A) *Hallar una ecuación de la circunferencia de centro* $C(3, -2)$ *y radio* $r = 3$.

Sol.: La condición de sus puntos es que la distancia a C sea 3.

$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 3$, *es decir,* $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 = 0$

B) *Hallar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:*

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$$

Sol.: $-2a = -8, -2b = 2$. *El centro es* $(4, -1)$.

$-3 = -r^2 + (a^2 + b^2) = -r^2 + 17$. *El radio es* $r = \sqrt{20}$

C) *Hallar el eje radical de las circunferencias de ecuaciones:*

$$x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5 = 0 \text{ y } x^2 + y^2 + 7x - 3y - 8 = 0$$

Sol.: Las potencias de un punto $A(x, y)$ *respecto a ambas serán:*

$P_1 = x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5$; $P_2 = x^2 + y^2 + 7x - 3y - 8$

Basta igualarlas para obtener la ecuación del eje radical:

$$x - 6y - 13 = 0$$

D) *Hallar el centro radical de las circunferencias de ecuaciones:*

C_1: $x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0$;
C_2: $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 5 = 0$;
C_3: $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

Sol.: Basta hallar dos ejes radicales y calcular su punto de intersección.

Eje radical de C_1 *y* C_2: $x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = x^2 + y^2 + 2x + 3y + 5$

$$\Rightarrow 3x + y + 3 = 0$$

Eje radical de C_2 *y* C_3: $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 5 = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3$

$$\Rightarrow 4x + y + 2 = 0$$

Centro radical $C(1, -6)$. *Se puede comprobar que el otro eje radical* $2x + y + 4 = 0$ *también pasa por* C.

12. Escribe una ecuación de la circunferencia de radio $r = 4$ y centro $C(3, -2)$.

Sol.: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$

13. Halla el centro y radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 3y - 5 = 0$.

Sol.: $C\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, $r = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

15. Halla una ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(4, -2)$, $B(5, 5)$, $C(1, -3)$. (Debes hallar tres incógnitas, m, n y p, en la expresión $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$)

Sol.: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

16. Escribe una ecuación de la circunferencia de centro $C(1, 2)$ que pasa por el punto $P(5, 1)$.

Sol.: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$

---

19. Halla una ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$$

por el punto $P(3, 2)$.

Indicaciones: Recuerda que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de la derivada y de la función en ese punto. Deriva y despeja y'.

Sol.: $4x - 3y - 6 = 0$

---

21. Cuál es la potencia del punto $A(-3, 1)$ respecto de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y + 7 = 0$$

Sol.: $P = 6$

22. Halla el eje radical de las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$.

Sol.: $-3x + 2y - 1 = 0$

23. ¿Cómo será el eje radical de dos circunferencias tangentes en un punto?

Sol.: La recta tangente a ambas en dicho punto.

---

25. Calcula los puntos de intersección de la recta de ecuación $3x - y - 4 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$.

Sol.: $(2, 2)$ y $(3, 5)$

---

29. Halla una ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Sol.: $4x + 3y - 21 = 0$ y $4x - 3y - 21 = 0$

30. Escribe una ecuación de la circunferencia que es concéntrica con la de ecuación $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.

Sol.: $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 5 = 0$

---

33. Halla unas ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$ que sean paralelas a la recta de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$.

Sol.: $3x - 2y + 10 = 0$; $3x - 2y - 10 = 0$

Ejemplos

A) *Hallar la ecuación reducida de la elipse de semieje mayor vertical* $a = 5$ *y excentricidad* $e = 0,6$.

Sol.: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{c}{5} = 0,6 \Rightarrow c = 3$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

La ecuación pedida será $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, *ya que el eje mayor es vertical.*

B) *Hallar los elementos notables de la elipse de ecuación* $9x^2 + 16y^2 - 4 = 0$.

Sol.: Para obtener la ecuación reducida pasamos el término independiente al segundo miembro y dividimos entre 4 para que sea 1:

$$\frac{9x^2}{4} + \frac{16y^2}{4} = \frac{4}{4} \rightarrow \frac{9x^2}{4} + 4y^2 = 1.$$

Pasamos 9 y 16 a los denominadores: $\dfrac{x^2}{4/9} + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$ *ya que es la ecuación reducida.*

Por tanto $a^2 = \dfrac{4}{9}$; $b^2 = \dfrac{1}{4}$. *Semiejes* $\rightarrow a = \dfrac{2}{3}$; $b = \dfrac{1}{2}$

Vértices $\rightarrow \left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)\left(0, \dfrac{1}{2}\right)\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

Semidistancia focal $\rightarrow c = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{6}$; *Focos* $\rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{7}}{6}, 0\right)\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{6}, 0\right)$

Excentricidad $\rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} = 0,66.$

C) *Hallar los semiejes y el centro de la elipse de ecuación*

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y - 104 = 0$$

Sol.: Buscamos una ecuación de la forma $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$

Dividimos por 9 y por 4 para que los coeficientes de x^2 *e* y^2 *sean 1.*

$$\frac{x^2}{4} - x + \frac{y^2}{4} + \frac{2y}{9} - \frac{26}{9} = 0$$

$$\frac{x^2 - 4x}{4} + \frac{y^2 + 2y}{9} - \frac{26}{9} = 0.$$

Los coeficientes de x *y de* y *deben ser* $-2x_0$ *y* $-2y_0$

Luego $(x_0, y_0) = (2, -1)$. Para hallar a y b hay que conseguir primero que el término independiente sea 1.

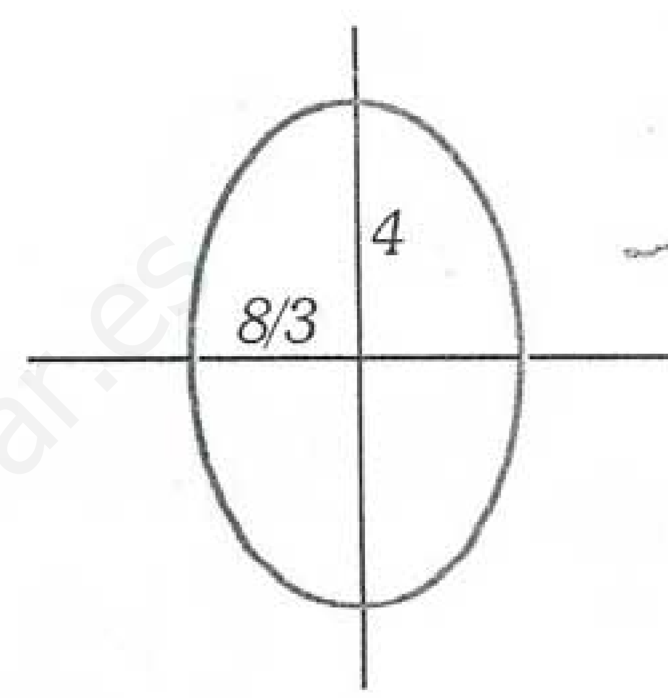
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = t \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{4} + \frac{y^2+2y+1}{9} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4x}{4} + \frac{4}{4} + \frac{y^2+2y}{9} + \frac{1}{9} - \frac{26}{9} = 0$$

$$t = \frac{26}{9} - \frac{1}{9} - 1 = \frac{16}{9}. \quad \text{Luego} \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{64/9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

El centro es $C(2, -1)$ y los semiejes $\frac{8}{3}$ y 4.



D) Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{18} = 1$$

en el punto $(2, -3)$.

Sol.: La pendiente de dicha recta será el valor de y' en ese punto.

Derivamos : $\frac{2x}{2} + \frac{2yy'}{18} = 0.$

Sustituimos el punto $(2, -3)$: $2 - \frac{y'}{3} = 0$; $y' = 6$.

Por la ecuación punto-pendiente, $y + 3 = 6(x - 2)$.

La ecuación pedida es $y - 6x + 15 = 0$.

34. Halla una ecuación de la elipse formada por los puntos cuya suma de distancias a $F_1(1, 0)$ y $F_2(3, 2)$ es igual a 12.

Sol.: $35x^2 + 35y^2 - xy - 138x - 66y - 1\,053 = 0$

Halla una ecuación de las elipses determinadas por los siguientes datos:

35. $a = 5$, $b = 2$, semieje mayor horizontal y centro en el origen.

