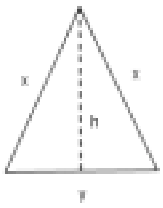
Ejercicios de optimización

1. **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30, ¿cuál es el de área máxima?**



Función a maximizar:

$$A = \frac{yh}{2}$$

Relacionar variables:

$$h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$2x + y = 30 \Rightarrow x = \frac{30-y}{2} \qquad 0 < y < 30$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{30-y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{\frac{(30-y)^2}{4} - \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(30-y)^2 - y^2}$$

Estudiamos la función:

$$A(y) = \frac{y\frac{1}{2}\sqrt{(30-y)^2 - y^2}}{2} = \frac{1}{4}y\sqrt{(30-y)^2 - y^2} = \frac{1}{4}\sqrt{900y^2 - 60y^3}$$

$$R(y) = 900y^2 - 60y^3$$

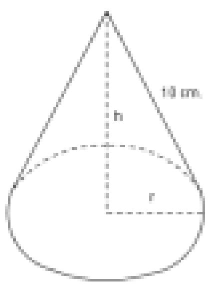
$$R'(y) = 1800y - 180y^2 = 180y(10-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 10 \end{cases}$$

Intervalos	$(0,10)$	10	$(10,30)$
signo R'	+	0	−
función R	$\nearrow$	Max r	$\searrow$

Máximo relativo en $y = 10$

Solución: el triángulo de área máxima es el que tiene de base $y = 10$ cm. y de lado $x = \frac{30-y}{2} = 10$ cm.

2. **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz** 10 **cm. y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



Función a maximizar:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Relacionar variables:

$$h^2 + r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 100 - h^2 \qquad 0 < h < 10$$

Estudiamos la función:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(100-h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h-h^3)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(100-3h^2) = 0 \Rightarrow h = +\sqrt{\frac{100}{3}} \text{ (El valor negativo no es solución)}$$

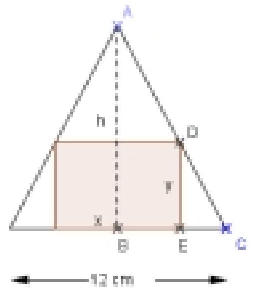
Intervalos	$\left(0, \sqrt{\frac{100}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{100}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{100}{3}}, 10\right)$
signo V'	$+$	0	$-$
función V	$\nearrow$	Max r	$\searrow$

Máximo relativo en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$

$r^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{200}{3}}$

Solución: El radio de la base debe ser $\sqrt{\frac{200}{3}} \simeq 8.16$ cm.

3. **En un triángulo isósceles de base 12 cm. (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**
   a) **Expresa el área, A, del rectángulo en función de la longitud de su base, x, y dí cual es el dominio de la función.**
   b) **Halla el valor máximo de esa función**
   a) Área en función de x:



$A = xy$

Como los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{DEC}$ son semejantes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12-x}{2}} \Rightarrow \frac{10}{y} = \frac{12}{12-x}$$

$$10(12-x) = 12y \Rightarrow y = \frac{10(12-x)}{12} = \frac{5(12-x)}{6} = \frac{60-5x}{6}$$

Luego:

$$A(x) = x\frac{60-5x}{6} = \frac{60x-5x^2}{6} \Rightarrow A(x) = \frac{60x-5x^2}{6} \qquad 0 < x < 12$$

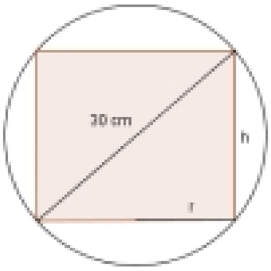
b) Máximo de la función $A(x)$

$A'(x) = \frac{60-10x}{6} = 0 \Rightarrow x = 6$

Intervalos	$(0,6)$	6	$(6,12)$
signo A'	$+$	0	$-$
función A	$\nearrow$	Max r	$\searrow$

