

Ecuaciones Bicuadradas

Son ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ para resolverlas haremos el cambio de variable $y = x^2$, con lo cual la ecuación original se reduce a una de segundo grado.

Ej: 34º Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas.

$$9x^4 + 16 = 40x^2$$

$$9x^4 - 40x^2 + 16 = 0 \quad y = x^2$$

$$9y^2 - 40y + 16 = 0$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{18} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 576}}{18} =$$

$$= \frac{40 \pm \sqrt{1024}}{18} = \frac{40 \pm 32}{18} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Como $y = x^2$

$$1) y_1 = 4 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$2) y_2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{2}{3} \\ x_4 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0 \quad y = x^2$$

$$y^2 - 29y + 100 = 0$$

$$y = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2}$$

$$= \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2} \begin{cases} y_1 = 25 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Como $y = x^2$

$$1) 25 = x^2 \Rightarrow x \pm \sqrt{25} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

$$2) 4 = x^2 \Rightarrow x \pm \sqrt{4} \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 5) = 0$$

Producto de factores $a \cdot b = 0$

$$1) x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2) x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \sqrt{-5} \quad \cancel{\Delta} \\ \text{(No existe)}$$

Conclusión: Única raíz real $x=0$ doble.

$$x^4 + 21x^2 - 100 = 0 \quad y = x^2$$

$$y^2 + 21y - 100 = 0$$

$$y = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4(-100)}}{2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 400}}{2} =$$

$$= \frac{-21 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{-21 \pm 29}{2} \begin{cases} y_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ y_2 = \frac{-50}{2} = -25 \end{cases}$$

Como $y = x^2$

$$1) 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$2) -25 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$$

CONCLUSIÓN: Las únicas raíces reales son

$$x = 2$$

$$x = -2$$

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \quad y = x^2$$

$$y^2 + 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Como $y = x^2$