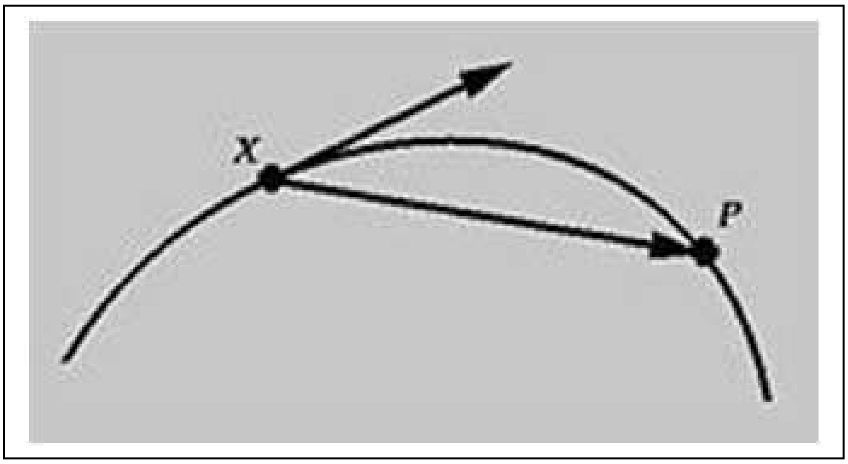
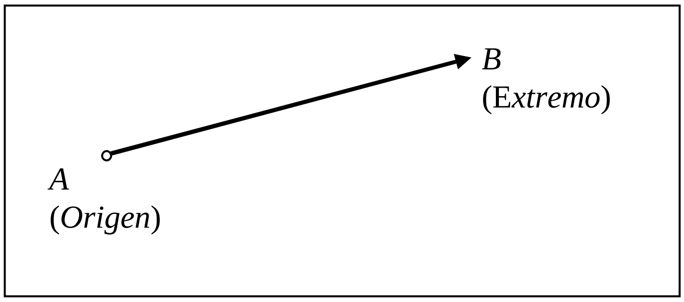
VECTORES EN EL PLANO



VECTORES EN EL PLANO

VECTOR FIJO

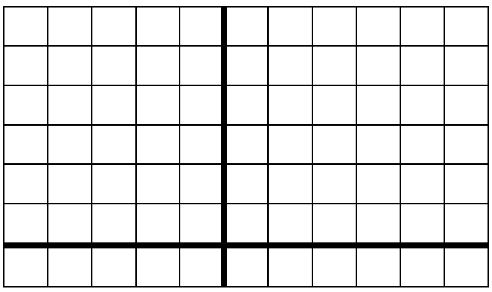
Un **vector fijo** $\vec{AB}$ es un *segmento orientado*, que está definido por dos puntos: Un punto *origen* y un punto *extremo*.



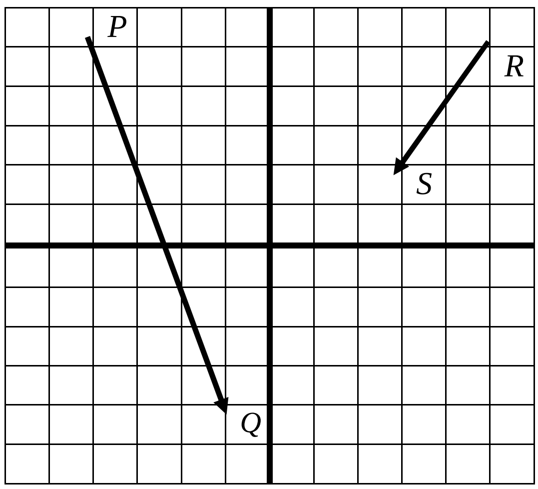
Los elementos de un vector fijo son:

- ✓ Punto de aplicación,
- ✓ Módulo
- ✓ Dirección
- ✓ Sentido

1. Represente el vector fijo $\vec{AB}$ que tiene por origen el punto $A = (–3. 1)$ y por extremo el punto $B = (3, 5)$.



2. Describe el origen y el extremo de los siguientes vectores fijos.



P = Q =

R = S =

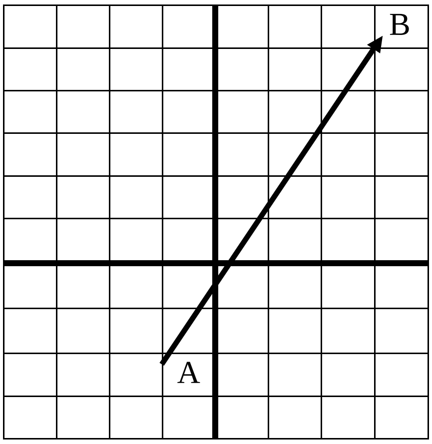
3. Calcula, usando el teorema de Pitágoras, las longitudes de los segmentos PQ y RS.

