

EJERCICIOS RESUELTOS RADICALES Y LOGARITMOS

1 Calcula las siguientes operaciones, expresando el resultado con el menor número de radicales:

a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{5}}$

e) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{3^{17}}$

b) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{2^4}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{2000}$

a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{5}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 27}{3 \cdot 5}} = \sqrt{9} = 3$

e) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{3^{17}} = \sqrt[4]{3^{20}} = 3^5$

b) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$

d) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{\frac{2}{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{\frac{1}{8000}} = \frac{1}{20}$

2 Calcula las siguientes operaciones, extrayendo el máximo número de factores.

a) $(\sqrt[4]{2^7})^3$

b) $(\sqrt{3 \cdot 2^3})^7$

c) $\sqrt[3]{2^{18}}$

a) $(\sqrt[4]{2^7})^3 = \sqrt[4]{2^{21}} = 2^5 \sqrt[4]{2}$

b) $(\sqrt{3 \cdot 2^3})^7 = \sqrt{3^7 \cdot 2^{21}} = 3^3 \cdot 2^{10} \sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{2^{18}} = \sqrt{2^6} = 2^3$

3 Extrae fuera de la raíz todos los factores posibles.

a) $\sqrt{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7}$

b) $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{12} \cdot c^7}$

a) $\sqrt{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^7} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5}$

b) $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{12} \cdot c^7} = a \cdot b^4 \cdot c^2 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot c}$

4 Extrae fuera de la raíz todos los factores posibles.

a) $\sqrt[5]{\frac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{20}}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 4^5}{8^3}}$

a) $\sqrt[5]{\frac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{20}}} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^4} \sqrt[5]{2 \cdot 3^2}$

b) $\sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 4^5}{8^3}} = \sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 2^{10}}{2^9}} = \sqrt[4]{2^9} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2}$

5 Introduce los factores dentro de la raíz y simplifica.

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{2^7}$

c) $\frac{2^3 \cdot 3^4}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{5^{11} \cdot 2}{3^{10}}}$

b) $3^5 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 7^2}$

d) $\frac{ab^3}{c^{-2}} \sqrt{\frac{a^3}{b^3 c^3}}$

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 2^7} = \sqrt{2^{13} \cdot 3^{10}}$

c) $\frac{2^3 \cdot 3^4}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{5^{11} \cdot 2}{3^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{2^9 \cdot 3^{12} \cdot 5^{11} \cdot 2}{5^3 \cdot 3^{10}}} = \sqrt[3]{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^8}$

b) $3^5 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 7^2} = \sqrt[4]{3^{21} \cdot 7^6}$

d) $\frac{ab^3}{c^{-2}} \sqrt{\frac{a^3}{b^3 c^3}} = \sqrt{\frac{a^2 b^6 a^3}{c^{-4} b^3 c^3}} = \sqrt{a^5 b^3 c}$

6 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}$

b) $\sqrt[4]{\frac{2^3}{3^7}} \cdot \sqrt[6]{\frac{3^7 \cdot 2^5}{7}}$

a) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{27}} = \sqrt[4]{a^9}$

b) $\sqrt[4]{\frac{2^3}{3^7}} \cdot \sqrt[6]{\frac{3^7 \cdot 2^5}{7}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{3^{21}}} \cdot \sqrt[12]{\frac{3^{14} \cdot 2^{10}}{7^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^{19}}{3^7 \cdot 7^2}}$

7 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2 y^7} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^{11} y^8}}$ c) $\sqrt[4]{3^2 \cdot \sqrt[5]{3^4}}$

a) $\frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^9 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3^8}} = \sqrt[12]{\frac{2^5}{3^5}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2 y^7} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^{11} y^8}} = \frac{\sqrt[6]{x^4 y^{14}} \cdot \sqrt[6]{x^3 y^3}}{\sqrt[6]{x^{11} y^8}} = \sqrt[6]{\frac{y^9}{x^4}}$

c) $\sqrt[4]{3^2 \cdot \sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{10} \cdot 3^4}} = \sqrt[20]{3^{14}} = \sqrt[10]{3^7}$

