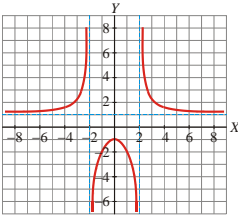


CÁLCULO GRÁFICO DE LÍMITES

EJERCICIO 1 : Sobre la gráfica de $f(x)$, halla :



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

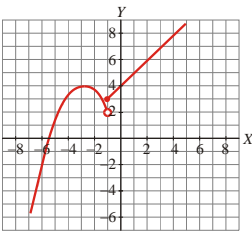
c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

EJERCICIO 2 : A partir de la gráfica de $f(x)$, calcula:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

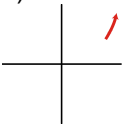
e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$ e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0$

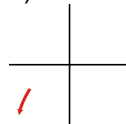
EJERCICIO 3 : Representa gráficamente los siguientes resultados: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

Solución:

a)

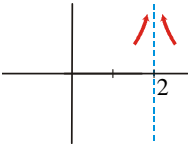


b)



EJERCICIO 4 : Representa los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

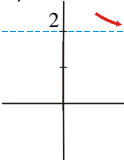
Solución:



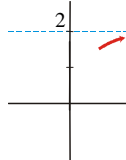
EJERCICIO 5 : Representa en cada caso los siguientes resultados: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

Solución:

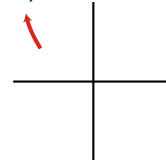
a)



o bien



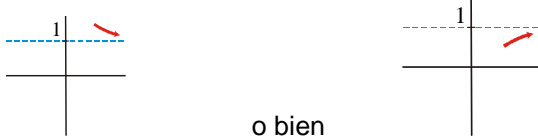
b)



EJERCICIO 6 : Representa gráficamente: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$

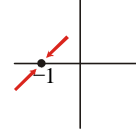
Solución:

a)



o bien

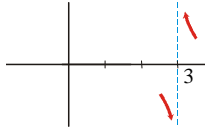
b) Por ejemplo:



EJERCICIO 7 : Para la función $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, sabemos que: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$

Representa gráficamente estos dos límites.

Solución:



CÁLCULO DE LÍMITES INMEDIATOS

EJERCICIO 8 : Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{6-3x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2 + 2x + 3} = \frac{4}{9 + 6 + 3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 - 9} = \sqrt{0} = 0$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$
 d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2 + x + 1} = \frac{-1}{4 + 2 + 1} = \frac{-1}{7}$ e) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{6-3x} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

EJERCICIO 9 : Calcula el límite de la función $f(x) = -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2}$ en $x=1$ y en $x=3$.

Solución:

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} \right) = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} \right) = -27 + \frac{3}{2} = -\frac{51}{2}$

EJERCICIO 10 : Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

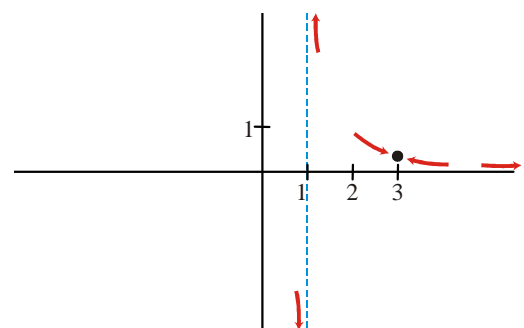
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x(x-1)}$

Hallemos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x(x-1)} = +\infty$



EJERCICIO 11 : Resuelve los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

Solución:

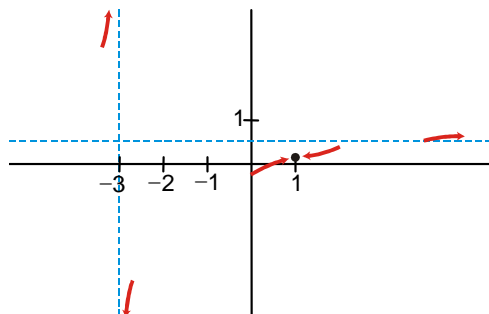
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{2(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{2(x+3)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{2(x+3)} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{2(x+3)} = -\infty$



EJERCICIO 12 : Halla los límites siguientes y representa gráficamente la información que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4}$