Sol.: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

36. $b = 9$, $e = 0{,}8$, semieje mayor horizontal y centro en el origen.

Sol.: $\frac{x}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$

37. Focos: $F(-1, 0)$ y $F(3, 0)$; $b = 4$ y semieje menor vertical.

Sol.: $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

38. Centro $C(3, 2)$, $a = 10$, $e = 0{,}6$ y eje mayor vertical.

Sol.: $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$

40. Halla los elementos fundamentales de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Sol.: $a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{5}$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; *eje mayor vertical;*

Focos: $\left(0, \sqrt{5}\right)$, $\left(0, -\sqrt{5}\right)$; *Vértices:* $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$;

Centro $(0, 0)$

41. Halla los elementos fundamentales de la elipse de ecuación

$$x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$

Sol.: $a = 3$; $b = \frac{3}{2}$; $c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *eje mayor horizontal;*

Focos: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ *Vértices:* $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Centro $(0, 0)$

42. Un punto de la elipse de ecuación $2x^2 + 5y^2 - 8 = 0$ dista 3 unidades de uno de los focos. ¿Cuánto dista del otro?

Sol.: 1

43. ¿En qué puntos la tangente a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{5}=1$ es paralela a la recta de ecuación $x-6y+5=0$?

Sol.: $(-3, 2)$ y $(3, -2)$

44. Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse de ecuación

$$x^2+3y^2-31=0$$

en el punto $A(-5, 2)$.

Sol.: $5x-6y+37=0$

45. Un satélite describe una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de sus focos. La distancia al centro de la Tierra en su perigeo (punto más cercano a la Tierra) es 4, y en su apogeo (punto más lejano) es 5 (en decenas de miles de kilómetros). Halla la ecuación reducida de la órbita.

Sol.: $\frac{4x^2}{81}+\frac{y^2}{20}=1$

Halla la ecuación de la órbita anterior pero colocando el origen en el centro de la Tierra.

Sol.: $\frac{(x-1/2)^2}{81/4}+\frac{y^2}{20}=1$

A) *Hallar la ecuación reducida de la hipérbola de distancia focal 20 y excentricidad $e=1,25$.*

Sol.: $2c=20 \Rightarrow c=10;\quad e=\frac{c}{a}=\frac{10}{a}=1,25 \quad\Rightarrow\quad a=8;$

$$b^2=c^2-a^2=100-64 \quad\Rightarrow b=6$$

La ecuación pedida es $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ *ó* $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ *ya que no se especifica si el eje real es vertical u horizontal.*

B) *Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación:*

$$4x^2-9y^2=36$$

Sol.: $4x^2-9y^2=36 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \quad\Rightarrow\quad a=3,\ b=4$

Las ecuaciones de las asíntotas son $y=\frac{4}{3}x,\ y=-\frac{4}{3}x.$

49. Halla una ecuación de la hipérbola formada por los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos $F_1\,(-2, 0)$ y $F_2\,(0, 5)$ es igual a 4.

Sol.: $48x^2 - 36y^2 - 80xy - 296x + 100y + 231 = 0$

50. Escribe la ecuación reducida de la hipérbola de asíntotas $3x - 4y = 0$, $3x + 4y = 0$ y semieje real horizontal $a = 8$.

Sol.: $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 0$

51. Halla los semiejes, focos y excentricidad de la hipérbola de ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Sol.: $a = 4,\ b = 3;\quad F\,(-5, 0)\,(5, 0);\quad e = \dfrac{5}{4}$

52. La curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x-3}$ es una hipérbola equilátera. ¿Cuál es su centro? Calcula sus semiejes, excentricidad y asíntotas.

Sol.: $C\,(3, 0);\quad a = b = \sqrt{2},\ c = 2,\ e = \sqrt{2},\ y = 0,\ x = 3$

53. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola de semiejes $a = 3$, $b = 5$ y centro $(4, 1)$? (No la desarrolles).

Sol.: $\dfrac{(x-4)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

54. Halla una ecuación de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{14} = 1$ en el punto $(3, -7)$.

Sol.: $y + 7 = -3\,(x - 3)$

Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la hipérbola

$$3x^2 - 4y^2 - 8 = 0$$

en el punto $(2, -1)$.

Sol.: $3x + 2y - 4 = 0,\ 2x - 3y - 7 = 0$

56. La distancia de un punto de la hipérbola $2x^2 - 9y^2 - 18 = 0$ a uno de los focos es 4. ¿Cuánto dista del otro foco?

Sol.: 10 ó 2

57. Calcula las asíntotas de la hipérbola equilátera $(x-3)(y+2)=5$.

Sol.: $x = 3$, $y = -2$

58. Halla unas ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

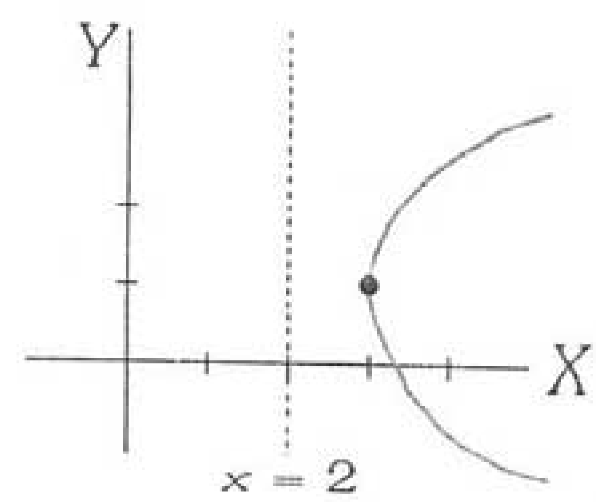
Sol.: $y = \frac{3}{2}x - 4$, $y = -\frac{3}{2} + 2$

Ejemplos

A) *Hallar la ecuación de la parábola de directriz $x = 2$ y vértice $A(3, 1)$. Represéntala aproximadamente.*

Sol.: La distancia del punto (3, 1) a la recta $x - 2 = 0$ es $3 - 2 = 1$, luego p (distancia foco-directriz) es 2.

$(y-1)^2 = 4(x-3)$; $y^2 - 2y - 4x + 13 = 0$



B) *Hallar los elementos notables de la parábola de ecuación:*

$$y^2 - 6y - 6x + 21 = 0$$

Sol.: Como la variable que va al cuadrado es y se trata de una parábola de la forma $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$. El término en y es $-2y_0y = -6y$, luego $y_0 = 3$.

La abscisa x_0 la hallamos sustituyendo y por y_0:

$$3^2 - 6 \cdot 3 - 6x_0 + 21 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

luego el vértice es $A(2, 3)$.

El término en x es $2px = 6x$ (se ha cambiado el signo al pasar al otro miembro), luego $p = 3$.

Como $p = 3$, $a = c = \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$, el foco es $F\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

La directriz es la recta $x = \frac{1}{2}$, ya que $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ y $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

C) *Hallar los elementos notables de la parábola de ecuación* $y = x^2 - 6x + 8$. *Calcular los puntos de corte con los ejes y hacer una representación aproximada de ella.*

Sol.: Como la variable que va al cuadrado es x, *se trata de una parábola de la forma:*

$$(x - x_0)^2 = 2py$$

En este caso:

$$2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow a = c = \frac{1}{4}$$

$$-2x_0x = -6x \Rightarrow x_0 = 3$$

Por tanto:

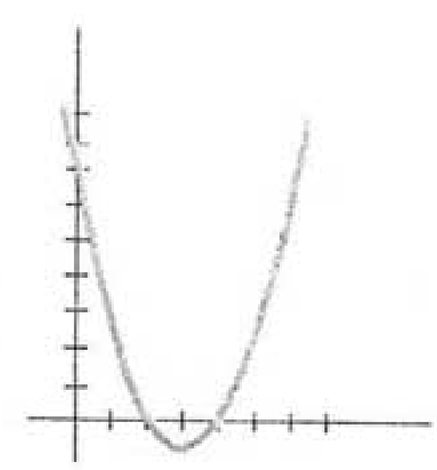
Vértice $A(3, -1)$

Foco $F\left(3, -\frac{3}{4}\right) \left(y_F = y_0 + a = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}\right)$

Directriz $y = -\frac{5}{4} \left(-1 - a = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}\right)$

Los puntos de corte $(0, y)$ y $(x, 0)$ *que se obtienen son*

$(0, 8)$, $(2, 0)$ y $(4, 0)$

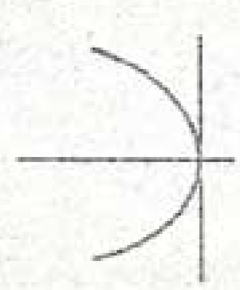


alla la ecuación de la parábola formada por los puntos que equidistan de la recta $3x - 4y = 0$ y del foco $F(1, 4)$.