4. Enuncia una definición de “vector opuesto”

VECTOR LIBRE

Un **vector libre** representa un *desplazamiento*.
Un vector libre está definido por un módulo, una dirección y un sentido.

Un vector libre se describe por sus componentes: desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical.



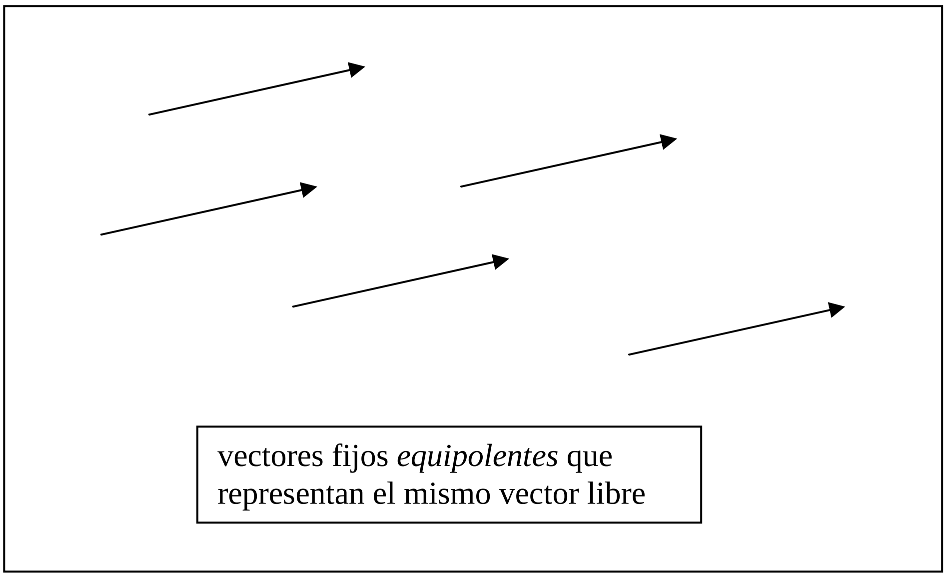
Ejemplo
Si $A = (-1, -2)$ y $B = (3, 5)$, el desplazamiento que lleva de A a B es 4 unidades hacia la derecha y 7 unidades hacia arriba. De modo que el vector libre asociado al vector fijo $\vec{AB}$ es

$$\vec{v} = B - A = (3,5) - (-1,-2) = (4,7)$$

Cada vector fijo tiene asociado un vector libre que se obtiene haciendo la diferencia de las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\boxed{\vec{v} = B - A}$$

Todos los vectores fijos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido representan el mismo vector libre.
Si dos segmentos orientados (vectores fijos) representan el mismo vector libre se dice que son vectores fijos *equipolentes*.

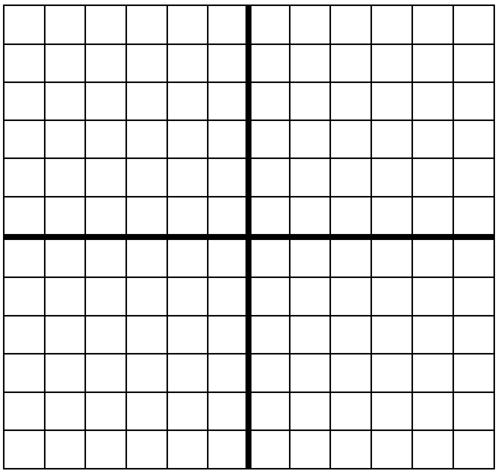


vectores fijos *equipolentes* que representan el mismo vector libre

5. Representa en unos ejes coordenados los siguientes puntos

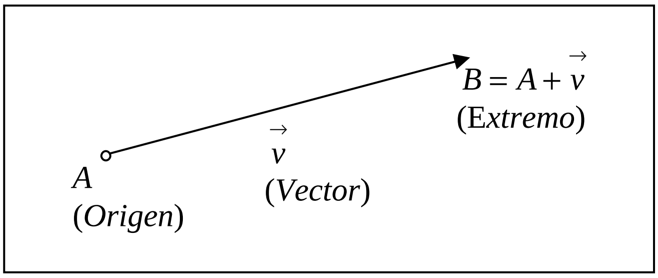
$A = (0, 1)$; $B =(-3, 2)$; $C = (4, 4)$ y $D = (0, -5)$

