. Señala cuáles de las siguientes funciones son inversas de si mismas y representa sus gráficas:
 a) $y = x$ b) $y = -x$,
 c) $y = 2x-2$, d) $y = \frac{3}{x}$
 ¿Qué se puede decir de una función que es recíproca de si misma? Razona la respuesta.
Solución: a), b) y d)
19. Obtén la función inversa de $y = 3 + \sqrt{3+x}$
Solución: $f^{-1}(x) = (x-3)^2 - 3$

3.- CALCULO DE LÍMITES

20. Calcula los límites: a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x}{x-3}$, b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{x-3}$,
Solución: a) $+\infty$, b) $-\infty$.
21. Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x)$ siendo las funciones $f(x) = x^2+2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$
Solución: $\lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x) = \frac{34}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) = \frac{11}{3}$.
22. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$
Solución: No tiene, $+\infty$ a la derecha, $-\infty$ a la izquierda.
23. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2}$
Solución: $+\infty$
24. Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$
Solución: No tiene, $+\infty$ a la derecha, $-\infty$ a la izquierda.
25. ¿Tiene límite la función $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ en $x = 1$?
Solución: No tiene ya que son distintos los límites laterales
26. Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1-x^3}$
Solución: 0
27. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+2x-7)$
Solución: $+\infty$

28. Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1-x^2}$
 Solución: 0
29. Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2x - 4)$
 Solución: $+\infty$
30. Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x^3)$
 Solución: $+\infty$
31. Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{2x+1}$
 Solución: ∞ .
32. Calcula los límites:
 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{2x+1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x-4}$
 Solución: a) ∞ , b) 2.
33. Calcula los límites
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$
 Solución: a) $\frac{4}{3}$, b) 4
34. Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1)$,
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6)$
 Solución: a) $+\infty$, b) 0
35. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
 Solución: 1.
36. Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$
 Solución: $\frac{1}{2}$
37. Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-6x+5}$
 Solución: $-\frac{3}{4}$
38. Calcula $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{2x-4}}{x^2-16}$
 Solución: $\frac{1}{16}$
39. Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

5.- ASÍNTOTAS

Localiza las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

40. $y = \frac{2x+3}{x-2}$

Solución: AV: $x=2$, AH: $y=2$, AO: No tiene.

41. $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2}$

Solución: AV: $x = \pm\sqrt{2}$, AH: $y=1$, AO: No tiene.

42. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3}$

Solución: AV: $x=-3$, AH: No tiene, AO: $y = x-5$.

43. $y = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$

Solución: AV: no tiene, AH: No tiene, AO: $y=x+1$.

44. $y = \frac{x-1}{x+1}$

Solución: AV: $x=-1$ AH: $y=1$, AO: No tiene

45. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$

Solución: Asíntotas verticales: $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$; Asíntota oblicua: $y = x$.

46. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Solución: AV: $x=1$, AH: $y=0$, AO: No tiene

47. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

Solución: AV: No tiene, AH: No tiene, AO: No tiene

48. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

Solución: Asíntotas verticales: $x=2$, $x=-2$; Asíntota oblicua: $y = x$.

6.- CONTINUIDAD

49. 1.- Demuestra que la función f es discontinua en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

50. ¿Cuánto ha de valer a para que la siguiente función sea continua en \mathbf{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: $a = -8$

51. Halla a para que la siguiente función sea continua en \mathbf{R} .

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: $a = 0$

52. ¿Es continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en $x = 2$? ¿Por qué?

Solución: No, pues f no está definida en $x = 2$.

53. ¿Puede una función tener límite en un punto y no ser continua en dicho punto? Razona la respuesta con un ejemplo.

Solución: Sí, la función del ejercicio 40.

54. Determina la constante a para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x < 1 \\ ax + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$. Representa la función para este valor de a .

Solución: $a = -1$.

55. Halla los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-x}$$
 y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

Solución: Discontinuidad evitable en $x = 0$, discontinuidad inevitable en $x = 1$ y $x = 2$.

56. Halla los puntos de discontinuidad de $f(x) = -\frac{1}{x}$

Solución: en $x=0$ discontinuidad inevitable con salto infinito

57. Demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$

58. Estudia la discontinuidad de la función $f(x) = \frac{3x^2-9}{x-\sqrt{3}}$ en $x = \sqrt{3}$

Solución: discontinuidad evitable, valor verdadero $6\sqrt{3}$

59. Indica si la siguiente función tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución: $x = 3, x = 4$ inevitables con salto finito en ambos puntos.

60. Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ no es continua en $x = 1$ e indica que tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

Solución: evitable, valor verdadero $\frac{1}{5}$

61. Halla los puntos de discontinuidad de $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$

Solución: en $x = \pm\sqrt{3}$ discontinuidad inevitable con salto infinito.

7.- LÍMITES DE SUCESIONES

62. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{5}{n}$

b) $b_n = \frac{5+3n}{4n+1}$

c) $c_n = \frac{n^2+1}{5n}$

Solución: a) 0, b) $\frac{3}{4}$, c) $++$.

63. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$

b) $b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

Solución: a) 1, b) $\frac{1}{2}$.

64. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$

b) $b_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$

Solución: a) $+\infty$, b) 2.

65. Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$

b) $b_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

Solución: a) ∞ , b) 1.

66. Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a) $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$

b) $b_n = 1+(-1)^n$

Solución: a) No, b) No.

67. Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $b_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{1+\sqrt[3]{n}}$

Solución: a) 0, b) $+\infty$.

68. Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

b) $b_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

Solución: a) 0, b) 1.

69. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+2n+1}{2n^2-1} - \frac{n^2}{n-1} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n} \right)$

Solución: a) $-\infty$, b) -1.

70. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n})$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^2 + 5})$
 Solución: a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$.
71. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 3})$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5} - n)$
 Solución: a) 1 b) 0.
72. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{n-1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$
 Solución: a) 3, b) e.
73. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{6n+3}\right)^n$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{n^2+3n}$
 Solución: a) 0, b) e^4 .
74. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$
 Solución: a) $e^{\frac{1}{5}}$ b) $e^{-\frac{2}{3}}$.
75. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$
 Solución: a) e^5 b) $e^{\frac{9}{2}}$.
76. Dadas las sucesiones $a_n = n^2$ y $b_n = \frac{1}{n^2+1}$, estudia el límite de:
 a) $a_n + b_n$
 b) $a_n \cdot b_n$
 c) $\frac{a_n}{b_n}$
 Solución: a) $+\infty$ b) 1 c) $+\infty$.
77. Dadas las sucesiones $a_n = n + 3$ y $b_n = 2-n$, calcula los siguientes límites:
 a) $a_n + b_n$
 b) $a_n - b_n$
 c) $a_n \cdot b_n$
 d) $\frac{a_n}{b_n}$
 Solución: a) 5 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) -1.