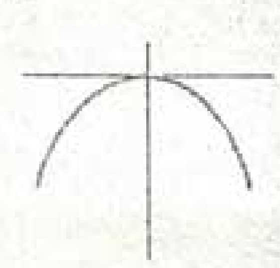
Sol.: $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 50x - 200y + 425 = 0$

62. Calcula los focos y representa aproximadamente las parábolas de ecuaciones $y^2 = -6x$, $x^2 = -4y$.

Sol.: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$



$(0, -1)$



63. Halla el vértice y el foco de la parábola de ecuación $y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$.

Sol.: $V(-1, 3)$ $F(2, 3)$

64. Escribe una parábola de foco $(5, -2)$ y directriz $x = 1$.

Sol.: $(y + 2)^2 = 8(x - 5)$

65. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 3x - 10$ en el punto $(4, -6)$.

Sol.: $y = 5x - 26$

66. Calcula los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 + 5x - 6$ con la recta $y - 2x - 6 = 0$.

Sol.: $(0, 6)$ $(-3, 0)$

67. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola de ecuación $y^2 - 3x - 16 = 0$ en el punto $(1, -5)$?

Sol.: $3x + 10y + 47 = 0$, $10x - 3y - 25 = 0$

68. Clasifica las siguientes cónicas:

a) $3x^2 + 5y^2 - 4x - 2 = 0$
b) $-2x^2 + 4y^2 - 3 = 0$
c) $3x^2 - 5y^2 + 2y - 5 = 0$
d) $-4x^2 - 7y^2 + 5y - 2x - 8 = 0$
e) $2x^2 + 5x - 3y + 8 = 0$
f) $-3x^2 - 3y^2 + 7x + 1 = 0$
g) $3y^2 + 7x - 2y + 1 = 0$
h) $x^2 - 3y^2 = 5$

Sol.: Elipses → a, d, f *(circunferencia). Hipérbolas* → b, c, h. *Parábolas* → e, g.

1 Dadas las ecuaciones de segundo grado siguientes, determinar cuáles son ecuaciones de circunferencias y hallar, en su caso, centro y radio.

a) $x^2 - y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 - x - y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8 = 0$
e) $x^2 + y^2 - xy + x - 1 = 0$

Solución Ecuación general de la circunferencia de centro (a, b) y radio r: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by +$ $+ a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

a) Coeficiente de $x^2 \neq$ coeficiente de y^2. No es circunferencia.

b) Coeficiente de $x^2 =$ coeficiente de y^2:

$$-2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}; \quad -2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - r^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{5}{8}$$

Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

c) Coeficiente de $x^2 =$ coeficiente de y^2:

$$-2a = -2 \Rightarrow a = 1; \quad -2b = -2 \Rightarrow b = 1$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$$

Circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio $\sqrt{2}$.

d) Coeficiente de $x^2 =$ coeficiente de y^2:

$$-2a = -4 \Rightarrow a = 2; \quad -2b = -2 \Rightarrow b = 1$$
$$a^2 + b^2 - r^2 = 8 \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - 8 = 4 + 1 - 8 = -3 < 0$$

No es circunferencia.

e) No es circunferencia, por tener término en xy.

---

2 Hallar la ecuación de la circunferencia α definida por los puntos $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ y $C(0, 4)$.

Solución Si $\alpha \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

$$\begin{aligned}
A \in \alpha &\Rightarrow 4 + 0 + 2a + 0 + c = 0 \Rightarrow 4 + 2a + c = 0 && [1]\\
B \in \alpha &\Rightarrow 4 + 0 - 2a + 0 + c = 0 \Rightarrow 4 - 2a + c = 0 && [2]\\
C \in \alpha &\Rightarrow 0 + 16 + 0 + 4b + c = 0 \Rightarrow 16 + 4b + c = 0 && [3]
\end{aligned}$$

$$[1] - [2] \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$[2] - [3] \Rightarrow -12 - 2a - 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

Si $a = 0$ y $b = -3 \Rightarrow c = -4$; por tanto:

$$\alpha \equiv x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$$

---

3 Hallar la ecuación de la circunferencia α de centro C, situado en la recta $m \equiv$ $\equiv x - y - 2 = 0$, e incidente con los puntos $A(2, 1)$ y $B(3, 2)$.

Solución Si $\alpha \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, es $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
A \in \alpha &\Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b + c = -5 && [1]\\
B \in \alpha &\Rightarrow 9 + 4 + 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = -13 && [2]\\
C \in \alpha &\Rightarrow -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 2 = 0 \Rightarrow -a + b = 4 && [3]
\end{aligned}$$

$$[1] - [2] \begin{cases} a + b = -8 & [4] \\ -a + b = 4 & [3] \end{cases}$$

$$[3] + [4]: \quad 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = -6$$

Si $a = -6$, $b = -2 \Rightarrow c = 9$ y

$$\alpha \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$$

4 La recta $a \equiv x - 2y + 1 = 0$ es tangente en $T(-1, 0)$ a una circunferencia α, que pasa por el punto $P(3, 4)$. Hallar su ecuación.

Solución Sea m la perpendicular por T a la recta a y n la mediatriz del segmento PT. La intersección de m y n es el centro C de α.

El radio $r = \text{dist}(C, T)$.

Perpendicular por T a la recta a: $m \equiv 2x + y + 2 = 0$ [1].

Punto medio de PT: $M(1, 2)$.

Perpendicular por M a PT: $n \equiv x + y - 3 = 0$ [2].

Resolviendo el sistema formado por [1] y [2] se obtiene $C(-5, 8)$.

$r = \text{dist}(C, T) = \sqrt{80}$.

Por tanto es:

$$\alpha \equiv (x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 80$$

5 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(0, 0)$ y $Q(2, 0)$ y es tangente a la circunferencia $\alpha \in x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$.

Solución Sea $\beta \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ la circunferencia pedida.

$$P \in \beta \Rightarrow p = 0$$
$$Q \in \beta \Rightarrow 4 + 2m = 0 \Rightarrow m = -2$$

luego

$$\beta \equiv x^2 + y^2 - 2x + ny = 0$$

El centro de β es $C\left(1, -\frac{n}{2}\right)$ y el de α $C'(5, 3)$.

$$\text{dist}(C, P) = \text{radio de } \beta = \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}}$$

$$\text{dist}(C, C') = \sqrt{16 + \left(3 + \frac{n}{2}\right)^2} \qquad [1]$$

$$\text{dist}(C, C') = r_\beta + r_\alpha = \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}} + 4 \qquad [2]$$

Igualando [1] y [2]:

$\sqrt{16 + \left(3 + \frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}} + 4$, de donde operando se obtiene:

$$n = 0 \quad \text{y} \quad n = \frac{48}{7}$$

Las circunferencias

$$\beta_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{y} \quad \beta_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + \frac{48}{7}y = 0$$

son incidentes con P y Q, y tangentes a α.

6 Hallar la ecuación de la circunferencia α que pasa por los puntos de intersección de las ecuaciones $\beta \equiv x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0$ y $\gamma \equiv x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$ y tiene su centro en la recta $x - y = 0$.

Solución $$\beta \cap \gamma \equiv 16x + 32 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Para $x = -2 \Rightarrow 4 + y^2 - 24 + 11 = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$. $A(-2, 3)$ y $B(-2, -3)$ son los puntos de intersección de β y γ.

El centro de la circunferencia α es la intersección de la mediatriz de AB con $x - y = 0$.

Punto medio de AB: $M(-2, 0)$.

La ecuación de la mediatríz es $y = 0$.

La intersección con $y = x$ es $O(0, 0)$.

El radio $r = \text{dist}\,(O, A) = \sqrt{13}$.

Por tanto: $\alpha \equiv x^2 + y^2 = 13$.