Calcula los vectores libres asociados a los siguientes vectores fijos



a) $\vec{AB} = B - A = (-3, 1)$ b) $\vec{BC}$

c) $\vec{CD} =$ d) $\vec{DA}$

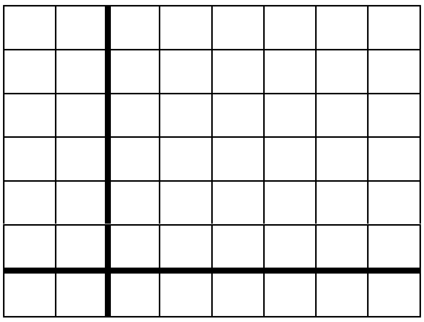


Si a un punto (origen) se le aplica un desplazamiento (vector libre) se obtiene un punto (extremo).

$$\boxed{B = A + \vec{v}}$$

Pto. extremo = pto. origen + vector desplazamiento

6. ¿Cuál es el punto que resulta de desplazar el punto $A = (1, 1)$ un vector $\vec{v} = (-2, 3)$? Haz un dibujo.



7. Suma el vector $\vec{v} = (2, -3)$ a los puntos
$A = (0, 0)$; $B = (-4. 2)$; $C = (2, -1)$ y $D = (0, 3)$.

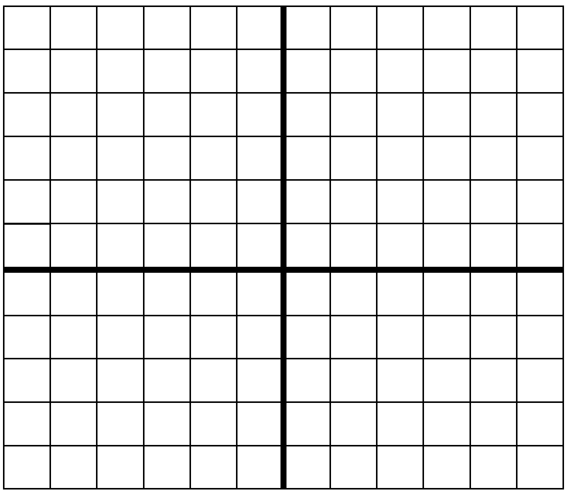
Calcula y representa los puntos

a) $A + \vec{v} = (0, 0) + (2, --3) = (2, -3)$

b) $B + \vec{v} =$

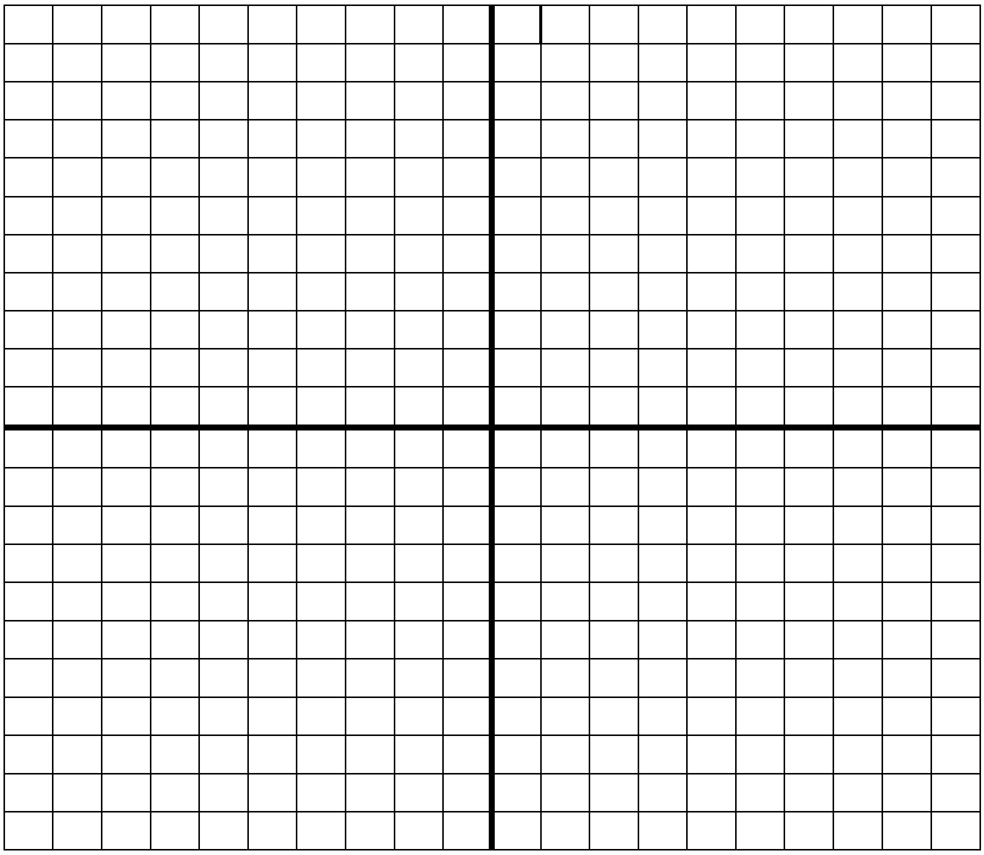
c) $C + \vec{v} =$

d) $D + \vec{v} =$



8. ¿Qué vector $\vec{v}$ hay que sumar al punto $P = (1, -4)$ para obtener el punto $Q = (-3, 1)$ de modo que $Q = P + \vec{v}$? [PISTA: $\vec{v} = Q - P$]

