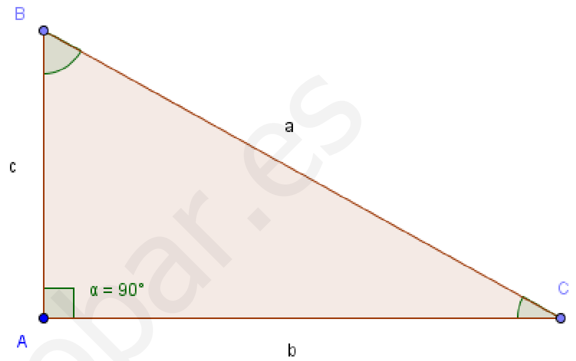
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo consiste en determinar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus tres ángulos.
Vamos a recordar primero la resolución para triángulos rectángulos y luego pasaremos a resolver triángulos en general.

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



En la resolución de triángulos rectángulos rectángulos teníamos en cuenta que:

- **La suma de los ángulos interiores de un triángulo**:
  $A+B+C=180^\circ$
  en el caso de triángulos rectángulos como el ángulo $A=90^\circ$ se tiene que: $B+C=90^\circ$, esto es, los ángulos B y C son complementarios.
- **El Teorema de Pitágoras**: $a^2=b^2+c^2$
- **Las razones trigonométricas**:

$$sen\ B=\frac{b}{a}=\cos C \qquad sen\ C=\frac{c}{a}=\cos B \qquad tg\ B=\frac{b}{c}=ctg\ C$$

Además, otros teoremas importantes relacionados con triángulos rectángulos son: el teorema del cateto y el de la altura

TEOREMA DE LA ALTURA

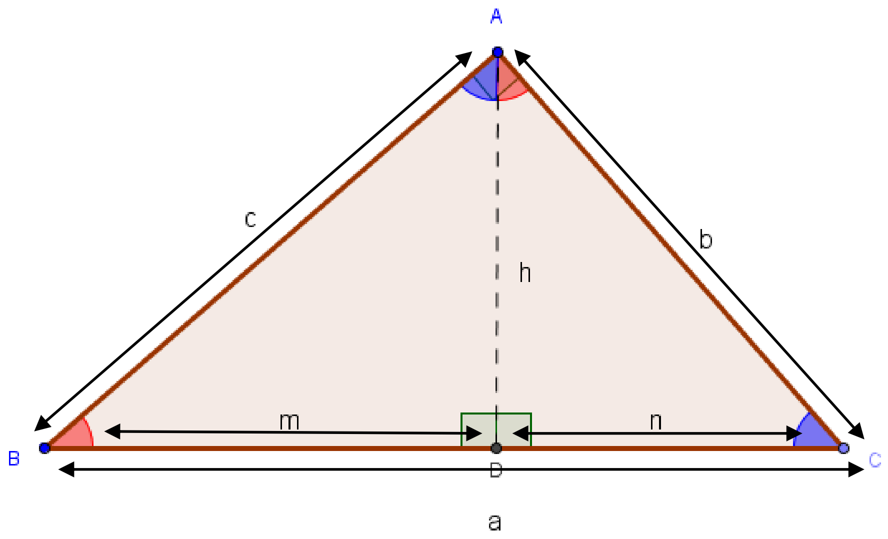
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa $h^2=m\cdot n \quad\rightarrow\quad h=\sqrt{m\cdot n}$

Demostración:
En este triángulo rectángulo (en A) hemos trazado la altura por el vértice A, consideremos los triángulos **ABD** y **ADC**, **son semejantes por ser iguales sus ángulos interiores**, entonces aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{h}{m}=\frac{n}{h}$$