---

7 Determinar la ecuación de la circunferencia α que pasa por el punto $A(1, 1)$ y es tangente a las rectas $m \equiv 4x + 3y - 2 = 0$ y $n \equiv 4x - 3y + 4 = 0$.

Solución Sea $C_\alpha(a, b)$ el centro y r el radio:

$$\text{dist}\,(C, m) = \frac{|4a + 3b - 2|}{5} = r \qquad [1]$$

$$\text{dist}\,(C, n) = \frac{|4a - 3b + 4|}{5} = r \qquad [2]$$

$$\text{dist}\,(C, A) = \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 1)^2} = r \qquad [3]$$

Igualando las distancias del mismo signo de [1] y [2]:

$$4a + 3b - 2 = 4a - 3b + 4 \Rightarrow b = 1$$

$$[1] = [3] \Rightarrow \frac{|4a + 3b - 2|}{5} = \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 1)^2}.$$

Si $b = 1$, es $\dfrac{|4a + 1|}{5} = \sqrt{(a - 1)^2} \Rightarrow$

$$(4a + 1)^2 = 25\,(a - 1)^2 \Rightarrow 9a^2 - 58a + 24 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$a = 6 \quad \text{y} \quad a = \frac{4}{9}$$

Por tanto, $C_1(6, 1)$ y $C_2\left(\dfrac{4}{9}, 1\right)$

$$C_1A = 5 \quad \text{y} \quad C_2A = \frac{5}{9}$$

El problema tiene dos soluciones.

Las ecuaciones pedidas son:

$$\alpha_1 \equiv (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$\alpha_2 \equiv \left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{81}$$

8 Hallar las ecuaciones de las circunferencias de radio 6 tangentes a la de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ en el punto de ella $P(4, 3)$.

Solución Los centros $C(a, b)$ están en la recta r, definida por $O(0, 0)$ y $P(4, 3)$: $r \equiv y = \frac{3}{4}x$.

$$\text{dist}\,(C, P) = 6 \Rightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 36 \qquad [1]$$

Como $b = \frac{3}{4}a$, se tendrá:

$$(a-4)^2 + \left(\frac{3}{4}a - 3\right)^2 = 36 \Rightarrow 25a^2 - 200a - 176 = 0$$

de donde

$$a = \begin{cases} \dfrac{44}{5} \Rightarrow y = \dfrac{33}{5} \\ -\dfrac{4}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Los centros son $C_1\left(\frac{44}{5}, \frac{33}{5}\right)$ y $C_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, y las ecuaciones pedidas:

$$\alpha_1 \equiv \left(x - \frac{44}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{5}\right)^2 = 36$$

$$\alpha_2 \equiv \left(x + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = 36$$

---

9 Los extremos de un segmento son los puntos $M(6, 2)$ y $N(14, 8)$. Hallar sobre la recta $r \equiv y - x = 0$ un punto P desde el que se vea el segmento MN bajo un ángulo de 90°.

Solución Los puntos P estarán en la circunferencia α de diámetro MN y en la recta $y = x$.

Punto medio de MN: $S(10, 5)$.

La circunferencia α tiene de centro S y radio $MS = NS = \sqrt{25}$, luego

$$\alpha \equiv (x-10)^2 + (y-5)^2 = 25$$

Intersección de α y γ:

$$\begin{cases} (x-10)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$$

de donde:

$$x = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$$

luego $P_1(10, 10)$ y $P_2(5, 5)$ son los puntos pedidos.

10 Hallar la ecuación de la circunferencia γ que pasa por el punto $A(1, 1)$ y por los de intersección de las circunferencias $\alpha \equiv x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$ y $\beta \equiv x^2 + y^2 - 4x + 16y + 43 = 0$.

Solución Intersección de α y β:

$$\alpha - \beta \equiv -16y - 64 = 0 \Rightarrow y = -4$$

Para $y = -4$ se obtiene $x^2 - 4x - 5 = 0$, de soluciones

$$x = \begin{cases} 5 \Rightarrow B(5, -4) \\ -1 \Rightarrow C(-1, -4) \end{cases}$$

Sea $\gamma \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$:

$$A \in \gamma \Rightarrow a + b + c = -2 \qquad [1]$$

$$B \in \gamma \Rightarrow 5a - 4b + c = -41 \qquad [2]$$

$$C \in \gamma \Rightarrow -a - 4b + c = -17 \qquad [3]$$

$$[1] - [2] \Rightarrow -4a + 5b = 39$$

$$[2] - [3] \Rightarrow 6a = -24 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = 11$$

$$a = -4 \text{ y } b = 11 \Rightarrow c = -9$$

Por tanto:

$$\gamma \equiv x^2 + y^2 - 4x + 11y - 9 = 0$$

---

11 Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $\alpha \equiv x^2 + y^2 - 5x + y + 6 = 0$, en los puntos de ordenada $y = 0$.

Solución $$y = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 3$$

$A(2, 0)$ y $B(3, 0)$ son los puntos de tangencia.

Centro de α: $C\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Pendiente de AC: $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_1' = 1$.

Recta perpendicular por A a AC:

$$y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0 \qquad [1]$$

Pendiente de BC: $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2' = -1$.

Recta perpendicular por B a BC:

$$y = -(x - 3) \Rightarrow x + y - 3 = 0 \qquad [2]$$

Las ecuaciones de las rectas pedidas son [1] y [2].

12 Dada la circunferencia $\alpha \equiv (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde $A(6, 0)$.

Solución Ecuación del haz de rectas de vértice A: $y = m(x-6)$ [1]

$$\alpha \equiv (x-2)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \qquad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2] y ordenando:

$$(1+m^2)\,x^2 - (12m^2 + 2m + 4)\,x + (36m^2 + 12m + 1) = 0$$

$$\Delta = (6m^2 + m + 2)^2 - (1+m^2)(36m^2 + 12m + 1) \qquad [3]$$

Si $y = m(x-6)$ ha de ser tangente a $\alpha \Rightarrow \Delta = 0$.

Operando en [3]: $12m^2 + 8m - 3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Por tanto, $y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{13}}{6}(x-6)$ son las ecuaciones de las rectas pedidas.

---

13 Dada la circunferencia $\alpha \equiv (x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$, hallar las ecuaciones de las tangentes a α paralelas a la recta $m \equiv 4x - 3y + 2 = 0$.

Solución Es $C_\alpha(3, -5)$ y $\lambda_m = \dfrac{4}{3}$.

Ecuación de la perpendicular por C a m:

$$y + 5 = -\frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow a \equiv 3x + 4y + 11 = 0$$

Intersección de a y α:

$$(x-3)^2 + \left(\frac{-3x-11}{4} + 5\right)^2 = 100$$

Operando: $(x-3)^2 = 64 \Rightarrow x - 3 = \pm 8 \Rightarrow x = 3 \pm 8$.

$$\begin{aligned} x &= 11 \Rightarrow y = -11 \\ x &= -5 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

$T_1(11, -11)$ y $T_2(-5, 1)$ son los puntos de tangencia. Las ecuaciones de las dos tangentes son:

$$t_1 \equiv y + 11 = \frac{4}{3}(x - 11)$$

$$t_2 \equiv y - 1 = \frac{4}{3}(x + 5)$$

---

14 Comprobar que son ortogonales las circunferencias

$$\alpha \equiv x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 = 0$$
$$\beta \equiv x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Hallar su eje radical.

Solución Centro y radio de α:

$$C_\alpha(6, 2);\ 24 = 6^2 + 2^2 - r_\alpha^2 \Rightarrow r_\alpha^2 = 16$$

Potencia de (6, 2) respecto de β:

$$p = 36 + 4 - 24 = 16 = r_\alpha^2$$

Como la potencia del centro de α respecto de β es r_α^2, son ortogonales.

El eje radical de α y β es:

$$e = \alpha - \beta \equiv -8x - 4y + 24 = 0 \Rightarrow e \equiv 2x + y - 6 = 0$$

15 Dadas las circunferencias $\alpha \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ y $\beta \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, hallar las coordenadas del punto A, que tiene igual potencia respecto de ambas y pertenece a la recta $\gamma \equiv x - y + 2 = 0$.

