

Ejercicio 1.

Resuelve:

a) $9x^3 - 9x^2 - x + 1 \leq 0$

b) $2\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$

a) $9x^3 - 9x^2 - x + 1 \leq 0$ factorizamos el polinomio $\Rightarrow (x-1)(9x^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(3x+1)(3x-1) \leq 0$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$x=1, x=-\frac{1}{3}, x=\frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio. Veamos el signo de cada factor.

| | $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ | $-\frac{1}{3}$ | $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ | $\frac{1}{3}$ | $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ | 1 | $(1, \infty)$ |
|---------------------|--------------------------------------|----------------|--|---------------|-------------------------------|---|---------------|
| $(x-1)$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $(3x-1)$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $(3x+1)$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $(x-1)(3x-1)(3x+1)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

Luego las soluciones de la inecuación son todos los números reales $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

b) $2\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$

$(2\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9})^2 \Rightarrow 4(2x-1) = (6x-5) + (2x-9) + 2\sqrt{6x-5} \cdot \sqrt{2x-9}$

$8x-4 = 8x-14 + 2\sqrt{(6x-5)(2x-9)} \Rightarrow 10 = 2\sqrt{(6x-5)(2x-9)} \Rightarrow 5 = \sqrt{12x^2 - 64x + 45}$

$25 = 12x^2 - 64x + 45 \Rightarrow 12x^2 - 64x + 20 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 5 = 0$

resolviendo la ecuación obtenemos $\begin{cases} x=5 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$, probando vemos que esta solución no es válida.

Ejercicio 2.

- En la expresión $\sqrt{(3-2x)^3} + \sqrt{12-8x} - \sqrt{(9x^2-6x+1) \cdot (3-2x)}$, extrae factores de las raíces y simplifica.

$$\begin{aligned}\sqrt{(3-2x)^3} + \sqrt{12-8x} - \sqrt{(9x^2-6x+1) \cdot (3-2x)} &= \sqrt{(3-2x)^3} + \sqrt{4(3-2x)} - \sqrt{(3x-1)^2 \cdot (3-2x)} = \\ &= (3-2x)\sqrt{3-2x} + 2\sqrt{3-2x} - (3x-1)\sqrt{3-2x} = (3-2x+2-(3x-1))\sqrt{3-2x} = (6-5x)\sqrt{3-2x}\end{aligned}$$

- Efectúa las operaciones y simplifica el resultado: $\frac{1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}{a+3+\frac{2}{a}} \cdot \frac{a-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}} =$

$$\begin{aligned}\frac{1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}{a+3+\frac{2}{a}} \cdot \frac{a-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}} &= \frac{\frac{a^2+2a+1}{a^2}}{\frac{a^2+3a+2}{a}} \cdot \frac{\frac{a^2-1}{a}}{\frac{a^2-2a+1}{a^2}} = \frac{(a+1)^2 \cdot (a+1)(a-1)}{a^2 \cdot a} = \\ &= \frac{(a+1)^2 (a+1)(a-1)}{(a+1)(a+2)(a-1)^2} = \frac{(a+1)^3 (a-1)}{(a+1)(a+2)(a-1)^2} = \frac{(a+1)^2}{(a+2)(a-1)} \quad \text{o desarrollando} \quad \frac{a^2+2a+1}{a^2+a-2}\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Calcula los siguientes límites de sucesiones: b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 10n})$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 10n}) \quad (\text{tenemos una indeterminación del tipo } \infty - \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + 10n}) \cdot (n + \sqrt{n^2 + 10n})}{(n + \sqrt{n^2 + 10n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 + 10n)}{(n + \sqrt{n^2 + 10n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10n}{(n + \sqrt{n^2 + 10n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-10n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{\sqrt{n^2 + 10n}}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10}{1 + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{10n}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10}{1 + \sqrt{1 + \frac{10}{n}}} = \frac{-10}{1 + \sqrt{1+0}} = -5\end{aligned}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+5} \right)^{3n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+5} \right)^{3n-1} \quad (\text{comprobamos si hay indeterminación}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+5} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n}} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1)} \rightarrow 1^\infty$$