Solución:

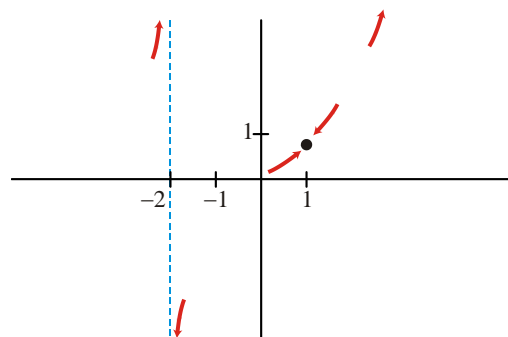
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 4x^3}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3}{x+2}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3}{x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^3}{x+2} = -\infty$



EJERCICIO 13 : Halla los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$

Solución:

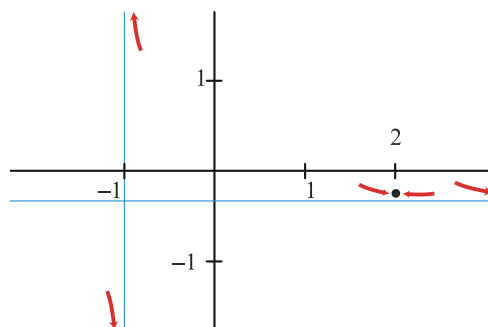
a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = -\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x+1)}{3(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{3(x+1)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{3(x+1)} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{3(x+1)} = +\infty$



EJERCICIO 14 : Calcula los límites siguientes y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

Solución:

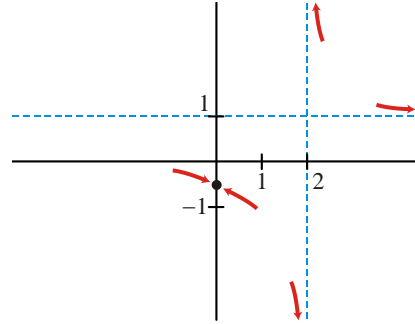
$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$



CÁLCULO DE LÍMITES

EJERCICIO 15 : Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{3} - 2x \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}$$

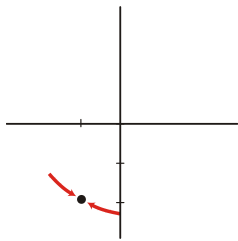
$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)^3$$

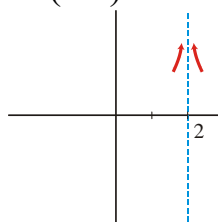
$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x+1}$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$$

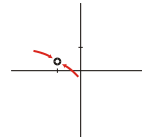


$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$



$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

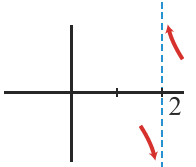


$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2}$$

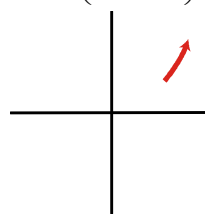
Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$

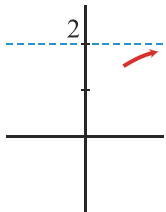
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$



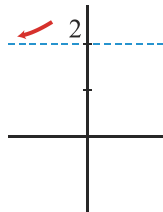
$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{3} - 2x \right) = +\infty$$



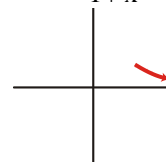
$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1} = 2$$



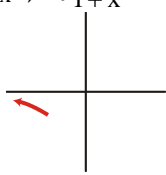
$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1} = 2$$



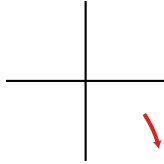
$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1+x^2} = 0$$



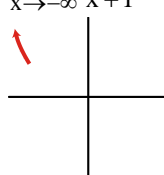
$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1+x^2} = 0$$



$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)^3 = -\infty$$



$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x+1} = +\infty$$



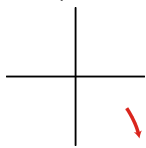
EJERCICIO 16: Halla el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones y representa gráficamente

la información que obtengas: a) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 1$

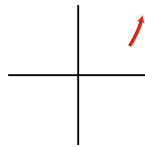
b) $f(x) = \frac{-3x^2 + 2x^3}{5}$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 1 \right) = -\infty$$