$$h^2=m\cdot n$$

$$h=\sqrt{m\cdot n}$$

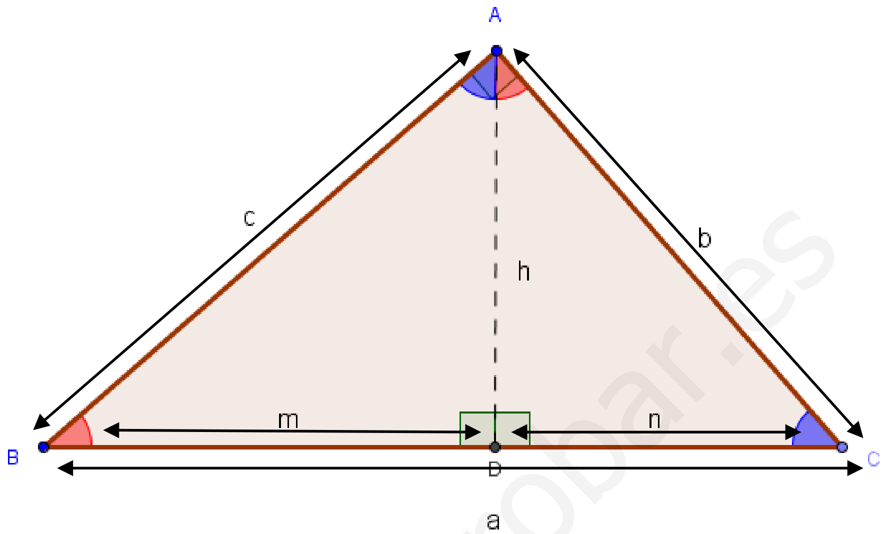


TEOREMA DEL CATETO

En un triángulo rectángulo cualquier cateto es la media geométrica entre la hipotenusa y su proyección sobre ella:

$c = \sqrt{a \cdot m}$

$b = \sqrt{a \cdot n}$



Demostración:
Al trazar la altura por el vértice A (recto) se tiene que los triángulos **ABC** y **ABD** tienen los ángulos interiores iguales, luego son semejantes, aplicando pues el teorema de Thales:

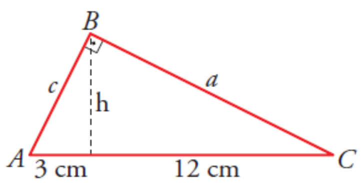
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = m \cdot a \rightarrow c = \sqrt{m \cdot a}$$

Análogamente, los triángulos **ABC** y **ACD** son semejantes de nuevo por ser iguales sus ángulos interiores, aplicando el teorema de Thales:

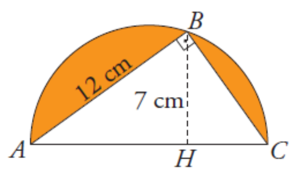
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = n \cdot a \rightarrow b = \sqrt{n \cdot a}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DEL CATETO Y DE LA ALTURA

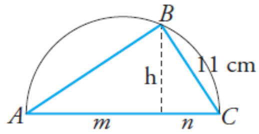
1 En el triángulo rectángulo ABC, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 3 cm y 12 cm. Halla h, c y a.



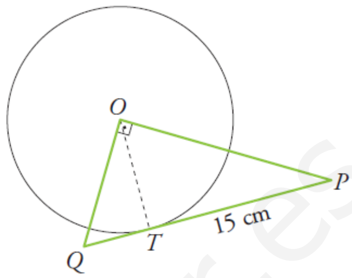
2 El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo. Del triángulo conocemos $\overline{AB}$ = 12 cm, y la altura sobre el lado AC, h = 7 cm. Halla el área de la parte comprendida entre el semicírculo y el triángulo.



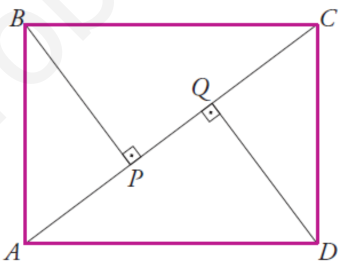
3 En una semicircunferencia de 10 cm de radio inscribimos un triángulo ABC en el que $\overline{BC} = 11$ cm. Calcula los segmentos m, n y la altura h.



4 Desde el punto P hemos trazado una tangente a la circunferencia de centro O y radio 9 cm. La distancia de P al punto de tangencia es de 15 cm. Halla los lados del triángulo POQ, rectángulo en O.