9. Pon dos ejemplos de vectores fijos equipolentes al vector $\overrightarrow{AB}$ en donde $A = (-3, -4)$ y $B = (1, 1)$. Haz un dibujo.

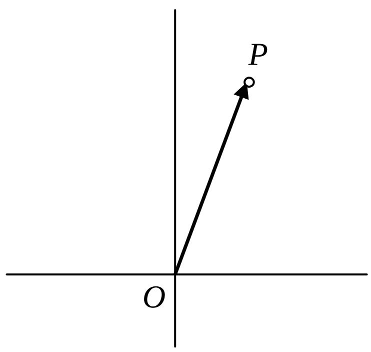


VECTOR DE POSICIÓN

Dado un punto P del plano, se llama **vector posición** al vector $\overrightarrow{OP}$, que tiene por origen el origen de coordenadas.

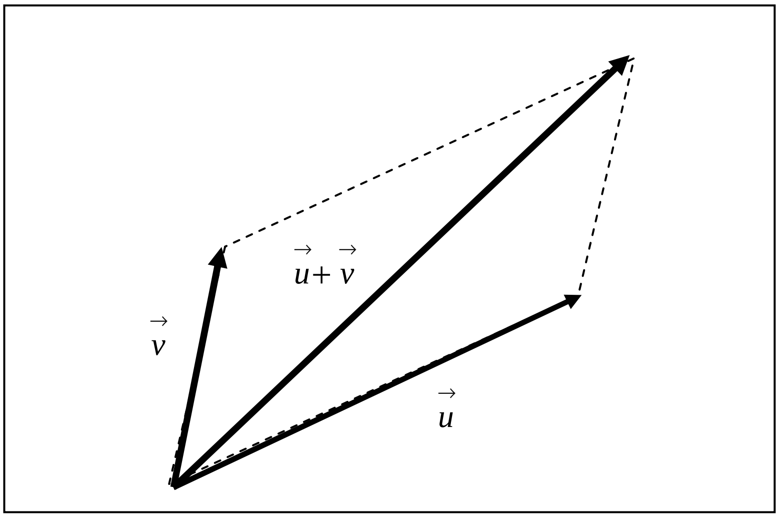
De este modo, una vez fijado el origen, cada punto del plano se identifica con su vector posición.

Las coordenadas del punto *P* se identifican con las coordenadas del vector libre que traslada el origen de coordenadas *O* al punto *P*.



vector posición del punto *P*

SUMA DE VECTORES LIBRES



Regla del paralelogramo

Geométricamente, la suma de dos vectores se hace usando la regla del paralelogramo.

Expresión analítica

Para sumar dos vectores se suman sus componentes

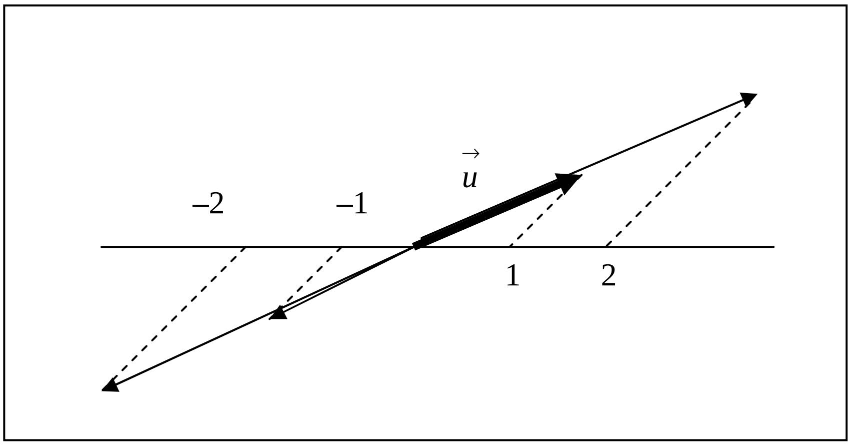
$$\boxed{(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)}$$

Sumar dos vectores libres significa hacer dos desplazamientos sucesivos.