$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2x^3}{5} = +\infty$$



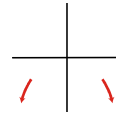
EJERCICIO 17 : Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de la siguiente función

y representa la información que obtengas: $f(x) = \frac{1-2x^2+4x}{3}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$$



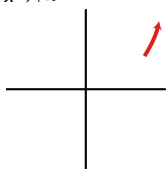
EJERCICIO 18 : Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)^2$

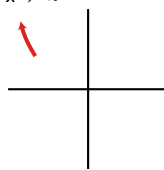
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4-x)^2$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)^2 = +\infty$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4-x)^2 = +\infty$$



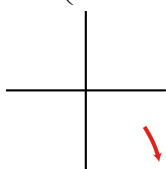
EJERCICIO 19 : Calcula los siguientes límites y representa el resultado que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + x \right)$

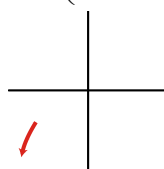
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^4}{4} + x \right)$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + x \right) = -\infty$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^4}{4} + x \right) = -\infty$$



CÁLCULO DE LÍMITES

EJERCICIO 20 : Calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - x^2 + 1]$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}]$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{\log x}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^x}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - x^2]$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - \log x]$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x^2 + 1}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - x^2 + 1] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3x^2 - \sqrt{x^9 + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x^{\frac{9}{2}} \right] = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{-x+1} = \frac{0}{-\infty} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - x^2] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - \log x] = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x}}{x^2 + 1} = \frac{0}{+\infty} = 0$

EJERCICIO 21 : Halla los límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{5x^2 - 2x - 3x}]$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right]$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 3x + 2x}]$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{3x^2 - 1} - 2x]$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}}$
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right]$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{5x^2 - 2x} - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{5x^2 - 2x} - 3x)(\sqrt{5x^2 - 2x} + 3x)}{\sqrt{5x^2 - 2x} + 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x - 9x^2}{\sqrt{5x^2 - 2x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 - 2x}{\sqrt{5x^2 - 2x} + 3x} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 1}{\sqrt{x^6 + 2x}} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{2x^4 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^3(x + 2)}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1 - x^4 - 2x^3}{x^3 + x + 2x^2 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = -2 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 3x + 2x}] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 3x - 2x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 2x})(\sqrt{x^2 + 3x + 2x})}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2x}} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{3x^2 - 1} - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 - 1} - 2x)(\sqrt{3x^2 - 1} + 2x)}{\sqrt{3x^2 - 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{3x^2 - 1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 1} + 2x} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3(x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 3x^2 - x^4 - x^3}{x^3 + x + x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

EJERCICIO 22 : Calcula:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 4} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{2x}{x^2 - 9} - \frac{x + 1}{x - 3} \right]$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(2x + 1)(x - 1)^2}{(3x - 2)(x - 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{2x + 1}{3x - 2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 4} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x + 4} - 2)(\sqrt{2x + 4} + 2)(\sqrt{x + 1} + 1)}{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} + 1)(\sqrt{2x + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + 4 - 4)(\sqrt{x + 1} + 1)}{(x + 1 - 1)(\sqrt{2x + 4} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{2x+4}+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-5}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \Rightarrow$ No existe

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{2x}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - (x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{-18}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = -\infty \Rightarrow$ No existe

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = \frac{9}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow$ No existe

EJERCICIO 23 : Calcula los límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+4}{x^2-x+6} \right)^{\frac{3x}{x-1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4} \right)^{\frac{x}{x-2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4} \right)^{\frac{2x}{x-3}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1} \right)^{\frac{3}{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-2x+3}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+4}{x^2-x+6} \right)^{\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+4}{x^2-x+6} - 1 \right) \cdot \frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6} \right) \cdot \frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x^2+3x-2)(3x)}{(x^2-x+6)(x-1)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x(x-2)(x-1)}{(x^2-x+6)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x(x-2)}{x^2-x+6}} = e^{\frac{3}{6}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4} \right)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4} - 1 \right) \cdot \frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x-2-x^2+2x-4}{x^2-2x+4} \right) \cdot \frac{x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x^2+5x-6)x}{(x^2-2x+4)(x-2)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-3)(x-2)}{(x^2-2x+4)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-3)}{x^2-2x+4}} = e^{\frac{2}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4} \right)^{\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4} - 1 \right) \cdot \frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2-x+1-4x-4}{4x+4} \right) \cdot \frac{2x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-5x-3}{4x+4} \cdot \frac{2x}{x-3}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(2x)}{4x+4}} = e^{\frac{42}{16}} = e^{\frac{21}{8}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1} \right)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1} - 1 \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x+1-5x-1}{5x+1} \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-8x}{5x+1} \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-2x+3}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-2x+3}{x+1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-2x+3-x-1}{x+1} \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