5 En el rectángulo $ABCD$, de lados 18 cm y 24 cm, hemos trazado desde los vértices B y D rectas perpendiculares a la diagonal AC, que la cortan en los puntos P y Q. Calcula la distancia $\overline{PQ}$.



10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS EN GENERAL

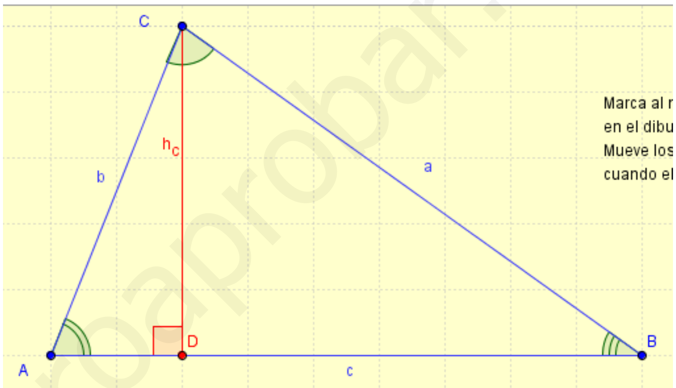
En la resolución de triángulos, en general, nos basaremos en el **teorema del seno y el teorema del coseno.**

TEOREMA SEL SENO

En cualquier triángulo el cociente entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto es constante.

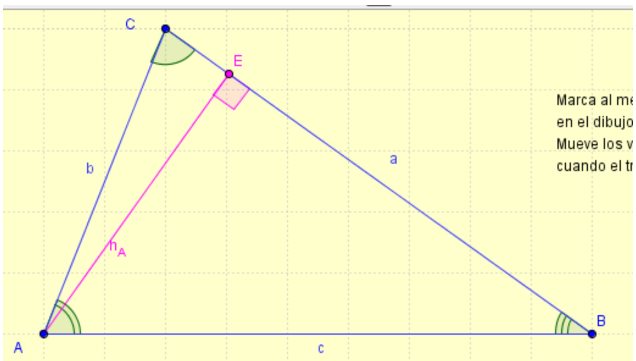
$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}$$

Demostración: trazamos por el vértice C la altura "h_C" y de este modo el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos, entonces, podemos poner:



$$\left.\begin{array}{l} sen\,A=\dfrac{h_C}{b}\rightarrow h_C=b\cdot sen\,A \\ sen\,B=\dfrac{h_C}{a}\rightarrow h_C=a\cdot sen\,B \end{array}\right\}\Rightarrow b\cdot sen\,A=a\cdot sen\,B\rightarrow \frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}\quad (1)$$

de igual forma, si hubiésemos trazado la altura desde A, h_A:



$$\left.\begin{array}{l} sen\,B=\dfrac{h_A}{c}\rightarrow h_A=c\cdot sen\,B \\ sen\,C=\dfrac{h_A}{b}\rightarrow h_A=b\cdot sen\,C \end{array}\right\}\Rightarrow c\cdot sen\,B=b\cdot sen\,C\rightarrow \frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}\quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce el teorema del seno:

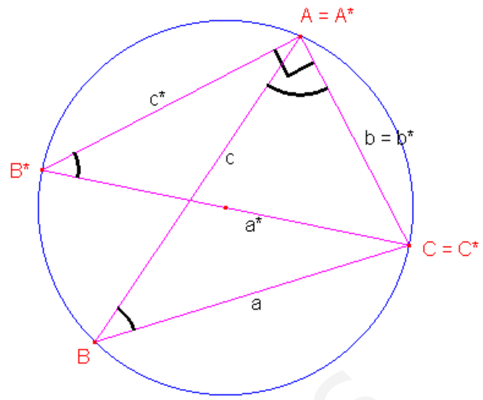
$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL TEOREMA DEL SENO

El teorema del seno tiene el siguiente significado geométrico:

El cociente entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto, que es constante, coincide con el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R}$$



Demostración:

Consideremos los triángulos: **ABC y A*B*C***

Se tiene que:

- Los ángulos correspondientes a los vértices B y B* son iguales, pues abarcan el mismo arco.
- El ángulo correspondiente al vértice A* vale 90 grados pues abarca 180 grados de arco, por tanto su lado opuesto es un diámetro.
- Aplicando el teorema del seno al triángulo A*B*C*:

$$\frac{a^*}{\operatorname{sen} A^*}=\frac{b^*}{\operatorname{sen} B^*}=\frac{c^*}{\operatorname{sen} C^*}\Rightarrow\frac{a^*}{\operatorname{sen} 90}=\frac{b^*}{\operatorname{sen} B^*}=\frac{c^*}{\operatorname{sen} C^*}\Rightarrow$$

$$\frac{a^*}{1}=\frac{b^*}{\operatorname{sen} B^*}=\frac{c^*}{\operatorname{sen} C^*}\qquad y\ \ como\ \ a^*=2R\qquad queda:$$

$$2R=\frac{b^*}{\operatorname{sen} B^*}=\frac{c^*}{\operatorname{sen} C^*}\qquad y\ \ como\ \ b^*=b\quad y\quad B^*=B\quad queda:$$

$$2R=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c^*}{\operatorname{sen} C^*}\qquad (1)$$

- Aplicando el teorema del seno al triángulo ABC:

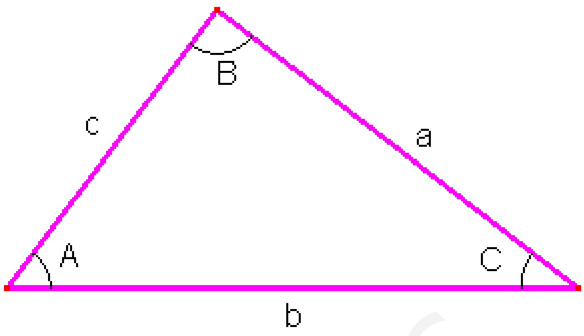
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}\qquad (2)$$

- De las expresiones (1) y (2) se deduce:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R$$

TEOREMA DEL COSENO (Teorema de Pitágoras Generalizado)

En cualquier triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

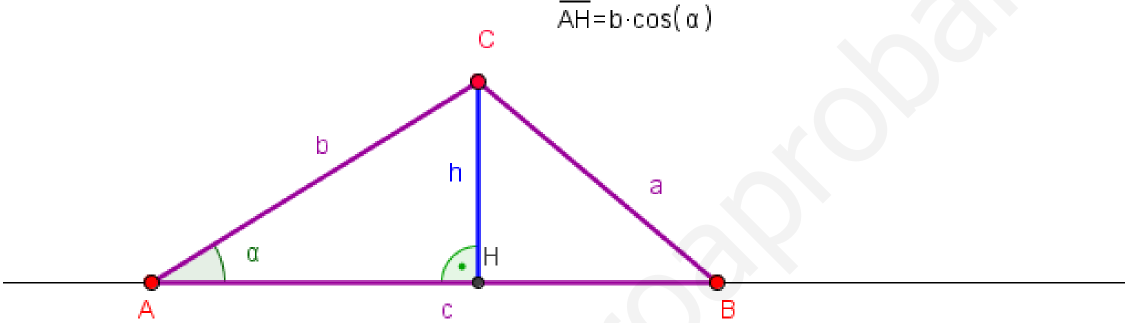


$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Demostración:

La proyección de b sobre c es: $\overline{AH}$

$\overline{AH} = b \cdot \cos(\alpha)$



$$a^2 = h^2 + \overline{HB}^2 = h^2 + \left(c - \overline{AH}\right)^2 = h^2 + c^2 + \overline{AH}^2 - 2 \cdot c \cdot \overline{AH}$$

$$b^2 = h^2 + \overline{AH}^2$$

Restando: $a^2 - b^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot \overline{AH}$

Despejando: $a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot \overline{AH} = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

CASOS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS (EN GENERAL)