8 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + \sqrt{200}$ d) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32}$
 b) $2\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{25} + \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ e) $\sqrt{50} - \sqrt{\frac{18}{4}} + \sqrt{\frac{72}{25}}$
 c) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4}$ f) $10 \cdot \sqrt[3]{0,024} + 5 \cdot \sqrt[3]{0,003}$

a) $\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + \sqrt{200} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{25} + \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4} = a\sqrt{5} - 4a\sqrt{5} + 2a^2\sqrt{5} = (2a^2 - 3a)\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32} = 2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt{50} - \sqrt{\frac{18}{4}} + \sqrt{\frac{72}{25}} = 5\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{6}{5}\sqrt{2} = \frac{47}{10}\sqrt{2}$

f) $10 \cdot \sqrt[3]{0,024} + 5 \cdot \sqrt[3]{0,003} = 10 \cdot \frac{2}{10}\sqrt[3]{3} + 5 \cdot \frac{1}{10}\sqrt[3]{3} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{3}$

9 Racionaliza las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{12}{\sqrt[7]{2^5}}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}$

b) $\frac{2}{5\sqrt{6}}$ d) $\frac{40}{\sqrt[4]{2^{17}}}$ f) $\frac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[6]{2^{11}}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{12}{\sqrt[7]{2^5}} = \frac{12\sqrt[7]{2^2}}{\sqrt[7]{2^5} \cdot \sqrt[7]{2^2}} = \frac{12\sqrt[7]{2^2}}{2} = 6\sqrt[7]{2^2}$

b) $\frac{2}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5 \cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{15}$ d) $\frac{40}{\sqrt[4]{2^{17}}} = \frac{40\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^{20}}} = \frac{40\sqrt[4]{2^3}}{2^5} = \frac{5\sqrt[4]{2^3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$

f) $\frac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[6]{2^{11}}} = \frac{\sqrt[4]{2^9} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{2^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2^{19}}}{4}$

10 Extrae de la raíz todos los factores posibles.

a) $\sqrt[5]{\frac{x^{12}y^{54}}{z^{100}}}$ b) $\frac{2^3}{3^4} \sqrt[6]{\frac{3^{20} \cdot 2^{10}}{5^6}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{4^5 \cdot 6^4 \cdot 3}{18^2}}$

a) $\sqrt[5]{\frac{x^{12}y^{54}}{z^{100}}} = \frac{x^2 y^{10}}{z^{20}} \sqrt[5]{x^2 y^4}$

b) $\frac{2^3}{3^4} \sqrt[6]{\frac{3^{20} \cdot 2^{10}}{5^6}} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2}{3^4 \cdot 5} \sqrt[6]{3^2 \cdot 2^4} = \frac{2^4}{3 \cdot 5} \sqrt[6]{3^2 \cdot 2^4} = \frac{2^4}{3 \cdot 5} \sqrt[3]{3 \cdot 2^2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{4^5 \cdot 6^4 \cdot 3}{18^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^{10} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^4}} = \sqrt[3]{2^{12} \cdot 3} = 2^4 \cdot \sqrt[3]{3}$

11 Realiza las operaciones indicadas.

a) $\sqrt[8]{2^5 \cdot 3^6} \cdot \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^5}$

b) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^3}}$

a) $\sqrt[8]{2^5 \cdot 3^6} \cdot \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^5} = \sqrt[24]{2^{15} \cdot 3^{18} \cdot 2^{36} \cdot 3^{20}} = \sqrt[24]{2^{51} \cdot 3^{38}}$

b) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[12]{\frac{a^9 a^6}{a^8}} = \sqrt[12]{a^7}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^3} = \sqrt[12]{2^3}$

12 Calcula las siguientes operaciones.

a) $3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{20} - \sqrt{75} - 4\sqrt{45}$

a) $3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 - 7 + 4)\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = 0$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{20} - \sqrt{75} - 4\sqrt{45} = \frac{1}{2}2\sqrt{5} - 5\sqrt{3} - 4 \cdot 3\sqrt{5} = -11\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$

13 Expresa como un único radical:

a) $5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6}$

b) $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 14\sqrt{6} = \sqrt{14^2 \cdot 6}$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{30}$

d) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$

f) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7}$

f) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 5}{4^2}}$

14 Racionaliza las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

d) $\frac{5}{8 - 2\sqrt{2}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{7 - 3} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{4}}{3 - 2} = \sqrt{6} + 2$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{2(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{5}$

d) $\frac{5}{8 - 2\sqrt{2}} = \frac{5(8 + 2\sqrt{2})}{(8 - 2\sqrt{2})(8 + 2\sqrt{2})} = \frac{5(8 + 2\sqrt{2})}{56}$

15 Utiliza la definición y las propiedades de los logaritmos para:

a) Reducir a un solo logaritmo y calcular: $\log 40 + \log 25$

b) Calcular $\log 8$ sabiendo que $\log 2 \approx 0,301$.

a) $\log 40 + \log 25 = \log (40 \cdot 25) = \log 1000 = 3$

b) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 \approx 3 \cdot 0,301 = 0,903$

16 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 10\,000$

b) $\log_3 81$

a) $\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$

b) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

c) $\log_2 256$

d) $\log_3 243$

c) $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$

d) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$

17 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0,25$

b) $\log 0,001$

a) $\log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$

b) $\log 0,001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$

c) $4 = 2^2 \Rightarrow 2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $9 = 3^2 \Rightarrow 3 = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}; \quad 27 = 3^3 = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 9^{\frac{3}{2}} \quad \log_9 27 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

c) $\log_4 2$

d) $\log_9 27$

18 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0,125$

b) $\log_3 0,333\dots$

c) $\log_3 \frac{2}{54}$

d) $\log 0,000\,01$

e) $\log_{16} 2$

f) $\log_{64} 2$

g) $\log_{16} 64$

h) $\log_8 4$

i) $\log_4 \sqrt{2}$

a) $\log_2 0,125 = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

b) $\log_3 0,333\dots = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

c) $\log_3 \frac{2}{54} = \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$

d) $\log 0,000\,01 = \log 10^{-5} = -5$

e) $\log_{16} 2 = \log_{16} \sqrt[4]{16} = \log_{16} 16^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

f) $\log_{64} 2 = \log_{64} \sqrt[6]{64} = \frac{1}{6}$

g) $\log_{16} 64 = \log_{16} 2^6 = \log_{16} (\sqrt[4]{16})^6 = \log_{16} 16^{\frac{6}{4}} = \frac{3}{2}$

h) $\log_8 4 = \log_8 2^2 = \log_8 (\sqrt[3]{8})^2 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

i) $\log_4 \sqrt{2} = \log_4 \sqrt[4]{4} = \log_4 4^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

- 19 Conociendo los valores aproximados de $\log 2 = 0,301$ y $\log 3 = 0,477$, calcula los siguientes usando las propiedades de los logaritmos.

a) $\log 24$

b) $\log 5$

$$a) \log 24 = \log (2^3 \cdot 3) = \log 2^3 + \log 3 = 3 \log 2 + \log 3 = 3 \cdot 0,301 + 0,477 = 1,38$$

$$b) \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699$$

- 20 Calcula los siguientes logaritmos usando los datos del ejercicio resuelto anterior.

a) $\log 36$

d) $\log \frac{9}{24}$

g) $\log 75$

b) $\log 64$

e) $\log 20$

h) $\log 0,2$

c) $\log \frac{2}{3}$

f) $\log 150$

i) $\log 0,8333\dots$

$$a) \log 36 = \log (2^2 \cdot 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2 \log 2 + 2 \log 3 = 2 \cdot 0,301 + 2 \cdot 0,477 = 1,556$$

$$b) \log 64 = \log 2^6 = 6 \log 2 = 6 \cdot 0,301 = 1,806$$

$$c) \log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = -0,176$$

$$d) \log \frac{9}{24} = \log \frac{3}{8} = \log 3 - 3 \log 2 = -0,426$$

$$e) \log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0,301 + 1 = 1,301$$

$$f) \log 150 = \log \frac{3 \cdot 100}{2} = \log 3 + \log 100 - \log 2 = 2,176$$

$$g) \log 75 = \log \frac{3 \cdot 100}{4} = \log 3 + \log 100 - 2 \log 2 = 1,875$$

$$h) \log 0,2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0,301 - 1 = -0,699$$

$$i) \log 0,8333\dots = \log \frac{5}{6} = \log \frac{10}{12} = \log 10 - \log 12 = 1 - (2 \log 2 + \log 3) = -0,079$$