EJERCICIO 24 : Calcula estos límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2-3x}{-2x+1} \right)^{\frac{-x}{2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{2x+5} \right)^{2x^2-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)^{2x-3}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{2+3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{2x}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2-7}{3x^2+9x} \right)^x$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2} \right)^{x^2}$ j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x} \right)^{x+1}$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2-3x}{-2x+1} \right)^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+3x}{2x+1} \right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{2x+5} \right)^{2x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{2x+5} - 1 \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x-2x-5}{2x+5} \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^2+4}{2x+5}} = e^{-\infty} = 0$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-2}{4+5x} - 1 \right) \cdot \frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-2-4-5x}{4+5x} \right) \cdot \frac{2x}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{12+15x}} = e^{\frac{-12}{15}} = e^{-\frac{4}{5}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x-2}{-3x+5} \right)^{x^2-1} = \left(\frac{4}{3} \right)^{+\infty} = +\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)^{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right)^{-2x-3} = 2^{-\infty} = 0$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{2+3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{2+3x^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{x+1}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-2}{4+6x^2}} = e^0 = 1$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 \right) \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2} \right) \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2-2}} = e^0 = 1$
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2-7}{3x^2+9x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-7}{3x^2-9x} \right)^{-x} = \left(\frac{4}{3} \right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{4} \right)^{+\infty} = 0$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x-1}{-3x+2} \right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x} \right)^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x} - 1 \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2-3-2x}{3+2x} \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x-5}{3+2x}} = e^{-\frac{5}{2}}$

EJERCICIO 25 : Halla los límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2-1} \right]$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{x^2-2x+1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{4+3x} \right)^{x+1}$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+2}}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x+1}{x-2} \right)$
- g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2+x+x} \right]$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} - \frac{3x^3}{x^2-1} \right)$ j) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{2x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x + x} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)^2 (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)(x+1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(x+1)} = +\infty \Rightarrow \text{Como son distintos} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x-1} = \frac{2}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x-1} = +\infty \Rightarrow \text{Como son distintos} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{4+3x} \right)^{x+1} = \left(+\infty \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{4+3x} - 1 \right) \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2-4-3x}{4+3x} \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x-6}{3x+4}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 + 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{-x^3 - 3x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{3/5}}{x} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x}{x^2 - 4} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - (x+1)(x+2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = \frac{-6}{(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 - 2}{x^2 - 4} = -\infty \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} =$$

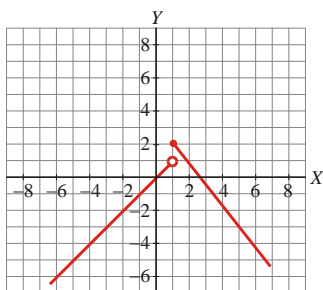
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} - \frac{3x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(x-1) - 3x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2 - 1} = -3$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{2x+2} \right)^{x-1} = \left(\infty \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{2x+2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-2x-2}{2x+2} \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{(2x+2)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x+2}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

CONTINUIDAD

EJERCICIO 26 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



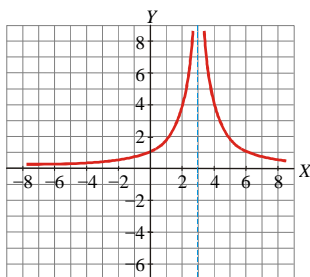
Di si es continua o no en $x = 1$ y en $x = 2$. Si en alguno de los puntos no es continua, indica cuál es la causa de la discontinuidad.