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

El resultado de multiplicar un escalar (número real) por un vector es otro vector que tiene por módulo el producto del valor absoluto del escalar por el módulo del vector, por dirección la misma que el vector y por sentido el mismo que el del vector, si el escalar es positivo, y el opuesto si el escalar es negativo.

$$\boxed{\lambda (u_1, u_2) = (\lambda u_1 , \lambda u_2)}$$



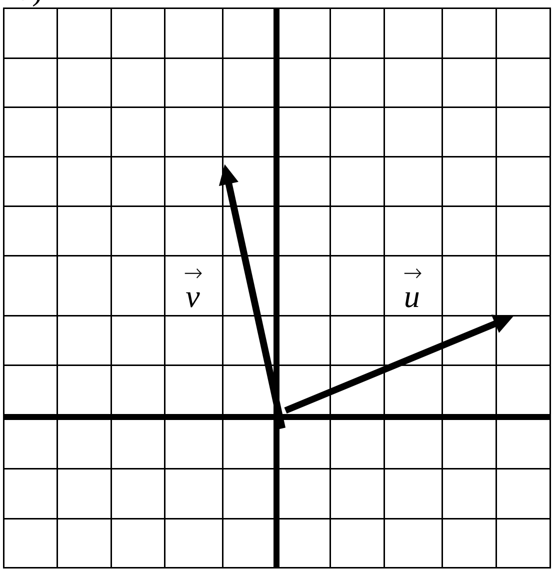
Para construir gráficamente el producto de un número escalar por un vector, se utiliza el teorema de Thales,

10. Explica con ejemplos qué se entiende en Física por magnitudes escalares y por magnitudes vectoriales.

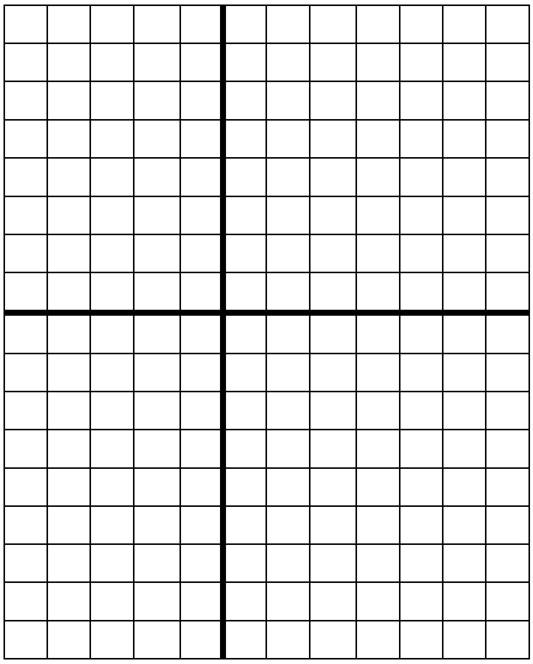
11. a) Suma gráficamente los ventores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que están dibujados. a) Escribe las coordenadas de los vectores sumandos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$

b) Calcula y dibuja el vector $\vec{u} - \vec{v}$

a)



b)



12. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 4)$ y $\vec{v} = (-2, -6)$, calcula y dibuja

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $5\vec{u}$

c) $2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

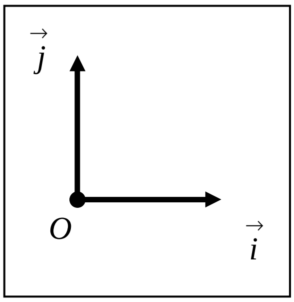
d) $-3\vec{u} + \vec{v}$

13. Calcula el vector $\vec{x}$ que hay que sumar a $\vec{u} = (2, 2)$ para obtener $\vec{v} = (0, 6)$. De modo que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v}$. [PISTA: despeja $\vec{x}$]

