

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IRRACIONALES

Ecuaciones irracionales sencillas

Las **ecuaciones irracionales** son aquellas en las que la incógnita aparece bajo el signo radical.

Para resolverla, seguimos los siguientes pasos:

- 1) Se aísla un radical en uno de los miembros, pasando los restantes términos al otro miembro.
- 2) Se elevan al cuadrado los dos miembros.
- 3) Si existe todavía algún radical, se vuelve a repetir los pasos 1 y 2.
- 4) Se resuelve la ecuación racional obtenida y se comprueba cuáles de las soluciones cumplen la ecuación dada.

Ejemplos:

a) $\sqrt{x+2} = 3$

- Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(\sqrt{x+2})^2 = 9$
- Efectuamos las operaciones : $x + 2 = 9$
- Resolvemos la ecuación: $x = 7$
- Comprobamos las soluciones:
 - Si $x = 7 \Rightarrow \sqrt{7+2} = 3 \Rightarrow x = 7$ es solución

b) $\sqrt{x+1} + x - 2 = 3$

- Se despeja uno de los dos radicales: $\sqrt{x+1} = 5 - x$
- Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(\sqrt{x+1})^2 = (5-x)^2$
- Efectuamos las operaciones : $x + 1 = 25 + x^2 - 10x$
- Resolvemos la ecuación: $x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 3 \end{cases}$
- Comprobamos la solución:
 - Si $x = 8 \Rightarrow \sqrt{8+1} + 3 - 2 = 3 \Rightarrow x = 8$ no es solución
 - Si $x = 3 \Rightarrow \sqrt{3+1} + 3 - 2 = 3 \Rightarrow x = 3$ es solución

Luego la solución de la ecuación es $x = 3$

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$1) \sqrt{x-1} = 3$$

$$3) \sqrt{7x+2} = 4$$

$$5) \sqrt{3x-2} + 2 = 2x - 6$$

$$7) \sqrt{3x+1} - 2 = x - 3$$

$$9) x - \sqrt{25 - x^2} = 1$$

$$11) \sqrt{2x^2 + 7} - x = 3x - 1$$

$$13) \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$$

$$15) \frac{2\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} = \frac{5+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$2) \sqrt{x+4} = 7$$

$$4) \sqrt{x+1} = 2x - 4$$

$$6) \sqrt{x+7} = 2x - 1$$

$$8) \sqrt{4x+4} - x = 2x - 5$$

$$10) 3x + \sqrt{x^2 - 5x + 16} = 19$$

$$12) \sqrt{2-x^2} = 2x - 1$$

$$14) \sqrt{x-20} + \sqrt{x} = \frac{40}{\sqrt{x-20}}$$

$$16) \frac{\sqrt{x+1}}{x-3} = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

Soluciones:

1) $\sqrt{x-1} = 3$

$$x - 1 = 9 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Comprobación:

$$\sqrt{10-1} = 3 \Rightarrow x = 10 \text{ solución}$$

2) $\sqrt{x+4} = 7$

$$x + 4 = 49 \Rightarrow \boxed{x = 45}$$

Comprobación:

$$\sqrt{45+4} = 7 \Rightarrow x = 45 \text{ solución}$$

3) $\sqrt{7x+2} = 4$

$$7x + 2 = 16 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Comprobación: $\sqrt{14+2} = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ solución}$

4) $\sqrt{x+1} = 2x - 4$

$$x + 1 = (2x - 4)^2 \Rightarrow x + 1 = 4x^2 + 16 - 16x \Rightarrow 4x^2 - 17x + 15 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 7}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} \Rightarrow \boxed{x_1 = 3} \\ x_2 = \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

○ Si $x = 3 \Rightarrow \sqrt{3+1} = 6 - 4 \Rightarrow x = 3 \text{ solución}$

○ Si $x = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{4}+1} = \frac{10}{4} - 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq -\frac{3}{2}$

5) $\sqrt{3x-2} + 2 = 2x - 6$

$$\sqrt{3x-2} = 2x - 8 \Rightarrow 3x - 2 = (2x - 8)^2 \Rightarrow 3x - 2 = 4x^2 - 32x + 64 \Rightarrow 4x^2 - 35x + 66 = 0$$

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 4 \cdot 66}}{2 \cdot 4} = \frac{35 \pm 13}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{35+13}{8} = 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6} \\ x_4 = \frac{35-13}{8} = \frac{22}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

○ Si $x = 6 \Rightarrow \sqrt{18-2} + 2 = 12 - 6 \Rightarrow 4 + 2 = 6 \Rightarrow x = 6 \text{ solución}$

○ Si $x = \frac{11}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{33}{4}-2} + 2 = \frac{22}{4} - 6 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} + 2 = \frac{11}{2} - 6 \Rightarrow \frac{5}{2} + 2 \neq -\frac{1}{2}$

6) $\sqrt{x+7} = 2x-1$

$$x+7 = (2x-1)^2 \Rightarrow x+7 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 11}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+11}{8} = 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \\ x_2 = \frac{5-11}{8} = \frac{6}{8} \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

o Si $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2+7} = 4-1 \Rightarrow 3=3 \Rightarrow x = 2$ solución

o Si $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{-\frac{3}{4}+7} = -\frac{6}{4}-1 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{10}{4} \Rightarrow \frac{5}{2} \neq -\frac{5}{2}$

7) $\sqrt{3x+1} - 2 = x - 3$

$$\sqrt{3x+1} - 2 = x - 3 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = x - 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 3x+1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$$