Solución:

En $x = 1$ no es continua porque presenta un salto en ese punto. Observamos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

En $x = 2$ sí es continua.

EJERCICIO 27 : A partir de la gráfica de $f(x)$ señala si es continua o no en $x = 0$ y en $x = 3$. En el caso de no ser continua, indica la causa de la discontinuidad.

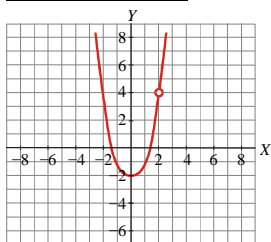


Solución:

En $x = 0$, sí es continua.

En $x = 3$ es discontinua porque no está definida, ni tiene límite finito. Tiene una rama infinita en ese punto (una asíntota vertical).

EJERCICIO 28 : Dada la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = 1$?

b) ¿Y en $x = 2$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica cuál es la razón de la discontinuidad.

Solución:

a) Sí es continua en $x = -1$.

b) No, en $x = 2$ es discontinua porque no está definida en ese punto. Como sí tiene límite en ese punto, es una discontinuidad evitable.

EJERCICIO 29 : Averigua si la siguiente función es continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array} \right\} \text{ Es continua en } x = 2 \text{ porque } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

EJERCICIO 30 : Comprueba si la siguiente función es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-2}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-2}{2} \right) = -1 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \text{Es continua en } x = 0 \text{ porque } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

EJERCICIO 31 : Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{En } x = 1: \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = k \end{cases} \\ f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array} \right\} k = 3$$

Solución: f continua en $x = 1$ si $k = 3$

EJERCICIO 32 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solución:

a) Continuidad:

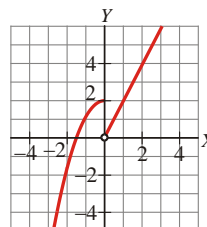
➤ f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{➤ En } x = 0: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0 \end{cases} \\ f(0) = 2 - 0^2 = 2 \end{array} \right\} f \text{ discontinua inevitable de salto finito(2) en } x=0$$

Representación: $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Si $x \leq 0$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 0$, es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	0^+	1	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	1	2	0	2	$+\infty$



b) Continuidad

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

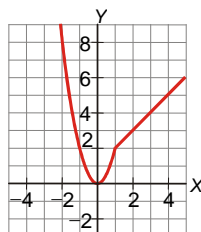
$$\text{➤ En } x = 1: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \end{cases} \\ f(1) = 2 \cdot 1^2 = 2 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 1$$

➤ Solución: f continua en todo \mathbb{R} .

Representación

- Si $x \leq 1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 1$, es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	1^+	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	8	2	0	2	2	3	$+\infty$



c) Continuidad

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

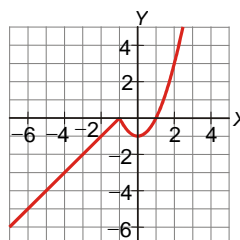
$$\text{➤ En } x = -1: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{cases} \\ f(-1) = -1 + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = -1$$

➤ Solución: f continua en todo \mathbb{R} .

Representación:

- Si $x \leq -1$, es un trozo de recta.
- Si $x > -1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

X	$-\infty$	-2	-1	-1^+	0	1	2	$+\infty$
Y	$-\infty$	-1	0	0	-1	0	3	$+\infty$



d) Continuidad

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

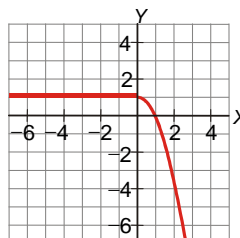
$$\text{➤ En } x = 0: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{cases} \\ f(0) = 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 0$$

➤ Solución: f continua en todo \mathbb{R}

Representación:

- Si $x \leq 0$, es un trozo de recta horizontal.
- Si $x > 0$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

X	$-\infty$	-1	0	0	1^+	2	$+\infty$
Y	1	1	1	1	0	-3	$-\infty$



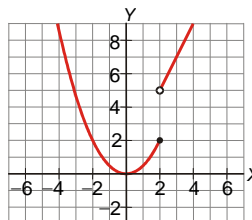
e) Continuidad:

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\text{➤ En } x=2: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2}{2} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 5 \end{cases} \\ f(2) = \frac{2^2}{2} = 2 \end{array} \right\} \text{ f discontinua inevitable de salto finito(3) en } x=2$$

Representación:

- Si $x \leq 2$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 2$, es un trozo de recta.



f) Continuidad:

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

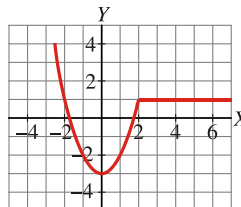
$$\text{➤ En } x=2: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1) = 1 \end{cases} \\ f(2) = 2^2 - 3 = 1 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 2$$

➤ Solución: f continua en todo \mathbb{R} .

Representación:

- Si $x \leq 2$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 2$, es un trozo de recta horizontal.

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	2^+	3	$+\infty$
Y	$+\infty$	1	-2	-3	-2	1	1	1	1



g) Continuidad

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

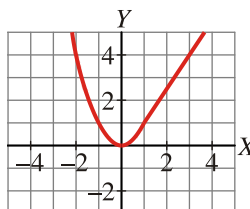
$$\text{➤ En } x=1: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x-1}{2} \right) = 1 \end{cases} \\ f(1) = 1^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ f continua en } x = 1$$

➤ Solución: f continua en todo \mathbb{R} .

Representación:

- Si $x \leq 1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 1$, es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	1^+	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	4	1	0	1	1	5/2	$+\infty$



h) Continuidad

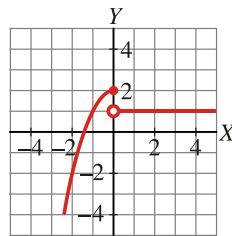
➤ f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{➤ En } x=0: \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 \end{cases} \\ f(0) = 2 - 0 = 2 \end{array} \right\} \text{ f discontinua inevitable de salto finito(1) en } x=0$$

Representación:

- Si $x \leq 0$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 0$, es un trozo de recta horizontal.

X	$-\infty$	-2	-1	0	2^+	3	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	1	2	1	1	1



i) Continuidad

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$

➤ En $x = -2$:

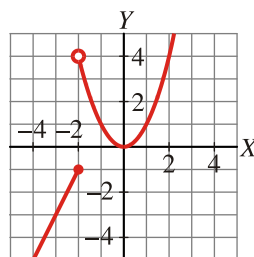
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2) = 4 \end{cases} \cdot f \text{ discontinua inevitable de salto finito(5) en } x = -2$$

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$

Representación

- Si $x \leq -2$ es un trozo de recta.
- Si $x > -2$ es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

X	$-\infty$	-3	-2	-2^+	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$-\infty$	-3	-1	4	1	0	1	4	$+\infty$



j) Continuidad

➤ f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

➤ En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \end{cases} \cdot f \text{ continua en } x = 0$$

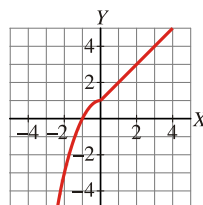
$f(0) = 1 - 0^2 = 1$

➤ Solución: f continua en todo \mathbb{R}

Representación:

- Si $x \leq 0$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)
- Si $x > 0$, es un trozo de recta.

X	$-\infty$	-2	-1	0	2^+	3	$+\infty$
Y	$-\infty$	-3	0	1	3	4	$+\infty$



ASÍNTOTAS

EJERCICIO 33 : Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Solución: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

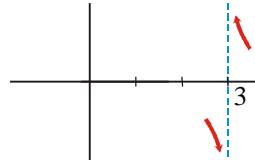


EJERCICIO 34 : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = +\infty$$

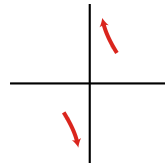


EJERCICIO 35 : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x(x + 2)}$

Calculamos los límites laterales:

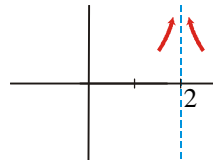
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x^2 + 2x} = +\infty$$



EJERCICIO 36 : Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{(x - 2)^2}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = +\infty$$

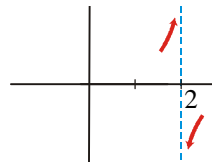


EJERCICIO 37 : Dada la función $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$, calcula el límite de $f(x)$ en $x = 2$. Representa la información que obtengas.