14. Considera dos pontos A y B. ¿Qué punto es el punto M que se define así?

$$M = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(A + B)$$

VECTORES COORDENADOS



Al vector unitario en el eje vertical horizontal hacia la derecha se le denomina $\vec{i}$. Al vector unitario en el eje vertical hacia arriba se le denomina $\vec{j}$ De este modo un vector $\vec{u}$ de coordenadas (u_1, u_2) puede escribirse como

$$\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}\,.$$

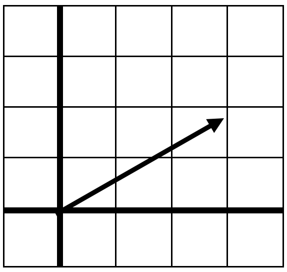
15. Si $\vec{u}$ = (2, 3); $\vec{v}$ = (3, –1) y $\vec{w}$ = (8, 1), calcula los escalares α y β de modo que $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$. [PISTA: Hay que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas]

MÓDULO DE UN VECTOR LIBRE

El módulo de un vector libre es la longitud del desplazamiento que representa.

Para calcular el módulo de un vector libre expresado en coordenadas se aplica el teorema de Pitágoras.

$$\boxed{\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}}$$



Ejemplo. El módulo del vector $\vec{u}$ = (3, 2) es

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

16. Calcula el módulo de los siguientes vectores libre

a) $\vec{u}$ = (–1, 5)   b) $\vec{v}$ = (2, –3)   c) $\vec{w}$ = (–1, –2)

a) $\left|\vec{u}\right| =$ b) $\left|\vec{v}\right| =$ c) $\left|\vec{w}\right| =$

17. Calcula cuál es el producto escalar de los vectores coordenados.

a) $\vec{i} \bullet \vec{i} =$ b) $\vec{i} \bullet \vec{j} =$ c) $\vec{j} \bullet \vec{i} =$ d) $\vec{j} \bullet \vec{j} =$

MÓDULO DE UN VECTOR FIJO. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une.

Si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ la distancia d(A, B) entre ambos puntos viene dada por la fórmula:

$$\boxed{d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

18. ¿Cuál es el módulo del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ siendo que $A = (–2, 3)$ y $B = (2, 1)$? ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y B?

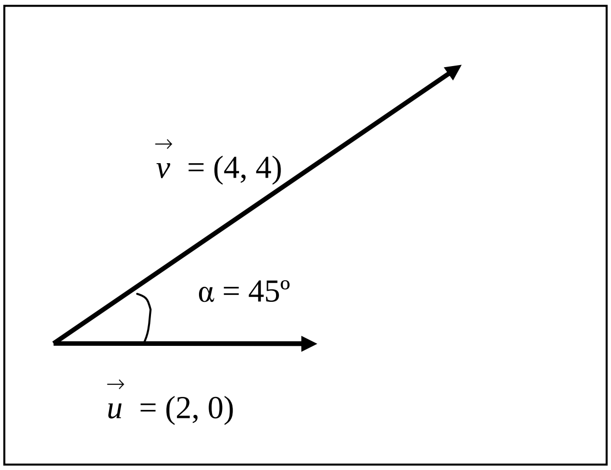
19. Calcula las coordenadas de un punto del eje de ordenadas que esté a una distancia de 5 unidades del punto $P = (4, 0)$. Haz un dibujo.

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El **producto escalar** de dos vectores es un número escalar que es el producto de los módulos de los dos vectores por el coseno del ángulo que forman.

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos(\alpha)}$$

Ejemplo: Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (2, 0)$ y $\vec{v} = (4, 4)$.



Para hallar el producto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$ primero se calcula

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \qquad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha) = \cos(45º) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De modo que

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$$

Expresión analítica del producto escalar.

Si los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ están definidos por sus coordenadas, el producto escalar viene dado por el la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = (u_1, u_2) \bullet (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

Ejemplo: Calcula el producto escalar del ejemplo anterior usando la expresión analítica

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (2,0) \bullet (4,4) = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 4 = 8 + 0 = 8$$

20. Busca información para explicar el sentido del producto escalar en la Física. Por ejemplo, el producto escalar es el trabajo que desarrolla una fuerza al efectuar un desplazamiento.

21. Para demostrar la expresión analítica de producto escalar hay que desarrollar esta expresión. Completa la demostración.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}\right) \bullet \left(v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}\right) = u_1 v_1 \vec{i} \bullet \vec{i} + u_1 v_2 \vec{i} \bullet \vec{j} + u_2 v_1 \vec{j} \bullet \vec{i} + u_2 v_2 \vec{j} \bullet \vec{j}$$

22. Calcula los siguientes productos escalares:

a) (–2, 4) ● (3, 3) = b) (–2, 2) ● (3, 3) = c) (–2, 3) ● (0, –3) =

A continuación vamos a ver algunas aplicaciones del producto escalar

Módulo de un vector

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{u} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \cos(0^o) = \left|\vec{u}\right|^2} \qquad \boxed{\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}}$$

Vectores perpendiculares

Dos vectores, no nulos, son perpendiculares si su producto escalar es cero.