Comprobación:

o Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{1} - 2 = 0 - 3$

o Si $x = 5 \Rightarrow \sqrt{15+1} - 2 = 5 - 3 \Rightarrow 4 - 2 = 2 \Rightarrow x = 5$ solución

8) $\sqrt{4x+4} - x = 2x - 5$

$$\sqrt{4x+4} - x = 2x - 5 \Rightarrow \sqrt{4x+4} = 3x - 5 \Rightarrow (3x-5)^2 = 4x+4 \Rightarrow 9x^2 - 30x + 25 = 4x+4 \Rightarrow 9x^2 - 34x + 21 = 0$$

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 9 \cdot 21}}{2 \cdot 9} = \frac{34 \pm 20}{18} = \begin{cases} x_1 = \frac{54}{18} \Rightarrow \boxed{x_1 = 3} \\ x_2 = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Comprobación:

o Si $x = 3 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 3 + 4} - 3 = 6 - 5 \Rightarrow 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = 3$ solución

o Si $x = 7/9 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot \frac{7}{9} + 4} - 3 = \frac{14}{9} - 5 \Rightarrow \frac{8}{3} - 3 = \frac{14}{9} - 5 \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{31}{9}$

9) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

$$x-1 = \sqrt{25-x^2} \Rightarrow (x-1)^2 = 25-x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 25-x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+7}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 4} \\ x_2 = \frac{1-7}{2} = -3 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

Comprobación:

o Si $x = 4 \Rightarrow 4 - \sqrt{25-16} = 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$ solución

o Si $x = -3 \Rightarrow -3 - \sqrt{25-9} = 1 \Rightarrow -3 - 4 \neq 1$

10) $3x + \sqrt{x^2 - 5x + 16} = 19$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 16} = 19 - 3x \Rightarrow x^2 - 5x + 16 = 9x^2 - 114x + 361 \Rightarrow 8x^2 - 109x + 345 = 0$$

$$x = \frac{109 \pm \sqrt{109^2 - 4 \cdot 8 \cdot 345}}{2 \cdot 8} = \frac{109 \pm 29}{16} = \begin{cases} x_1 = \frac{109 + 29}{16} = \frac{138}{16} \Rightarrow x_1 = \frac{69}{8} \\ x_2 = \frac{109 - 29}{16} = \frac{80}{16} \Rightarrow \boxed{x_2 = 5} \end{cases}$$

Comprobación:

○ Si $x = 5 \Rightarrow 15 + \sqrt{25 - 25 + 16} = 19 \Rightarrow 15 + 4 = 19 \Rightarrow x = 5$ solución

○ Si $x = \frac{69}{8} \Rightarrow \frac{207}{8} + \frac{55}{8} = 19 \Rightarrow \frac{262}{8} \neq 19$

11) $\sqrt{2x^2 + 7} - x = 3x - 1$

$$\sqrt{2x^2 + 7} - x = 3x - 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 7} = 4x - 1 \Rightarrow 2x^2 + 7 = 16x^2 - 8x + 1 \Rightarrow 14x^2 - 8x - 6 = 0 \Rightarrow 7x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3)}}{2 \cdot 7} = \frac{4 \pm 10}{14} = \begin{cases} x_1 = \frac{14}{14} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ x_2 = -\frac{6}{14} = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

Comprobación:

○ Si $x = 1 \Rightarrow \sqrt{2 + 7} - 1 = 3 - 1 \Rightarrow x = 1$ solución

○ Si $x = -\frac{3}{7} \Rightarrow \sqrt{2 \cdot \frac{9}{49} + 7} + \frac{3}{7} = -3 \cdot \frac{3}{7} - 1$

12) $\sqrt{2 - x^2} = 2x - 1$

$$\sqrt{2 - x^2} = 2x - 1 \Rightarrow 2 - x^2 = (2x - 1)^2 \Rightarrow 2 - x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5} = \frac{4 \pm 6}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{10} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ x_2 = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Comprobación:

○ Si $x = 1 \Rightarrow \sqrt{2 - 1} = 2 - 1 \Rightarrow x = 1$ solución

○ Si $x = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{1}{25}} = -2 \cdot \frac{1}{5} - 1$

$$13) \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$$

$$x+3 + \sqrt{x^2+3x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+3x} = -1-x \Rightarrow x^2+3x = 1+x^2+2x \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow \sqrt{1+3} - \sqrt{1} = \frac{2}{\sqrt{1+3}} \Rightarrow 2-1=1 \Rightarrow x = 1 \text{ solución}$$

$$14) \sqrt{x-20} + \sqrt{x} = \frac{40}{\sqrt{x-20}}$$

$$x-20 + \sqrt{x^2-20x} = 40 \Rightarrow \sqrt{x^2-20x} = 60-x \Rightarrow x^2-20x = 3600-120x+x^2 \Rightarrow 3600 = 100x \Rightarrow \boxed{x=36}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 36 \Rightarrow \sqrt{36-20} + \sqrt{36} = \frac{40}{\sqrt{36-20}} \Rightarrow 4+6 = \frac{40}{4}$$

$$15) \frac{2\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} = \frac{5+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$4x = 25 - x \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow 4 \cdot 5 = 25 - 5$$

$$16) \frac{\sqrt{x}+1}{x-3} = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$x-1 = x^2 - x - 3x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{x_1=4} \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{4}+1}{4-3} = \frac{4-1}{\sqrt{4}-1} \Rightarrow 2+1 = 4-1$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1}+1}{1-3} \neq \frac{1-1}{\sqrt{1}-1}$$