- 21 Emplea la fórmula del cambio de base y los datos del ejercicio 49 para calcular los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 2$

c) $\log_3 32$

e) $\log_2 30$

b) $\log_2 9$

d) $\log_2 10$

f) $\log_8 2$

$$a) \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,301}{0,477} = 0,631$$

$$b) \log_2 9 = \frac{\log 9}{\log 2} = \frac{\log 3^2}{\log 2} = \frac{2 \log 3}{\log 2} = \frac{2 \cdot 0,477}{0,301} = 3,169$$

$$c) \log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = \frac{5 \log 2}{\log 3} = 3,155$$

$$d) \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0,301} = 3,322$$

$$e) \log_2 30 = \frac{\log 30}{\log 2} = \frac{\log 3 + \log 10}{\log 2} = 4,907$$

$$f) \log_8 2 = \frac{\log 2}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 2^3} = \frac{\log 2}{3 \log 2} = \frac{1}{3}$$

22 Calcula las siguientes operaciones.

a) $\log_3 7 \cdot \log_7 3$

b) $-\log_3 5 \cdot \log_5 9$

c) $\log_7 (\log_3 (\log_2 8))$

d) $\log_4 (\log_2 (\log_3 (10 - \log 10)))$

a) $\log_3 7 \cdot \log_7 3 = \frac{\log 7}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 7} = 1$

b) $-\log_3 5 \cdot \log_5 9 = -\frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 9}{\log 5} = -\frac{\log 3^2}{\log 3} = -\frac{2 \log 3}{\log 3} = -2$

c) $\log_7 (\log_3 (\log_2 8)) = \log_7 (\log_3 (\log_2 2^3)) = \log_7 (\log_3 3) = \log_7 1 = 0$

d) $\log_4 (\log_2 (\log_3 (10 - \log 10))) = \log_4 (\log_2 (\log_3 9)) = \log_4 (\log_2 2) = \log_4 1 = 0$

23 Sabiendo los valores de $\log a = 0,5$ y $\log b = 0,3$, calcula $\log \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{10}}$.

Usando las propiedades de los logaritmos,

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{10}} &= \frac{1}{3} \log \frac{a^2 \cdot b}{10} = \frac{1}{3} (\log (a^2 \cdot b) - \log 10) = \\ &= \frac{1}{3} (\log a^2 + \log b - 1) = \frac{1}{3} (2 \log a + \log b - 1) \end{aligned}$$

Se sustituyen los valores dados.

$$\log \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{10}} = \frac{1}{3} (2 \cdot 0,5 + 0,3 - 1) = \frac{1}{3} \cdot 0,3 = 0,1$$

Con los datos anteriores, calcula el logaritmo: $\log \frac{\sqrt{a}}{100b^3}$.

$$\log \frac{\sqrt{a}}{100b^3} = \log \sqrt{a} - \log 100b^3 = \log a^{\frac{1}{2}} - (\log 100 + \log b^3) = \frac{1}{2} \log a - 2 - 3 \log b = \frac{1}{2} \cdot 0,5 - 2 - 3 \cdot 0,3 = -2,65$$

24 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 100\,000$

b) $\log_5 625$

c) $\log_7 343$

a) $\log 100\,000 = \log 10^5 = 5$

b) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$

c) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$

25 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0,125$

c) $\log_{81} 3$

e) $\log_{1000} 10$

b) $\log_4 \frac{3}{48}$

d) $\log_{25} 5$

f) $\log_{1000} 100$

a) $\log_2 0,125 = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

d) $\log_{25} 5 = \log_{25} \sqrt{25} = \frac{1}{2}$

b) $\log_4 \frac{3}{48} = \log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$

e) $\log_{1000} 10 = \log_{1000} \sqrt[3]{1000} = \frac{1}{3}$

c) $\log_{81} 3 = \log_{81} \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$

f) $\log_{1000} 100 = \log_{1000} 10^2 = \log_{1000} (\sqrt[3]{1000})^2 = \frac{2}{3}$

26 Expresa estos logaritmos como sumas y diferencias.

a) $\log (2^5 \cdot 3^7)^4$

b) $\log \frac{2^5 \cdot 3^4}{7^6}$

c) $\log \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{b}}$

a) $\log (2^5 \cdot 3^7)^4 = \log (2^{20} \cdot 3^{28}) = \log 2^{20} + \log 3^{28} = 20 \log 2 + 28 \log 3$

b) $\log \frac{2^5 \cdot 3^4}{7^6} = \log (2^5 \cdot 3^4) - \log 7^6 = 5 \log 2 + 4 \log 3 - 6 \log 7$

c) $\log \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{b}} = \log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{4} \log a - \frac{1}{2} \log b$