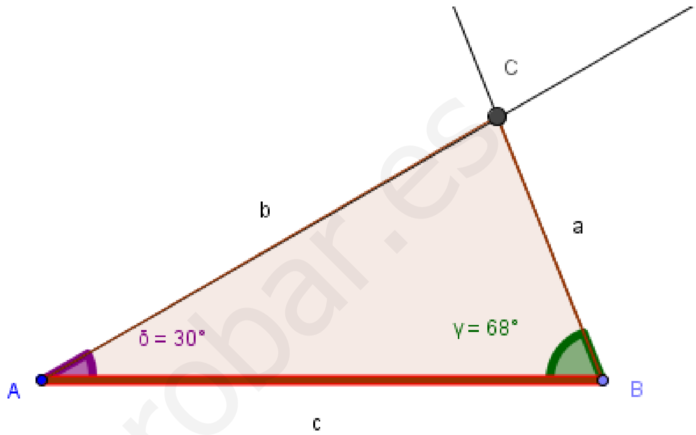
Como hemos dicho antes, resolver un triángulo consiste en hallar el valor de los elementos que no sean datos para así terminar de conocer el valor de sus tres lados y sus tres ángulos. Para resolver un triángulo son precisos tres datos, en el caso de triángulos rectángulos sólo son necesarios dos.

CASO 1: conocidos dos ángulos (**A** y **B**) y el lado común a ambos (**c**). Falta por determinar el ángulo **C** y los lados **a** y **b**.

$$\text{ángulo } C: \quad C = 180 - (A + B)$$

$$\text{lado } a: \quad \frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{c}{\text{sen}\, C} \rightarrow a = c \cdot \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, C}$$

$$\text{lado } b: \quad \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C} \rightarrow b = c \cdot \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, C}$$



EJEMPLO: Construye, con regla y compás, un triángulo con los datos siguientes y luego resuélvelo analíticamente.

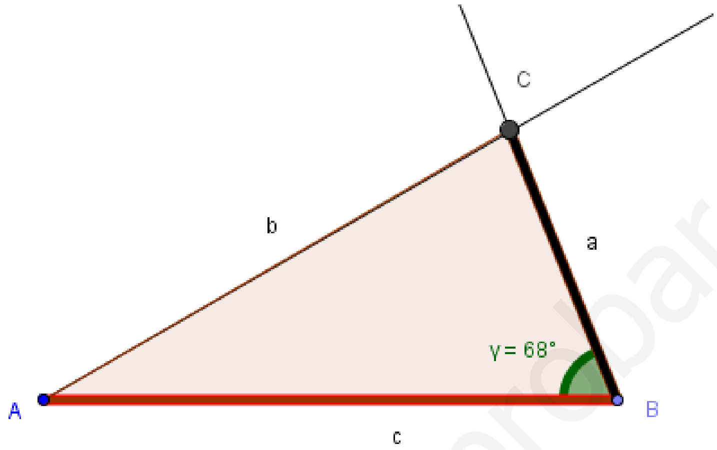
A = 32 **B = 73** **c = 4 cm**

CASO 2: conocidos dos lados (**a** y **c**) y el ángulo que forman (**B**). Falta por determinar los ángulos **A**, **C** y el lado **b**.

$$lado\ \ b: \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$$

$$ángulo\ A: \quad \frac{a}{sen\, A} = \frac{b}{sen\, B} \rightarrow \qquad sen\, A = \frac{a}{b} \cdot sen\, B \rightarrow A = arc\, sen\left(\frac{a}{b}\right) sen\, B$$

$$ángulo\ \ C: \quad C = 180 - (A + B)$$



EJEMPLO: Construye, con regla y compás, un triángulo con los datos siguientes y luego resuélvelo analíticamente.

a = 4 cm **c = 3 cm** **B = 52**

CASO 3: conocidos dos lados (**b** y **a**) y el ángulo opuesto a uno de ellos (**A**). Falta por determinar los ángulos **B**, **C** y el lado **c**.