Máximo en $x = 6$
Valor máximo de $A(x)$ es $A(6) = 30 \text{ cm}^2$

4. **Hallar el radio y la altura del ciclindro de volumen máximo inscrito en una esfera de 30 cm de diámetro.**



Función a maximizar:

$$V = \pi r^2 h$$

Relacionar variables:

$$h^2 + (2r)^2 = 900 \Rightarrow r^2 = \frac{900-h^2}{4} \qquad 0 < h < 30$$

Estudiamos la función:

$$V(h) = \pi \frac{900 - h^2}{4} h = \frac{\pi(900h - h^3)}{4}$$

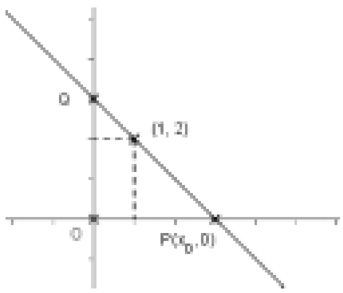
$$V'(h) = \frac{\pi}{4}(900 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \pm 10\sqrt{3} \qquad \text{(El valor negativo no es solución)}$$

Intervalos	$\left(0, 10\sqrt{3}\right)$	$10\sqrt{3}$	$(6, 30)$
signo A'	$+$	0	$-$
función A	$\nearrow$	Max r	$\searrow$

Máximo para $h = 10\sqrt{3}$
$r^2 = \frac{900-300}{4} = 150 \Rightarrow r = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$
Solución: El volumen es máximo para $h = 10\sqrt{3}$ cm y $r = 5\sqrt{6}$ cm

5. **Una recta que pasa por el punto** $(1, 2)$ **determina sobre los semiejes positivos, los segmentos** OP **y** OQ. **Determinar:**
   a) **El triángulo** $\overset{\triangle}{OPQ}$ **de área mínima.**
   b) **La recta para la cual** $OP + OQ$ **es mínimo**

a) El triángulo $\overset{\triangle}{OPQ}$ de área mínima.



Función a minimizar:

$$A = \frac{x_0 \cdot |OQ|}{2} \qquad x_0 > 1$$

Relacionar variables:
Recta que pasa por $P(x_0, 0)$ y $(1, 2)$:

$$\left.\begin{array}{l} Punto : A(1,2) \\ Pendiente : m = \frac{2-0}{1-x_0} = \frac{2}{1-x_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y-2 = \frac{2}{1-x_0}(x-1) \\ y = \frac{2}{1-x_0}x - \frac{2x_0}{1-x_0} \end{array}$$

Intersección de la recta con el eje OY: $(x = 0)$

$$y = -\frac{2x_0}{1-x_0}$$

Por tanto las coordenads del punto Q son:

$$Q = \left(0, -\frac{2x_0}{1-x_0}\right)$$

Estudiamos la función:

$$A(x_0) = \frac{1}{2}x_0\left(-\frac{2x_0}{1-x_0}\right) = \frac{-x_0^2}{1-x_0}$$

$$A'(x_0) = \frac{-2x_0(1-x_0)+(-x_0^2)}{(1-x_0)^2} = \frac{-2x_0+x_0^2}{(1-x_0)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0(-2+x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ No es solución} \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Intervalos	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
signo A'	$-$	0	$+$
función A	$\searrow$	Min r	$\nearrow$

Mínimo relativo para $x_0 = 2 \Rightarrow P = (2,0)$ y $Q = (0,4)$

Solución: El triángulo de área mínima es el formado por los puntos $O(0,0)$, $P = (2,0)$ y $Q = (0,4)$

b) La recta para la cual $OP + OQ$ es mínimo:

Función a minimizar: $S = OP + OQ$

$$S(x_0) = x_0 + \left(-\frac{2x_0}{1-x_0}\right) = \frac{x_0(1-x_0)-2x_0}{1-x_0} = \frac{-x_0^2-x_0}{1-x_0}$$

$$S'(x_0) = \frac{(-2x_0-1)(1-x_0)+(-x_0^2-x_0)}{(1-x_0)^2} =$$

$$= \frac{-2x_0+2x_0^2-1+x_0-x_0^2-x_0}{(1-x_0)^2} =$$

$$= \frac{x_0^2-2x_0-1}{(1-x_0)^2} = 0 \Rightarrow$$

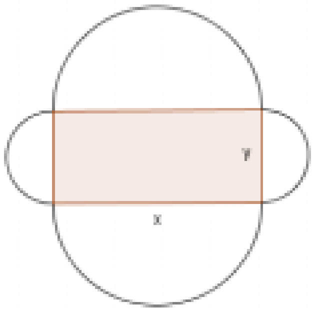
$$\Rightarrow x_0^2-2x_0-1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1+\sqrt{2} \\ x_0 = 1-\sqrt{2} \text{ No es solución } (x_0 > 1) \end{cases}$$

Intervalos	$\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$	$1+\sqrt{2}$	$\left(1+\sqrt{2}, +\infty\right)$
signo S'	$-$	0	$+$
función S	$\searrow$	Min r	$\nearrow$

Mínimo en $x_0 = 1+\sqrt{2}$

Solución: La recta para la cual $OP + OQ$ es mínimo es la recta que pasa por $(1,2)$ y $P\left(1+\sqrt{2},0\right)$

6. **En un rectángulo de 4 m de perímetro, se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. Halla las dimensiones de los lados para que el área de la figura resultante sea mínima.**



Función a minimizar:

$$A = xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Relacionar variables:

$$2x + 2y = 4 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$

Estudiamos la función:

$$\begin{aligned} A(x) &= x(2-x) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \\ &= 2x - x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}(4 + x^2 - 4x) = \\ &= 2x - x^2 + \frac{\pi}{4}(2x^2 - 4x + 4) = \\ &= 2x - x^2 + \frac{\pi}{2}(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

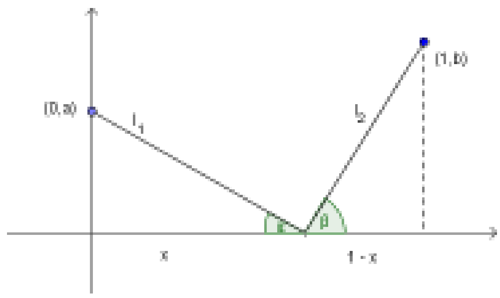
$$A'(x) = 2 - 2x + \frac{\pi}{2}(2x-2) = (2x-2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 1$$

Intervalos	$(0,1)$	1	$(1,2)$
signo A'	$-$	0	$+$
función A	$\searrow$	Min r	$\nearrow$

Mínimo en $x = 1$ e $y = 2 - x = 1$

Solución: las dimensiones de los lados para que el área de la figura resultante sea mínima son $x = 1$ m e $y = 1$ m

7. **Se traza una recta desde el punto $(0,a)$ hasta el eje OX y desde allí al punto $(1,b)$ otra, tal como indica la figura. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales.**



Podemos suponer en todo el razonamiento que $b > a$.

Función a minimizar:

$$L = l_1 + l_2$$

Relacionar variables:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (1-x)^2}$$

Estudiamos la función:

$$L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (1-x)^2} \qquad x \in [0,1]$$

$$L'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{2}\frac{2(1-x)(-1)}{\sqrt{b^2 + (1-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(1-x)}{\sqrt{b^2 + (1-x)^2}}$$