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$$

En efecto, si dos vectores son perpendiculares el coseno del ángulo que forman es cero y, por tanto, su producto escalar es cero.

Cálculo del ángulo que forman dos vectores

$$\boxed{\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}}$$

Ejemplo: Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ = (2, –1) y $\vec{v}$ = (–1, 3).

Aplicando la fórmula anterior

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{-2-3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-5}{\sqrt{50}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De donde $\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=135º$

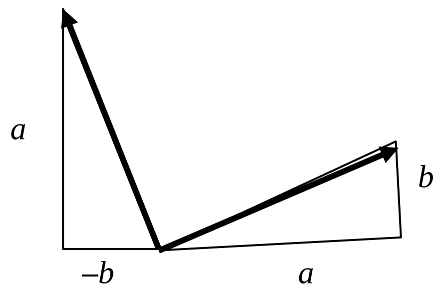
23. Haz un dibujo ilustrativo del ejemplo anterior.

24. Si $\vec{u}$ = (5, 3) y $\vec{v}$ = (x, 5) son dos vectores perpendiculares, halla el valor de x.

25. Los módulos de dos vectores son 3 y 5, respectivamente, y forman un ángulo de 60º. ¿Cuál es su producto escalar?

26. Si $\vec{u}$ = (1, –3) y $\vec{v}$ = (3, 0), calcula el ángulo que forman los vectores $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$.
(Deduce de ahí que los ángulos opuestos por el vértice son iguales)

27. Observa que los vectores $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (-b, a)$ son perpendiculares. Utiliza esto para decir un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, 5)$. Haz un dibujo.



PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Las operaciones con el producto escalar se pueden manejar simbólicamente usando las siguientes propiedades:

a) propiedad conmutativa: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

b) Distributiva de la suma: $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)$

c) Producto por un número escalar: $\lambda\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = \lambda\,\vec{a} \bullet \vec{b} = a \bullet \lambda\,\vec{b}$

28. Desarrolla los productos escalares

a) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) =$

b) $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) =$

c) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) =$

29. PARA INVESTIGAR

Busca en libros o en internet una demostración del *teorema del coseno* utilizando el producto escalar.