Solución Sea $A(a, b)$:

$$\text{Pot. de } A \text{ respecto de } \alpha = a^2 + b^2 - 4a - 6b + 9 \qquad [1]$$
$$\text{Pot. de } A \text{ respecto de } \beta = a^2 + b^2 - 2a - 4b + 1 \qquad [2]$$

$$[1] = [2] \Rightarrow a^2 + b^2 - 4a - 6b + 9 = a^2 + b^2 - 2a - 4b + 1 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & a + b - 4 = 0 \\ A \in r \Rightarrow & a - b + 2 = 0 \\ \hline & 2a \quad - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 3 \end{array}$$

Es, pues, $A(1, 3)$.

16 Hallar las ecuaciones de los ejes radicales y las coordenadas del centro radical de las circunferencias:

$$\alpha \equiv \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{29}{4}$$
$$\beta \equiv (x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$
$$\gamma \equiv x^2 + y^2 = 1$$

Solución

$$\alpha \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$$
$$\beta \equiv x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$$
$$\gamma \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$e_1 \equiv \alpha - \beta \equiv 5x - y + 2 = 0$$
$$e_2 \equiv \alpha - \gamma \equiv 3x - 2y - 3 = 0$$
$$e_3 \equiv \beta - \gamma \equiv -2x - y - 5 = 0$$

$$(\alpha - \beta) \cap (\alpha - \gamma) = A(-1, -3)$$
$$(\alpha - \beta) \cap (\beta - \gamma) = A(-1, -3)$$

El centro radical es el punto $A(-1, -3)$.

17 Hallar las ecuaciones de las elipses definidas por los siguientes datos:

a) $a = 4, \quad b = 2$

b) $a = 5, \quad c = 3$

c) $b = 4, \quad c = 3$

d) $b = 2, \quad e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Solución a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) $a^2 = 25, \ c^2 = 9 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

c) $b^2 = 16, \ c^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

d) $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \dfrac{\sqrt{5}}{3} a$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3} a\right)^2 = 4 + \frac{5}{9} a^2$$

$$a^2 - \frac{5}{9} a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

---

18 Hallar la ecuación de la elipse α sabiendo que los radios vectores de un punto P son $r = 2$ y $r' = 8$ y que la distancia focal es 6.

Solución Sea $\alpha \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Se sabe que $FF' = 2c = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$.

Si $P(x_0, y_0) \in \alpha \Rightarrow PF = 2 = \sqrt{(x_0 - 3)^2 + y_0^2}$ [1]

y $PF' = 8 = \sqrt{(x_0 + 3)^2 + y_0^2}$ [2]

De [1]: $x_0^2 + y_0^2 - 6x_0 + 5 = 0$

[2]: $x_0^2 + y_0^2 + 6x_0 - 55 = 0$

Restando miembro a miembro: $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 0$

$$P(5, 0) \in \alpha \Rightarrow \frac{25}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 25$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$, y, por tanto, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ es la ecuación de α.

19 Hallar la ecuación de la elipse α que pasa por los puntos $A\left(3, \frac{16}{5}\right)$ y $B\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

Solución Sea $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$A \in \alpha \Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{256}{25b^2} = 1 \Rightarrow 225b^2 + 256a^2 = 25a^2b^2 \qquad [1]$$

$$B \in \alpha \Rightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \Rightarrow 400b^2 + 144a^2 = 25a^2b^2 \qquad [2]$$

Restando miembro a miembro: $-175b^2 + 112a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}b^2$.

Sustituyendo en [1]:

$$225b^2 + 256\frac{25}{16}b^2 = 25b^2\frac{25}{16}b^2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 25$$

La ecuación es $\alpha \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

20 Hallar la ecuación de la elipse α, que pasa por $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ y cuyos semiejes mayor y menor son proporcionales, respectivamente, a 3 y 2.

Solución Sea $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$P \in \alpha \Rightarrow \frac{27}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 27b^2 + 4a^2 = 4a^2b^2 \qquad [1]$$

Si $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = \frac{2a}{3}$.

Sustituyendo en [1]: $27\frac{4a^2}{9} + 4a^2 = 4a^2\frac{4a^2}{9}$

$$12 + 4 = \frac{16a^2}{9} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 4$$

La ecuación de α es:

$$\alpha \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

21 De una elipse α, cuya ecuación está referida a sus ejes, se sabe que uno de los focos es $F(3, 0)$ y que pasa por $P\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}\right)$. Hallar la ecuación de α.

Solución Sea $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$P \in \alpha \Rightarrow \frac{25}{4a^2} + \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow 25b^2 + 48a^2 = 4a^2b^2 \qquad [1]$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 9$ [2], ya que $c = 3$.

Sustituyendo [2] en [1]:

$$25b^2 + 48(b^2 + 9) = 4b^2(b^2 + 9)$$

Operando se obtiene:

$$4b^4 - 37b^2 - 432 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{37 \pm 91}{8}$$

de donde: $b^2 = 16$, $b^2 = -\frac{54}{8}$.

Si $b^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$.

Por tanto, $\alpha \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

22 Hallar la ecuación de la elipse α que pasa por el punto $P\left(1, \frac{8\sqrt{6}}{5}\right)$ y tiene de excentricidad $e = \frac{3}{5}$.

Solución Sea $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$P \in \alpha \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{64 \cdot 6}{25b^2} = 1 \Rightarrow 25b^2 + 384a^2 = 25a^2b^2 \qquad [1]$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = \frac{3}{5}a$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + \frac{9}{25}a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}b^2$.

Sustituyendo en [1]:

$$25b^2 + 384\frac{25}{16}b^2 = 25\frac{25}{16}b^4 \Rightarrow$$

$$25 + 600 = \frac{625b^2}{16} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 25$$

La ecuación de α es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

23 Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $\alpha \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, trazadas desde el punto $A(4, 0)$.

Solución Ecuación de haz de rectas de vértice A:

$$y = \lambda(x - 4) \qquad [1]$$

Resolviendo el sistema formado por α y [1] se obtiene:

$$4x^2 + 9\lambda^2(x - 4)^2 = 36$$

Operando y ordenando:

$$(4 + 9\lambda^2)\, x^2 - 72\lambda^2 x + (144\lambda^2 - 36) = 0$$

de donde

$$\Delta = (36\lambda^2)^2 - (4 + 9\lambda^2)(144\lambda^2 - 36) = -252\lambda^2 + 144$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{144}{252} = \frac{4}{7} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Las ecuaciones de las rectas pedidas son:

$$y = \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}(x - 4)$$

24 Hallar la ecuación de la tangente a la elipse $\alpha \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en el punto $P(\sqrt{2}, 1)$.

Solución $\alpha \equiv x^2 + 2y^2 = 4$ [1].

Ecuación de haz de rectas de vértice P: $y = 1 + \lambda(x - \sqrt{2})$ [2].

Resolviendo el sistema formado por [1] y [2] resulta:

$$x^2 + 2[1 + \lambda(x - \sqrt{2})]^2 - 4 = 0$$

Operando:

$$(1 + 2\lambda^2)\, x^2 - 4(\sqrt{2}\,\lambda^2 - \lambda)\, x + (4\lambda^2 - 4\sqrt{2}\,\lambda - 2) = 0$$

de donde:

$$\Delta = 16(\sqrt{2}\,\lambda^2 - \lambda)^2 - 4(1 + 2\lambda^2)(4\lambda^2 - 4\sqrt{2}\,\lambda - 2) =$$
$$= 16\lambda^2 + 16\sqrt{2}\,\lambda + 8$$

La condición de tangencia $\Rightarrow \Delta = 0$, luego:

$$16\lambda^2 + 16\sqrt{2}\,\lambda + 8 = 0 \Rightarrow (4\lambda + 2\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (solución doble)}$$

La recta pedida es: $\sqrt{2}x + 2y - 4 = 0$.

25 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $\alpha \equiv x^2 + 2y^2 = 2$, paralelas a la recta $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

Solución Las rectas paralelas a $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ son de la forma

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + a \qquad [1]$$

Resolviendo el sistema formado por [1] y α se obtiene:

$$x^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + a\right)^2 = 2$$

Operando resulta: $2x^2 - 2\sqrt{2}\,ax + (2a^2 - 2) = 0$, de donde:

$$\Delta = (\sqrt{2}\,a)^2 - 2(2a^2 - 2) = -2a^2 + 4$$

La condición de tangencia $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

Las rectas pedidas son $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \pm \sqrt{2}$.