Solución: $\frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x + 1}{(x - 2)(x - 3)}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$



EJERCICIO 38 : Halla las asíntotas verticales de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

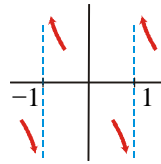
a) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

Solución:

a) • $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 1. \Rightarrow$ Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.
Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

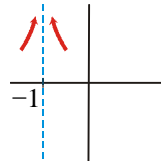
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$



- b) • $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ Solo tiene una asíntota vertical: $x = -1$
 Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$



EJERCICIO 39 : Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$

b) $f(x) = (3-x)^3$

c) $f(x) = \frac{1-x^4}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{2x^3+x}{1-x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = -\infty$

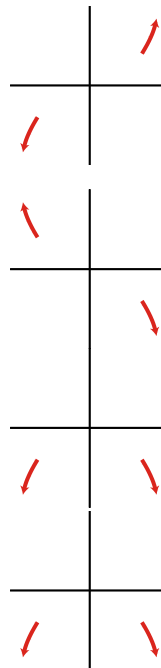
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)^3 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)^3 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^4}{x^2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4}{x^2} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x}{1-x} = -\infty$

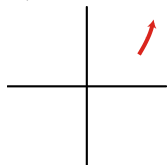
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+x}{1-x} = -\infty$



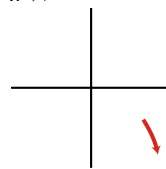
EJERCICIO 40 : Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow +\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas: a) $f(x) = (x+2)^4$ b) $f(x) = x - x^2$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^4 = +\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) = -\infty$

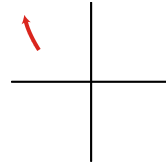
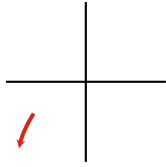


EJERCICIO 41 : Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow -\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas: a) $f(x) = (x-1)^3$ b) $f(x) = x^2 - x$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)^3 = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = +\infty$



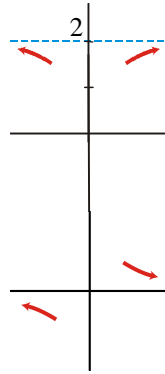
EJERCICIO 42 : Calcular las asíntotas horizontales de estas funciones y representa los resultados que obtengas:

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 2}$

Solución:

$$a) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{A.V. } y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 2 \\ f(-100) < 2 \end{cases}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2x^2 + 2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{2x^2 + 2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{A.V. } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 0 \\ f(-100) < 0 \end{cases}$$



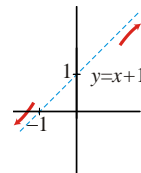
EJERCICIO 43 : Las siguientes funciones tienen una asíntota oblicua. Hállala y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$ b) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$

Solución: $y = mx + n$

$$a) \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2x}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x}{x + 1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} y = x + 1 \Rightarrow$$

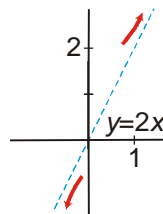
Asíntota oblicua : $y = x + 1 \begin{cases} f(100) < A \sin t(100) \\ f(-100) > A \sin t(-100) \end{cases}$



$$b) \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} y = 2x \Rightarrow$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

$\begin{cases} f(100) > A \sin t(100) \\ f(-100) < A \sin t(-100) \end{cases}$



EJERCICIO 44 : Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2}$

Solución:

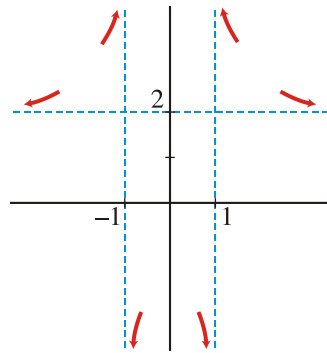
a)

- Asíntotas verticales: Puntos que anulan el denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \end{cases} \quad x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 2 \\ f(-100) > 2 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2$

- Representación:



b)

- Asíntota vertical: Puntos que anulan el denominador $\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 1 \\ f(-100) > 1 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = 1$

- Representación:

