

Tema 5: Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

0 RESUMEN DE PROPIEDADES DE POTENCIAS

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^1 = a$$

$$3) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$4) a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$5) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$6) a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$7) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$8) a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$9) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

1 ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación exponencial es aquella ecuación en la que la incógnita aparece en el exponente.

$$a^x = b$$

Para resolver una ecuación exponencial vamos a tener en cuenta:

$$1) a > 0 \quad a \neq 1$$

$$2) a^m = a^n \Rightarrow m = n$$

$$3) a^m = b^m \Rightarrow a = b$$

Las ecuaciones exponenciales pueden clasificarse en tres tipos:

1.1 Misma base

Si tenemos en ambos miembros de una ecuación exponencial con la misma base, es sencillo resolverla. Basta con igualar los exponentes.

$$5^{-8x+1} = 5^{-4x+13} \Rightarrow -8x+1 = -4x+13 \Rightarrow -12 = 4x \Rightarrow x = -3$$

1.2 Exponencial igualada a un número

En este caso habría que transformar el número en una potencia de igual base que la que tenemos en el otro miembro, realizado este paso se igualan los exponentes.

$$2 \cdot 3^{2x-5} = 54 \Rightarrow 2 \cdot 3^{2x-5} = 2 \cdot 3^3 \Rightarrow 2x-5 = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

1.3 Reducción a una ecuación de segundo grado

Son ecuaciones exponenciales en las que, haciéndose un cambio de variable conveniente, se transforman en ecuaciones de segundo grado, de fácil resolución. Posteriormente se deshace el cambio y se obtiene el valor pedido de la variable.

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Si llamamos a $2^x = t$ tenemos entonces:

$$t^2 - 5 \cdot t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} t = 4 & \Rightarrow & 2^x = 4 & \Rightarrow & x = 2 \\ t = 1 & \Rightarrow & 2^x = 1 & \Rightarrow & x = 0 \end{matrix}$$

1.4 Ejercicios

1. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a. $5^{x^2-5x+6} = 1$

d. $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

f. $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

b. $2^{3x} = 0'5^{3x+2}$

e. $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

g. $3^{x^2-2} = \frac{1}{3}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a. $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$

c. $2^x + 2^{x+1} = 12$

e. $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

b. $3^x + 3^{x+2} = 30$

d. $2^x + 2^{1-x} = 3$

3. Resuelve estas ecuaciones.

a. $5^{2x} = 0'2^{4x-6}$

h. $3^{2x-5} = 2187$

b. $3^x = \sqrt[3]{9}$

i. $0'5^x = 16$

o. $10^{3+x} = 1$

c. $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

j. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

p. $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125$

d. $5 \cdot 7^{-x} = 35$

k. $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

q. $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$

e. $7 \cdot 3^x = 567$

l. $3^x + 3^{x+2} = 39$

f. $4^{2x-1} = 0'25$

m. $7^{x+2} = 823543$

r. $3^x - 3^{-x} = \frac{778}{27}$

g. $2^{x^2+1} = 32$

n. $5^{5x-2} = 390625$

4. Resuelve los siguientes sistemas.

a. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = 7 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 7^{x+y} = 49^3 \\ 7^{x-y} = 49 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 2^x = \frac{4^{33}}{4^y} \\ x - y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = -1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2^{x+y} = 128 \\ 2^x + 2^y = 24 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 2^x = \frac{4^{33}}{4^y} \\ 4x - 4^{-1} \cdot y = 4^0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2^x + 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^{y+1} = 7 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2^{x-y} = 4 \\ 2^x - 2^y = 768 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2^{x-6} \cdot 2^y = 16 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 5^{x+y} = 125^3 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases}$

2 LOGARITMOS

A veces nos encontramos con ecuaciones exponenciales que son difíciles de solucionar, por ejemplo,

$$2^x = 7$$

En este caso, podemos acotar el valor de la incógnita x entre dos y tres, pues sabemos que

$$4 \leq 7 \leq 8 \Rightarrow 2^2 \leq 2^x \leq 2^3 \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$$

Pero no sabemos el valor exacto de x . Nace así la necesidad de crear una herramienta que nos solucione este tipo de ecuaciones. $2^x = 7$

Definición: Se denomina logaritmo en base a de un número b , a otro número x al que hay que elevar a para obtener b . Esto puede escribirse como:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

a se denomina **base** del logaritmo y debe ser positivo y distinto de uno, es decir, $a > 0, a \neq 1$. A b se le llama **argumento** del logaritmo y debe ser positivo, es decir, $b > 0$.