26 Dada la elipse $\alpha \equiv \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, inscribir en ella un rectángulo de lados paralelos a los ejes y tal que su área sea $8u^2$.

Solución

$$\alpha \equiv \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{6 - x^2}{2}}$$

Sean $A(x_0, y_0)$, $B(x_0, -y_0)$, $C(-x_0, -y_0)$ y $D(-x_0, y_0)$ los vértices del rectángulo.

Su área será $S = 4x_0y_0 = 8 \quad [1]$.

Como $y_0 = \sqrt{\frac{6 - x_0^2}{2}}$, sustituyendo en [1] se tiene:

$$8 = 4x_0\sqrt{\frac{6 - x_0^2}{2}} \Rightarrow x_0^4 - 6x_0^2 + 8 = 0 \Rightarrow x_0^2 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm\ 2 \Rightarrow y_0 = \pm\ 1$$
$$x_0^2 = 2 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \pm\sqrt{2}$$

Primera solución:

$$A(2, 1),\ B(2, -1),\ C(-2, -1) \text{ y } D(-2, 1)$$

Segunda solución:

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ y } D(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

---

27 En la elipse $\alpha \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16/5} = 1$ se inscribe un triángulo equilátero, uno de cuyos vértices es el vértice de α, situado en $+OX$. Hallar los otros dos.

Solución Ecuación de la recta que forma con el eje de abscisas un ángulo de 30° y pasa por $A(4, 0)$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 4)$$

Intersección de dicha recta con la elipse:

$$x^2 + 5\frac{1}{3}(x - 4)^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \Rightarrow B(1, -\sqrt{3})$.

Si $x = 4 \Rightarrow y = \quad 0 \Rightarrow A(4, 0)$.

El tercer vértice es el simétrico de B respecto de $y = 0$: $C(1, +\sqrt{3})$.

---

28 Una elipse, de ejes paralelos a los coordenados, tiene por ecuación $x'^2 + 2y'^2 + 4x' - 4y' + 4 = 0$. Hallar.

a) La ecuación reducida.
b) Las coordenadas del centro.
c) La excentricidad.

Solución Las ecuaciones de la traslación son: $x = x' + h,\ y = y' + k$

Aplicamos a $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y operando:

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 + 2b^2hx' + 2a^2ky' + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Identificando:

$$\begin{aligned} b^2 &= 1 \text{ y } a^2 = 2 \\ 2hb^2 &= 4 \Rightarrow h = 2 \\ 2ka^2 &= -4 \Rightarrow k = -1 \end{aligned}$$

El centro es el punto $(2, -1)$.

Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1.$

$$\text{Excentricidad: } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

29 Hallar las ecuaciones de las hipérbolas definidas por los siguientes datos:

a) $a = 3,\ b = 2$ c) $b = 2,\ c = \sqrt{5}$

b) $a = 3,\ c = 5$ d) $b = 4,\ e = \dfrac{5}{3}$

Solución a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 1$

$\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

d) $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow c = \dfrac{5}{3}a$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \dfrac{25}{9}a^2 - a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 9$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

30 Determinar la ecuación de la hipérbola α que tiene de excentricidad $e = \dfrac{5}{3}$ y es incidente con el punto $P(5, 3)$.

Solución Sea $\alpha \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ [1] y $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow c = \dfrac{5}{3}a$, sustituyendo en [1] se obtiene $b^2 = \dfrac{16}{9}a^2$ [2].

Si $P \in \alpha \Rightarrow 25b^2 - 9a^2 = a^2b^2.$

Teniendo en cuenta [2]:

$$a^2 = \frac{319}{16} \text{ y } b^2 = \frac{319}{9}$$

Por tanto,

$$\alpha \equiv \frac{x^2}{\frac{319}{16}} - \frac{y^2}{\frac{319}{9}} = 1$$

31 Hallar la ecuación de la hipérbola α, incidente con los puntos $A(8, 3\sqrt{3})$ y $B(12, 6\sqrt{2})$.

Solución Si $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$

$$A \in \alpha \Rightarrow \frac{64}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1 \Rightarrow 64b^2 - 27a^2 = a^2b^2 \qquad [1]$$

$$B \in \alpha \Rightarrow \frac{144}{a^2} - \frac{72}{b^2} = 1 \Rightarrow 144b^2 - 72a^2 = a^2b^2 \qquad [2]$$

$$[1] - [2]: \ -80b^2 + 45a^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16}a^2 \qquad [3]$$

Sustituyendo [3] en [1] resulta $a^2 = 16$.

Si $a^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 9$, y la ecuación de α es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

32 Una hipérbola α tiene por asíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$ y es incidente con el punto $P(8, 5)$. Hallar su ecuación.

Solución Sea $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$P \in \alpha \Rightarrow \frac{64}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{64b^2}{25 + b^2} \qquad [1]$$

Las asíntotas de α son $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Luego: $\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3a}{4}$ [2].

De [1] y [2] $a^2 = \frac{176}{9}$ y $b^2 = 11$; por tanto: $\alpha \equiv \frac{x^2}{\frac{176}{9}} - \frac{y^2}{11} = 1.$

33 De una hipérbola α se conoce $a = 4$ y que el ángulo que forman las asíntotas es 60°. Hallar la ecuación de α.

Solución Si $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Como $a = 4 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{4}x \Rightarrow \begin{cases} bx - 4y = 0 & [1] \\ bx + 4y = 0 & [2] \end{cases}$

$\vec{v}\,(b, -4)$ es perpendicular a [1].

$\vec{w}\,(b, \ 4)$ es perpendicular a [2].

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = \frac{|\ b^2 - 16\ |}{\sqrt{b^2 + 16}\,\sqrt{b^2 + 16}} = \frac{b^2 - 16}{b^2 + 16} \text{ y } \frac{-b^2 + 16}{b^2 + 16}$$

De donde $b^2 = \begin{cases} 48, \text{ luego:} \\ 16/3 \end{cases}$ $\qquad \alpha \equiv \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ y $\alpha' \equiv \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16/3} = 1$

34 Determinar el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola $\alpha \equiv 25x^2 - 9y^2 = 24$.

Solución $\alpha \equiv 25x^2 - 9y^2 = 24 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{24}{25}} - \dfrac{y^2}{\frac{24}{9}} = 1$, luego $a = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ y $b = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \dfrac{b}{a} x$.

Para α: $y = \pm \dfrac{5}{3} x \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 0 & [1] \\ 5x + 3y = 0 & [2] \end{cases}$

$\vec{v}(5, -3)$ y $\vec{w}(5, 3)$ son perpendiculares a [1] y [2], respectivamente, luego:

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{v}, \vec{w}|}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = \dfrac{16}{34}$, de donde: $\alpha = 61°55'39''05$.

35 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\alpha \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$, trazadas desde el punto $P(1, 0)$.

Solución Ecuación de las rectas de vértice P: $y = \lambda(x - 1)$ [1].

Resolviendo el sistema formado por α y [1]:

$$(4 - 9\lambda^2)\,x^2 + 18\lambda^2 x - (9\lambda^2 + 36) = 0$$

$$\Delta = (9\lambda^2)^2 + (4 - 9\lambda^2)\,(9\lambda^2 + 36)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las rectas pedidas son:

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$$

36 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\alpha \equiv \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, paralelas a la recta $m \equiv y = 2x - 1$.

Solución

$$\alpha \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \alpha \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$$

Las rectas paralelas a m tienen por ecuación

$$y = 2x + a \qquad [1]$$

Resolviendo el sistema formado por α y [1]:

$$32x^2 + 36ax + (9a^2 + 36) = 0$$

$$\Delta = (18a)^2 - 32(9a^2 + 36) = 36a^2 - 1.152$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{2}$$

Las ecuaciones de las tangentes paralelas a m son:

$$y = 2x \pm 4\sqrt{2}$$

37 Calcular m para que la recta $y = x + m$ sea tangente a la hipérbola $\alpha \equiv x^2 - 4y^2 = 4$.

Solución Sustituyendo $y = x + m$ en α:

$$x^2 - 4(x + m)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8mx + (4m^2 + 4) = 0$$

de donde se obtiene:

$$\Delta = (4m)^2 - 3(4m^2 + 4) = 4m^2 - 12$$

Si la recta ha de ser tangente a $\alpha \Rightarrow \Delta = 0$

$$4m^2 - 12 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

38 La recta $y = 4x - 6$ es tangente a la hipérbola $\alpha \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $P(2, 2)$. Hallar a^2 y b^2.

