1. Obtén el término general de las sucesiones siguientes: (2p)

**a) 2, -8, -18, -28, ...** **b) -3, 1, 5, 9, 13, ...**

**c)** $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ **d)** $-1, 2, -4, 8, -16, \ldots$

**Solución:**

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = -10$. Por tanto:

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-10) = 2 - 10n + 10 \quad \rightarrow \quad a_n = 12 - 10n$$

b) Es una progresión aritmética con $a_1 = -3$ y $d = 4$. Así:

$$a_n = -3 + (n-1)\cdot 4 = -3 + 4n - 4 \quad \rightarrow \quad a_n = 4n - 7$$

c) Es una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$. Por tanto :

$$a_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}} \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

d) Es una progresión geométrica con $a_1 = -1$ y $r = -2$. Así:

$$a_n = (-1)\cdot(-2)^{n-1}$$

2. Averigua el término general de las siguientes sucesiones: (1p)

**a)** $3, 6, 11, 18, 27, \ldots$ **b)** $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, \ldots$

**Solución:**

a) $a_n = n^2 + 2$ b) $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$

3. Halla el criterio de formación de la siguiente sucesión recurrente: (0.75p)

**3, 4, 12, 48, 576, 27 648, ...**

**Solución:**

A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$$a_1 = 3 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{para } n > 2$$

**4. Halla la suma desde el término $a_{20}$ hasta el $a_{30}$ (ambos incluidos) en la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 2n + 3$. (1.5p)**

**Solución:**

Calculamos $a_{20}$ y $a_{30}$:

$$a_{20} = 2 \cdot 20 + 3 = 40 + 3 = 43 \quad , \quad a_{30} = 2 \cdot 30 + 3 = 60 + 3 = 63$$

El número de términos desde $a_{20}$ hasta $a_{30}$ (ambos incluídos) es 11. Por tanto, la suma pedida es:

$$S = \frac{(a_{20} + a_{30}) \cdot 11}{2} = \frac{(43 + 63) \cdot 11}{2} = \frac{106 \cdot 11}{2} = 583$$

**5. Estudia si las siguientes sucesiones tienen límite. Si lo tienen, calcúlalo; si no, explica el porqué. Elabora una tabla de valores y realiza la representación gráfica en cada caso. (1.5p)**

**a)** $\boldsymbol{a_n = \frac{4n}{n+1}}$ **b)** $\boldsymbol{b_n = \frac{2n+1}{3}}$

**Solución:**

a) $a_{10} = 3{,}6363...$ $a_{100} = 3{,}96039...$ $a_{1\,000} = 3{,}996...$
$a_{1\,000\,000} = 3{,}999996$

$$lím\ a_n = 4$$

b) $b_{10} = 7...$ $b_{100} = 67...$ $b_{1\,000} = 667...$ $b_{1\,000\,000} = 666\,667$

$$lím\ b_n = +\infty$$

**6. Invéntate dos sucesiones cuyo límite sea 0 y tales que, al dividirlas, la sucesión que resulte tienda a infinito. (0.75p)**

**Solución:**

Por ejemplo, $a_n = \dfrac{2}{n}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Comprobamos que su límite es 0.

$a_{10} = 0{,}2 \quad a_{100} = 0{,}02 \quad a_{1000} = 0{,}002 \quad \rightarrow \quad \lim a_n = 0$

$b_{10} = 0{,}01 \quad b_{100} = 0{,}0001 \quad b_{1000} = 0{,}000001 \quad \rightarrow \quad \lim b_n = 0$

Si hacemos $c_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2}{n} : \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2n^2}{n} = 2n$, obtenemos una sucesión cuyo límite es infinito:

$c_{10} = 20 \quad c_{100} = 200 \quad c_{1000} = 2\,000 \quad \rightarrow \quad \lim c_n = +\infty$

**7. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es falsa, indica un contra-ejemplo. (1p)**

**a) La sucesión $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es un progresión geométrica.**

**b) La sucesión $a_n = \dfrac{-1}{n^2}$ no tiene límite.**

**c) Para que la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica no sea infinitamente grande, ha de ser $|r| < 1$.**

**d) La sucesión $a_n = (-1)^n \cdot 2n$ no tiene límite.**

**Solución:**

a) Verdadero.

En una progresión geométrica se cumple:

$$\left.\begin{array}{lll} a_2 = a_1 r & \rightarrow & r = \dfrac{a_2}{a_1} \\ a_3 = a_2 r & \rightarrow & r = \dfrac{a_3}{a_2} \\ a_{n+1} = a_n r & \rightarrow & r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \end{array}\right\} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

b) Falso.

$a_{10} = -0{,}01 \quad a_{100} = -0{,}0001 \quad a_{1000} = -0{,}000001 \quad \rightarrow \quad \lim a_n = 0$

c) Verdadero.

Si $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos es $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$.

d) Verdadero.

$a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -6$, $a_4 = 8$, … Es decir, es una sucesión oscilante, luego no tiene límite.

**8. En una progresión aritmética, la suma del quinto término con el décimo y el duodécimo es 54. Calcula el noveno término. (1.5p)**

**Solución:**

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + 9d \\ a_{12} = a_1 + 11d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_5 + a_{10} + a_{12} = 54 \\ a_1 + 4d + a_1 + 9d + a_1 + 11d = 54 \end{array}$$

$$3a_1 + 24d = 54 \quad \rightarrow \quad 3\underbrace{(a_1 + 8d)}_{a_9} = 54 \quad \rightarrow \quad a_9 = 18$$