es un límite del número e.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+5} \right)^{3n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n+5} - 1 \right)^{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n-n-5}{n+5} \right)^{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{n+5} \right)^{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-5}} \right)^{3n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-5}} \right)^{\frac{n+5}{-5} \cdot \frac{-5}{n+5} (3n-1)} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-5}} \right)^{\frac{n+5}{-5}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5}{n+5} (3n-1)} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-5}} \right)^{\frac{n+5}{-5}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-15n+5}{n+5}} = \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-5}} \right)^{\frac{n+5}{-5}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-15+\frac{5}{n}}{1+\frac{5}{n}}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+5}{-5}} \right)^{\frac{n+5}{-5}} \right]^{-15} = e^{-15} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Resuelve:

$$a) \log_2 x = \log_8 (3x-2)$$

$$\log_2 x = \log_8 (3x-2) \Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 (3x-2)}{\log_2 8} \Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 (3x-2)}{\log_2 2^3} \Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 (3x-2)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \log_2 x = \log_2 (3x-2) \Rightarrow \log_2 x^3 = \log_2 (3x-2) \Rightarrow x^3 = 3x-2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\text{factorizando obtenemos } (x-1)^2 (x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ este valor no es solución de la ecuación.}$$

$$b) \begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ x - 2 = y \end{cases} \Rightarrow 2^x + 2^{x-2} = 10 \Rightarrow 2^x + \frac{2^x}{2^2} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 2^x + 2^x = 40 \Rightarrow 5 \cdot 2^x = 40 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \text{ sustituyendo } y = 3 - 2 = 1$$

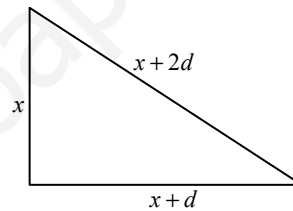
$$\text{solución } \{x = 3, y = 1\}$$

Ejercicio 5.

- Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 24 m. ¿Cuánto mide cada lado?

Si los lados están en progresión aritmética serán de la forma $x, x + d, x + 2d$

$$\text{Las condiciones son } \begin{cases} x + x + d + x + 2d = 24 \\ (x + 2d)^2 = x^2 + (x + d)^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x + 3d = 24 \\ x^2 + 4d^2 + 4xd = x^2 + x^2 + d^2 + 2xd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + d = 8 \\ x^2 - 3d^2 - 2xd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 8 - x \\ x^2 - 3(8 - x)^2 - 2x(8 - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3(64 + x^2 - 16x) - 16x + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 192 - 3x^2 + 48x - 16x + 2x^2 = 0 \Rightarrow 32x - 192 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ y } d = 2 \text{ con lo que los lados miden } 6 \text{ m, } 8 \text{ m y } 10 \text{ m}$$

- La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 18 y la diferencia entre los dos primeros es 2. Determina la progresión.

Si podemos sumar infinitos términos de la progresión es que $|r| < 1$ y si la suma es 18, la progresión será decreciente y de términos positivos con lo que $a_1 > a_2$

$$\text{Así tenemos } \begin{cases} \frac{a_1}{1-r} = 18 \\ a_1 - a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18(1-r) \\ a_1 - a_1 r = 2 \end{cases} \Rightarrow 18(1-r) - 18(1-r)r = 2 \Rightarrow 18r^2 - 36r + 16 = 0$$

Simplificando tenemos $9r^2 - 18r + 8 = 0$

$$r = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 9 \cdot 8}}{18} = \frac{18 \pm 6}{18} = \begin{cases} r = \frac{4}{3} \\ r = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ esta es la solución válida puesto que } |r| < 1$$

$$a_1 = 18 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 6 \text{ y la progresión es } 6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \dots \text{ con } a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ o } a_n = \frac{2^n}{3^{n-2}}$$

Ejercicio 6.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) x^{1+\log x} = 10x$$

$$b) \sqrt{2^x \cdot \sqrt{4^x \cdot \sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$$

$$a) x^{1+\log x} = 10x \Rightarrow \log x^{1+\log x} = \log(10x) \Rightarrow (1+\log x)\log x = \log 10 + \log x \Rightarrow \log x + \log^2 x = 1 + \log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \end{cases} \text{ ambas soluciones son válidas.}$$

$$b) \sqrt{2^x \cdot \sqrt{4^x \cdot \sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{4}} \cdot 8^{\frac{x}{8}} = 2^{\frac{2x+7}{4}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{2x}{4}} \cdot 2^{\frac{3x}{8}} = 2^{\frac{2x+7}{4}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3x}{8}} = 2^{\frac{2x+7}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3x}{8} = \frac{2x+7}{4} \Rightarrow 4x + 4x + 3x = 4x + 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2.$$