Solución Si $P \in \alpha \Rightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{4b^2}{4 + b^2}$ [1]

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2]: $x^2(4 + b^2) - 4y^2 = 4b^2$ [3]

Sustituyendo $y = 4x - 6$ en [3]:

$$(b^2 - 60)\,x^2 + 192x - (144 + 4b^2) = 0$$

de donde:

$$\Delta = 96^2 + (b^2 - 60)\,(144 + 4b^2)$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow 4b^4 - 96b^2 + 576 = (2b^2 - 24)^2 = 0$$

La solución es $b^2 = 12$ (doble).

Si $b^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 3$.

La hipérbola es de ecuación $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$.

39 Hallar la longitud de la cuerda interceptada por la recta $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ sobre la hipérbola $\alpha \equiv 3x^2 - 8y^2 = 19$.

Solución Hallamos los puntos de intersección de la recta y la hipérbola resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$3x^2 - 8\left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right)^2 - 19 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$$

Las soluciones son $\begin{cases} x = 7 \Rightarrow y = 4 \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

La distancia entre los puntos de intersección $A(7, 4)$ y $B(3, 1)$ nos da: $d = 5$ ul., longitud de la cuerda.

40 Dada la hipérbola $\alpha \equiv \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$, hallar la ecuación referida a sus asíntotas.

Solución La hipérbola α es equilátera.

Sus asíntotas son $y = \pm x$.

La ecuación de una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas es $x'y' = k$, donde $k = \frac{a^2}{2}$.

Como $a^2 = 4 \Rightarrow k = 2$, luego la ecuación pedida es $x'y' = 2$.

41 Una hipérbola equilátera α pasa por el punto $P\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Hallar su ecuación y las coordenadas de los vértices y focos, así como su ecuación referida a las asíntotas.

Solución Sea $\alpha \equiv x^2 - y^2 = a^2$.

Si $P \in \alpha \Rightarrow 16 - \frac{1}{4} = a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{63}{4} = b^2$.

Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{63}{2}$.

Coordenadas de los vértices: $A\left(\frac{\sqrt{63}}{2}, 0\right)$ y $A'\left(-\frac{\sqrt{63}}{2}, 0\right)$.

Coordenadas de los focos: $F\left(\sqrt{\frac{63}{2}}, 0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{\frac{63}{2}}, 0\right)$.

Ecuación referida a las asíntotas:

$$x'y' = k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x'y' = \frac{63}{8}$$

42 Hallar b para que $4x^2 + by^2 = 9$ sea la ecuación de una hipérbola equilátera.

Solución

$$4x^2 + by^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{b}} = 1$$

Para que sea una hipérbola equilátera:

$$\frac{9}{4} = -\frac{9}{b} \Rightarrow b = -4$$

43 Hallar la ecuación de la parábola de foco $F(3, 1)$ y directriz la recta $y = x$.

Solución Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola:

$$\text{dist}\,(P, y = x) = \text{dist}\,(P, F)$$

$$PF = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{dist}\,(P, y = x) = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}$$

Igualando y elevando al cuadrado:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$$

Operando resulta:

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 2xy + 20 = 0$$

44 La ecuación general de la parábola de vértice el origen y eje OY es $y = \frac{1}{2p}x^2$. Hallar la ecuación transformada mediante una traslación.

Solución Apliquemos la traslación de ecuaciones $x = x' + a$, $y = y' + b$.

La ecuación $y = \frac{1}{2p}x^2$ se transformará en

$$y' + b = \frac{1}{2p}(x' + a)^2$$

$$y' = \frac{1}{2p}x'^2 + \frac{a}{p}x' + \frac{a^2}{2p} - b$$

En general, $y = mx^2 + nx + q$ es la ecuación de una parábola de eje paralelo al OY.

45 Dada la parábola $y = x^2 - 6x + 5$, hallar la traslación que la transforma en la canónica.

Solución La ecuación general o canónica de eje OY es $y' = \dfrac{1}{2p}x'^2$.

Sea la traslación de ecuaciones: $x = x' + a$, $y = y' + b$.

Tendremos:

$$y' + b = (x' + a)^2 - 6(x' + a) + 5$$
$$y' = x'^2 + (2a - 6)\,x' + a^2 - 6a + 5 - b$$

Igualando a cero el coeficiente de x' y el término independiente:

$$2a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$$
$$a^2 - 6a + 5 - b = 0 \Rightarrow b = 9 - 18 + 5 = -4$$

Las ecuaciones de la traslación son:

$$x = x' + 3, \quad y = y' - 4$$

---

46 Hallar la ecuación transformada de la parábola $y^2 = 2px$ al aplicarle una traslación.

Solución $y^2 = 2px$ es la ecuación de una parábola de eje OX, vértice el origen, foco $F\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$ y directriz $x = -\dfrac{p}{2}$.

Si $x = x' + a$, $y = y' + b$ son las ecuaciones de la traslación, se obtendrá la transformada de $y^2 = 2px$ sustituyendo aquellos valores:

$$(y' + b)^2 = 2p(x' + a)$$
$$y'^2 + 2by' - 2px' + b^2 - 2ap = 0$$

En general:

$$y^2 + mx + ny + q = 0$$

es la ecuación de una parábola de eje paralelo al OX.

---

47 Dada la parábola $y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$, hacer una traslación conveniente para escribirla en la forma general $y'^2 = kx'$.

Solución Aplicando la traslación $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$, se obtiene:

$$(y' + b)^2 + 2(x' + a) - 4(y' + b) + 2 = 0$$

Operando resulta:

$$y'^2 + 2x' + (2b - 4)\,y' + b^2 + 2a - 4b + 2 = 0$$

Igualando a cero el coeficiente de y' y el término independiente:

$$2b - 4 = 0 \Rightarrow b = 2$$
$$b^2 + 2a - 4b + 2 = 0 \Rightarrow 4 + 2a - 8 + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Las ecuaciones de la traslación serán:

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 2$$

La parábola dada tiene por ecuación transformada

$$y'^2 = -2x'$$

---

48 Hallar las coordenadas del vértice y del foco y las ecuaciones del eje y de la directriz, de la parábola $y = x^2 - 6x + 5$.

Solución Si $y = ax^2 + bx + c$, la abscisa del vértice es $x = \frac{-b}{2a} = - \frac{-6}{2} = 3$ y la ordenada $y = 3^2 - 18 + 5 = -4$.

Por tanto, $V(3, -4)$.

El eje pasa por V y es paralelo al eje OY, ya que la parábola dada es de eje vertical. Su ecuación es $e \equiv x = 3$.

$$\frac{1}{2p} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$$

La abscisa de F es $x = 3$; la ordenada es $y = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$.

Luego $F\left(3, -\frac{15}{4}\right)$.

La ecuación de la directriz es

$$y = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$$

---

49 Hallar la ecuación de la parábola α de eje paralelo a OY, teniendo en cuenta que es incidente con los puntos $A(1, 5)$, $B(4, 8)$ y $C(6, 0)$.

Solución Sea $\alpha \equiv y = ax^2 + bx + c$.

$$A \in \alpha \Rightarrow 5 = a + b + c \qquad [1]$$
$$B \in \alpha \Rightarrow 8 = 16a + 4b + c \qquad [2]$$
$$C \in \alpha \Rightarrow 0 = 36a + 6b + c \qquad [3]$$

$$[1] - [2]: \ -3 = -15a - 3b \Rightarrow 1 = 5a + b \qquad [4]$$
$$[2] - [3]: \ 8 = -20a - 2b \Rightarrow -4 = 10a + b \qquad [5]$$
$$[4] - [5]: \ 5 = -5a \Rightarrow a = -1$$

$$a = -1 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow c = 0$$

$\alpha \equiv y = -x^2 + 6x$ es la ecuación pedida.

---

50 Una parábola α de eje vertical tiene por vértice $V(4, -15)$ y por foco $F\left(4, -\frac{59}{4}\right)$.
Hallar las ecuaciones del eje, de la directriz y de α.

Solución La ecuación de α será de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

$$FV = \frac{p}{2} = \left| -15 + \frac{59}{4} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow 2p = 1$$

Si $2p = 1$ es $a = \frac{1}{2p} = 1$.