Ejemplos:

1. Hallar el logaritmo en base 3 de 81.

Este problema consiste en calcular el número al que hay que elevar 3 para obtener 81; esto se escribe:

$$\log_3 81 = x \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4. \text{ Por lo tanto el logaritmo en base 3 de 81 es cuatro.}$$

2. Hallar el logaritmo en base 10 de 1000.

¿A qué número hay que elevar 10 para obtener 1000?

$$\log_{10} 1000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3. \text{ Así el logaritmo en base 10 de 1000 es tres.}$$

Nota: Cuando el logaritmo tiene base 10 se llama logaritmo decimal

2.1 Propiedades de los logaritmos

1) El **logaritmo de un producto** es la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

2) El **logaritmo de un cociente** es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

3) El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

4) Cambio de base en los logaritmos.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

5) En cualquier base:

a) $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$ para cualquier valor de a .

b) $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$ para cualquier valor de a .

Demostración de las propiedades:

Sean $x = \log_a b$, $y = \log_a c$ y $z = \log_a (b \cdot c)$, por lo tanto $a^x = b$, $a^y = c$ y $a^z = b \cdot c$

1) De esta manera tenemos que: $a^z = b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \Rightarrow$

$$\log_a (b \cdot c) = z = x + y = \log_a b + \log_a c \Rightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

2) $\log_a b = \log_a \left(\frac{b}{c} \cdot c \right) = \log_a \frac{b}{c} + \log_a c$ Entonces $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^n = \log_a (b \cdot b \cdot \dots \cdot b) = \log_a b + \log_a b + \dots + \log_a b = n \cdot \log_a b$

4) Como $x = \log_a b$ entonces tenemos que $a^x = b$ de esta forma tomamos logaritmo en base c .

$\log_c a^x = \log_c b$ aplicando la propiedad 3) tenemos que $x \cdot \log_c a = \log_c b$ y despejando x tenemos que

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ obtenemos así que } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

2.2 Ejercicios

1) Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.

a) $\log_2 8$

d) $\log 0'0001$

g) $\log_4 16$

b) $\log_3 81$

e) $\ln e^{33}$

h) $\log_4 0'25$

c) $\log 1000$

f) $\ln e^{-4}$

i) $\log_4 0'0625$

2) Sabiendo que $\log 2 = 0'3010$; $\log 3 = 0'4771$ y $\log 7 = 0'8451$, determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales. Con estos datos, ¿sabrías calcular $\log 3'5$? ¿Y $\log 1'5$?

3) Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.

4) Obtén el valor de x en las siguientes igualdades.

a) $\log_3 x = \frac{2}{3}$

b) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

c) $\log_x 3 = 2$

d) $\log_x 256 = -8$

5) Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $2'3^x = 18$

d) $3 + 2 \cdot \log x = 5$

f) $\frac{1}{3} \cdot \log_2 x = -3$

b) $\log x = \log 9 - \log 4$

e) $\frac{2^x}{3} = 7'5$

c) $\ln x = 3 \cdot \ln 5$

6) Resuelve las ecuaciones logarítmicas siguientes

a) $\log_2 x = -3'5$

e) $\log x = \log 15 - \log 2 + \log 3$

b) $\log_3 x^3 = \frac{13}{5}$

f) $\log(x-3) + \log x = \log(4x)$

c) $\ln(x-3) = 2$

g) $2 \cdot \log x - \log(x-16) = 2$

d) $\log_x 169 = 2$

h) $4 \cdot \log_2(x^2 + 1) = \log_2 81$

7) Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\log_3 \sqrt{x} - 3 \log_3 x + 4 \log_3 x^2 = 2$

f) $\log x^2 + \log 100 = 3$

b) $\log_2 x - \log_2 x^2 = \log_4 x$

g) $2 \log x - \log(x-16) = 2$

c) $2 \ln x - 4 \ln(\sqrt{x}) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 7$

h) $\log(5x+1) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x+4)$

d) $\log 2 + \log x = 1$

i) $\log(3x-1) - \log(2x+3) = 1 - \log 25$

e) $(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$

j) $2 + \log(x-2) = \sqrt[3]{1} - \log(x-2)$

k) $\frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$

l) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

m) $\frac{\log 2 + \log(x^2-5)}{\log(\sqrt{5-x})} = 2$

8) Resuelve los sistemas

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 30 \\ x + y = 60 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \log x - \log y = 1 \\ \log x + 2 \log y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x + y = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log(x+y) - \log(x-y) = \log 5 \\ \frac{2^x}{2^y} = 2 \end{cases}$