Calculamos las raices de la derivada:

$$L'(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(1-x)}{\sqrt{b^2 + (1-x)^2}} = 0$$

$$\left(x\sqrt{b^2 + (1-x)^2}\right)^2 = \left((1-x)\sqrt{a^2 + x^2}\right)^2$$

$$x^2\left(b^2 + (1-x)^2\right) = (1-x)^2(a^2 + x^2)$$

$$x^2b^2 + x^2(1-x)^2 = a^2(1-x)^2 + x^2(1-x)^2$$

$$x^2b^2 - a^2(1-x)^2 = 0$$

$$x^2b^2 - a^2(1 - 2x + x^2) = 0$$

$$x^2b^2 - a^2 + 2a^2x - a^2x^2 = 0$$

Obtenemos la ecuación de segundo grado en x:

$$(b^2 - a^2)x^2 + 2a^2x - a^2 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-2a^2 \pm \sqrt{4a^2b^2}}{2(b^2 - a^2)} = \frac{-a^2 \pm ab}{b^2 - a^2} = \frac{-a(a \pm b)}{(b+a)(b-a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{b+a} \\ x = \frac{-a}{b-a} \text{ No es solución ya que } \frac{-a}{b-a} \notin [0,1] \end{cases}$$

El estudio del crecimiento-decrecimeinto de la función es:

Intervalos	$\left[0,\frac{a}{b+a}\right)$	$\frac{a}{b+a}$	$\left(\frac{a}{b+a},1\right]$
signo L'	$-$	0	$+$
función L	↘	Min r	↗

Luego en $x = \frac{a}{b+a}$ hay un mínimo relativo y absoluto.
Veamos ahora que para $x = \frac{a}{b+a}$ se verifica que $\alpha = \beta$

$$x = \frac{a}{b+a}$$

$$1-x = 1-\frac{a}{b+a} = \frac{b+a-a}{b+a} = \frac{b}{b+a}$$

Calculamos la tangente de α y de β

$$\tan\alpha = \frac{a}{x} = \frac{a}{\frac{a}{b+a}} = b+a$$

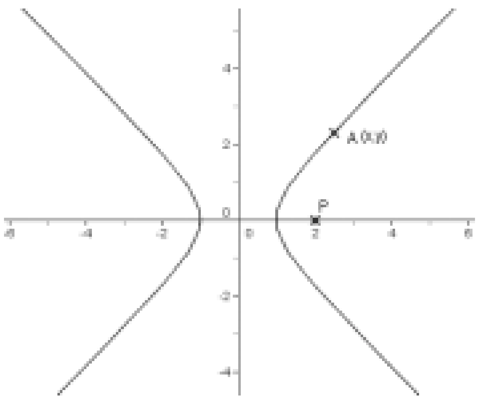
$$\tan\beta = \frac{b}{1-x} = \frac{b}{\frac{b}{b+a}} = b+a$$

Por tanto si $x = \frac{a}{b+a}$ entonces $\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \alpha = \beta$
Es decir, si la longitud es mínima entonce $\alpha = \beta$
También es cierto al contrario, es decir si $\alpha = \beta$ entonces la longitud es mínima:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \Rightarrow \\ \tan\alpha &= \tan\beta \Rightarrow \\ \frac{a}{x} &= \frac{b}{1-x} \Rightarrow \\ a(1-x) &= bx \\ a &= ax+bx \\ a &= (a+b)x \Rightarrow x = \frac{a}{b+a} \end{aligned}$$

Por tanto la longitud es mínima.

8. **Determina en la hipérbola $x^2-y^2 = 1$ un punto cuya distancia a $P(2,0)$ sea mínima.**



.

Función a minimizar:

$$D = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

Relacionar variables:

$$x^2-y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2-1$$

Estudiamos la función:

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2+x^2-1} = \sqrt{2x^2-4x+3} \text{ Para } x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

$$D'(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$$

Calculamos las raices de la derivada:

$$4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Estudiamos el signo de la derivada

Intervalos	$(-\infty, -1]$	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
signo D'	$-$	$\ddots \ddots$	0	$+$
función D	$\searrow$	$\ddots \ddots$	Min r	$\nearrow$

$D(-1) = \sqrt{2(-1)^2 - 4(-1) + 3} = \sqrt{9} = 3$

$D(1) = \sqrt{2(1)^2 - 4(1) + 3} = \sqrt{1} = 1$

Mínimo absoluto para $x = 1$

Solución: El punto de la hipérbola cuya distancia a $P(2, 0)$ es mínima es el punto $(1, 0)$.