Ecuación de la directriz:

$$y = -15 - \frac{p}{2} = -15 - \frac{1}{4} = \frac{-61}{4}$$

La ecuación de eje es $x = 4$.

Si $X(x, y) \in \alpha$

$$XF = \sqrt{(x-4)^2 + \left(y + \frac{59}{4}\right)^2} \qquad [1]$$

Distancia de X a la directriz: $d = \left| y + \frac{61}{4} \right|$ [2].

Igualando [1] y [2], y operando resulta:

$$y = x^2 - 8x + 1$$

51 Hallar a para que la recta $y = 3x + a$ sea tangente a la parábola $y = 3x^2 + 1$.

Solución Resolveremos el sistema $\begin{cases} y = 3x + a \\ y = 3x^2 + 1 \end{cases}$

$$3x + a = 3x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 - 3x + (1 - a) = 0$$

de donde:

$$\Delta = 9 - 12(1 - a) = -3 + 12a$$

Para que la recta sea tangente a la parábola:

$$\Delta = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

52 Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $\alpha \equiv y^2 = 2x + 1$ en el punto $A(4, 3)$.

Solución El eje de la parábola es $y = 0$.

El vértice es el punto de intersección con $y = 0$:

$$V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Como $2p = 2 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$.

El foco es $F(0, 0)$ y la directriz $x = -1$.

El punto B, intersección de la perpendicular por A a la directriz, es $B(-1, 3)$.

El punto medio de BF es $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

La tangente en $A(4, 3)$ es la recta $AM \equiv t$.

$t \equiv x - 3y + 5 = 0$ es la ecuación de la recta pedida.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Estudiar la posición relativa de las siguientes parejas de circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 12x - 2y + 21 = 0$

---

2 Los lados de un triángulo $\widehat{ABC}$ son $a \equiv 3x - 4y = 0$, $b \equiv 4x + 3y - 50 = 0$ y $c \equiv y = 0$. Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia inscrita, la longitud de su radio y el área de dicho triángulo.

---

3 Calcular m para que el radio de la circunferencia $\alpha \equiv x^2 + y^2 + mx + 2y + 9 = 0$ sea 1.

---

4 Hallar la ecuación de la circunferencia α que pasa por el punto $A(2, 6)$ y es tangente a la recta $r \equiv x - y + 2 = 0$ en el punto $B(0, 2)$.

---

5 Hallar la ecuación de la circunferencia α de centro $C(3, 2)$ y tangente a la recta $b \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$.

---

6 Hallar la ecuación de la circunferencia α que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 4)$ y tiene su centro en la recta $r \equiv 2x - y + 5 = 0$.

---

7 Hallar las ecuaciones de las circunferencias α que son incidentes con el punto $A(2, 3)$ y tangentes a las rectas $r \equiv y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ y $r' \equiv y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$.

---

8 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $\alpha \equiv (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13$ en los puntos de ordenada $y = 0$.

---

9 Dada la circunferencia $\alpha \equiv (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$, hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(2, 5)$.

---

10 Dadas las circunferencias

$$\alpha \equiv x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$$
$$\beta \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

estudiar si son ortogonales.

---

11 Dadas las circunferencias

$$\alpha \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$\beta \equiv x^2 + y^2 - 4x = 0$$
$$\gamma \equiv x^2 + y^2 - 6y = 0$$

hallar la potencia del punto $A(0, 1)$ respecto de cada una de ellas, indicando su posición, y las coordenadas del centro radical C.

---

12 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(0, 2)$ sea la mitad de la distancia a la recta $y = 8$.

---

13 Hallar la ecuación de la elipse α cuyo centro es $C(-1, 1)$, uno de los vértices $A(4, 1)$ y la excentricidad $e = \frac{2}{5}$.

---

14 Hallar la ecuación de la elipse α, sabiendo que uno de sus vértices es el punto $A'(0, -7)$ y que pasa por el punto $P\left(1, \frac{14}{3}\sqrt{2}\right)$.

---

15 Hallar la ecuación de la elipse α de centro $C(1, 2)$, uno de cuyos focos es $F(6, 2)$ y sabiendo que es incidente con el punto $P(4, 6)$.

16 Hallar la ecuación en forma reducida de la elipse que es incidente con los puntos $A(-5, 0)$ y $B\left(2, \frac{12}{5}\sqrt{21}\right)$.

17 Determinar a, b, c, la excentricidad y las coordenadas de los vértices y focos de las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

18 Hallar la ecuación de la hipérbola α, sabiendo que pasa por el punto $A\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ y una de cuyas asíntotas es $y = 2x$.

19 Hallar, según valores de a, la posición relativa de la recta $y = 2x + a$ y la hipérbola $\alpha \equiv \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{1} = 1$.

20 Hallar m para que la recta $y = mx - 4$ sea tangente a la hipérbola $\alpha \equiv x^2 - 4y^2 = 1$.

21 Dada la hipérbola $\alpha \equiv \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$, hallar las ecuaciones de las tangentes que tengan de pendiente $m = 1$.

22 Una hipérbola equilátera α referida a sus asíntotas pasa por el punto $P(2, 9)$. Hallar su ecuación y la referida a los ejes coordenados.

23 Hallar la ecuación de la parábola α, de eje vertical, sabiendo que pasa por el punto $A(3, -2)$ y su vértice es $V(1, 2)$.

24 Dada la parábola de ecuación $\alpha \equiv y^2 - 4y + 3x - 11 = 0$, hallar las coordenadas del vértice y del foco y la ecuación de la directriz.

25 Dada la parábola de ecuación $y^2 = 8x$, hallar las coordenadas del vértice y del foco y las ecuaciones de la directriz y del eje.

26 Hallar la longitud del segmento interceptado por la recta $r \equiv x - y - 1 = 0$ en la parábola $\alpha \equiv y^2 = 2x + 1$.

27 Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $\alpha \equiv y^2 = 4x$ en el punto $M(1, 2)$.

SOLUCIONES

1 a) Secantes.
b) Exteriores.
c) Tangentes.

2 $I\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $r = \frac{5}{2}$, $S = \frac{75}{2}\ \text{u}^2$

3 $m = \pm 6$

4 $\alpha \equiv (x+5)^2 + (y-7)^2 = 50$

5 $\alpha \equiv (x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{5}$

6 $\alpha \equiv x^2 + (y-5)^2 = 10$

7 $\alpha_1 \equiv (x-2)^2 + (y-8)^2 = 25$

$\alpha_2 \equiv \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 1$

8 $t_1 \equiv y = \frac{2}{3}(x-6)$, $t_2 \equiv y = -\frac{2}{3}(x-2)$

9 $y - 5 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$

10 Sí.

11 $P(A, \alpha) = 0$, $P(A, \beta) = 1$, $P(A, \gamma) = -5$
A está en α; A es exterior a β; A es interior a γ.
$C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$

12 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

13 $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$

14 $\alpha \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

15 $\alpha \equiv \frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$

16 $\alpha \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{144} = 1$

17

a) $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13},\ e_x = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$A(3, 0),\ A'(-3, 0),\ F(\sqrt{13}, 0),$
$F'(-\sqrt{13}, 0)$

b) $a = 4,\ b = 3,\ c = 5,\ e_x = \frac{5}{4}$

$A(4, 0),\ A'(-4, 0),\ F(5, 0),\ F'(-5, 0)$

c) $a = 2,\ b = 1,\ c = \sqrt{5},\ e_x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$A(2, 0),\ A'(-2, 0),\ F(\sqrt{5}, 0),$
$F'(-\sqrt{5}, 0)$

18 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

19 $a = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ son tangentes a α.

$a < -1$ o $a > 1$, las rectas son secantes.

$-1 < a < 1$, las rectas son exteriores.

20 $m = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$

21 $y = x \pm 2$

22 $x'y' = 18$
$x^2 - y^2 = 36$

23 $y = -x^2 + 2x + 1$

24 $V(5, 2),\ F\left(\frac{17}{4}, 2\right)$

$d \equiv x - \frac{23}{4} = 0$

25 $V(0, 0),\ F(2, 0)$
$d \equiv x + 2 = 0,\ e \equiv y = 0$

26 $d = 4\sqrt{2}$

27 $t \equiv x - y + 1 = 0$