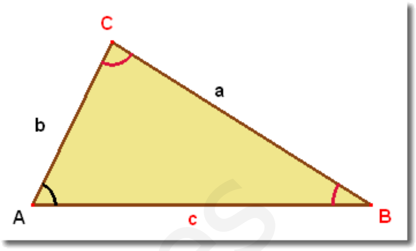
$$Para\ \ calcular\ \ el\ \ ángulo\ \ B: \ \frac{sen\,B}{b}=\frac{sen\,A}{a}\rightarrow\ sen\,B=\frac{b}{a}sen\,A\rightarrow B=arc\,sen\left(\frac{b}{a}\right)sen\,A$$

$puede\ suceder\ que:$

$sen\,B>1\Rightarrow no\ existe\ solución\ (no\ hay\ triángulo)$

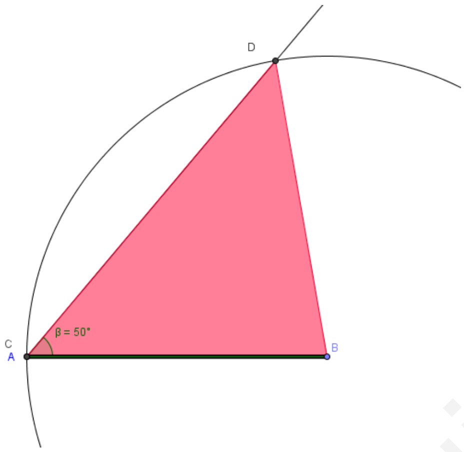
$sen\,B=1\Rightarrow sólo\ hay\ una\ solución\ (un\ sólo\ triángulo)$

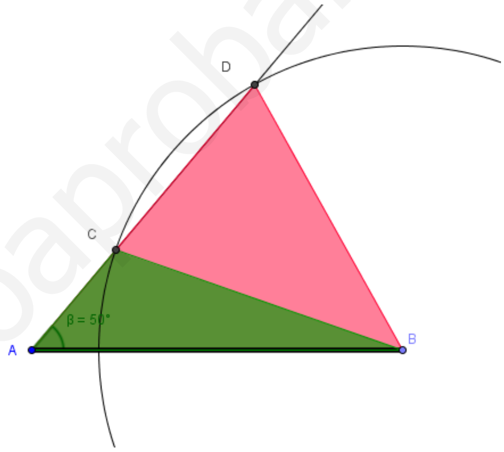
$sen\,B<1\Rightarrow hay\ dos\ soluciones\ (dos\ triángulos)$



$$Para\quad calcular\ \ el\ \ ángulo\ \ C:\ \ C=180-(A+B)$$

$$Para\quad calcular\ \ el\ lado\ \ c:\ \ \frac{c}{sen\,C}=\frac{a}{sen\,A}\rightarrow c=a\cdot\frac{sen\,C}{sen\,A}$$





EJEMPLO: Construye, con regla y compás, un triángulo con los datos siguientes y luego resuélvelo analíticamente.

b = 5 a = 4 B = 50

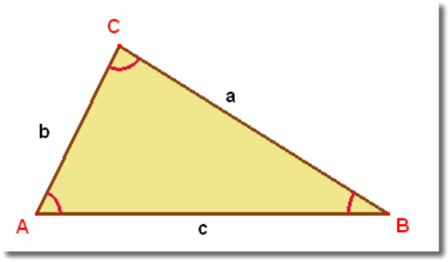
EJEMPLO: Construye, con regla y compás, un triángulo con los datos siguientes y luego resuélvelo analíticamente.

c = 3 a = 5 C = 25

EJEMPLO: Construye, con regla y compás, un triángulo con los datos siguientes y luego resuélvelo analíticamente.

b = 3 a = 4 B = 70

CASO 4: conocidos los tres lados (**a**, **b** y **c**). Falta por determinar los ángulos A, **B**, **C.**



Para que tres segmentos formen un triángulo siempre ha de verificarse que uno de ellos es menor que la suma de los otros dos.

$$\text{ángulo } A: \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \to \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \to$$

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{ángulo } B: \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \to \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \to$$

$$B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{ángulo } C: \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \to \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \to$$

$$C = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

EJEMPLO: Construye, con regla y compás, un triángulo con los datos siguientes y luego resuélvelo analíticamente.

a = 6 b = 5 c = 4

a = 6 b = 5 c = 2