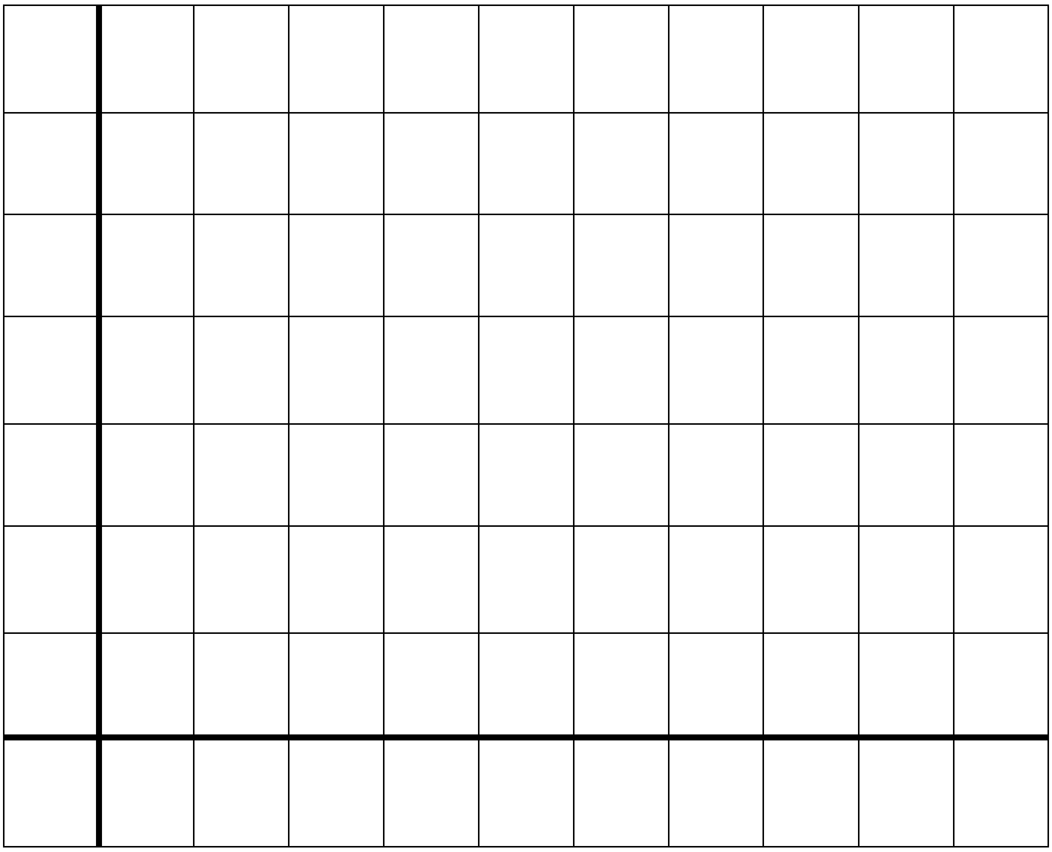
30. EN EL CUADERNO DE MATEMÁTICAS

Haz un resumen personal de los contenidos de estas fichas de trabajo. Escríbelo en tu cuaderno de Matemáticas. Puedes ampliarlos o completarlos con información o ilustraciones que encuentren en libros o en internet.

PROBLEMA GLOBAL:

a) Utiliza el cálculo vectorial para hallar las longitudes de los lados y la medida de los ángulos del triángulo que tiene sus vértices en los puntos A = (0, 2), B = (4, 6) y C = (8, 0).

b) Utiliza la trigonometría para calcula la medida de la altura del triángulo correspondiente al vértice A. Calcula el área del triángulo.



Soluciones:

a) a = 7,211: b = 8,246; c = 5,657; A = 59º; B = 79º; C = 42º

b) h_a = 5,5; Área = 20,02

EXAMEN

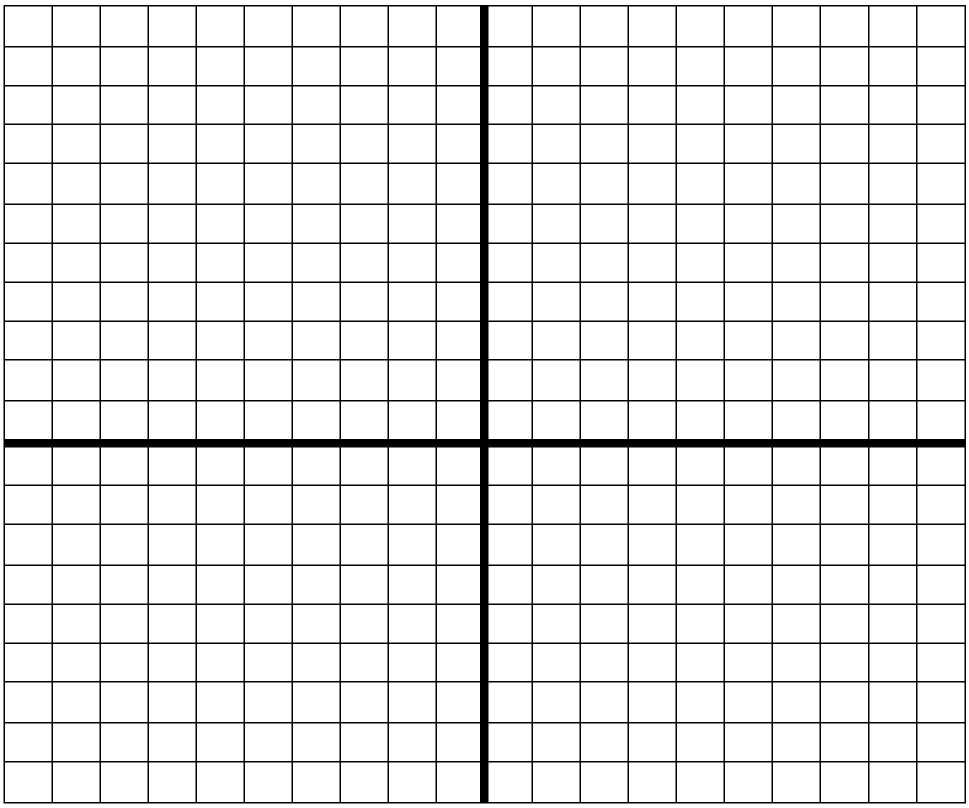
NOMBRE:………………………………………………………………………………

1. Dados los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (6, 8)$,

a) Representar el **segmento orientado** $\vec{AB}$

b) Decir qué **vector libre** $\vec{v} = B - A$.representa el desplazamiento de A hasta B

c) Calcula el punto $Q = P + \vec{v}$ siendo el punto $P = (-1, -4)$. Haz un dibujo.



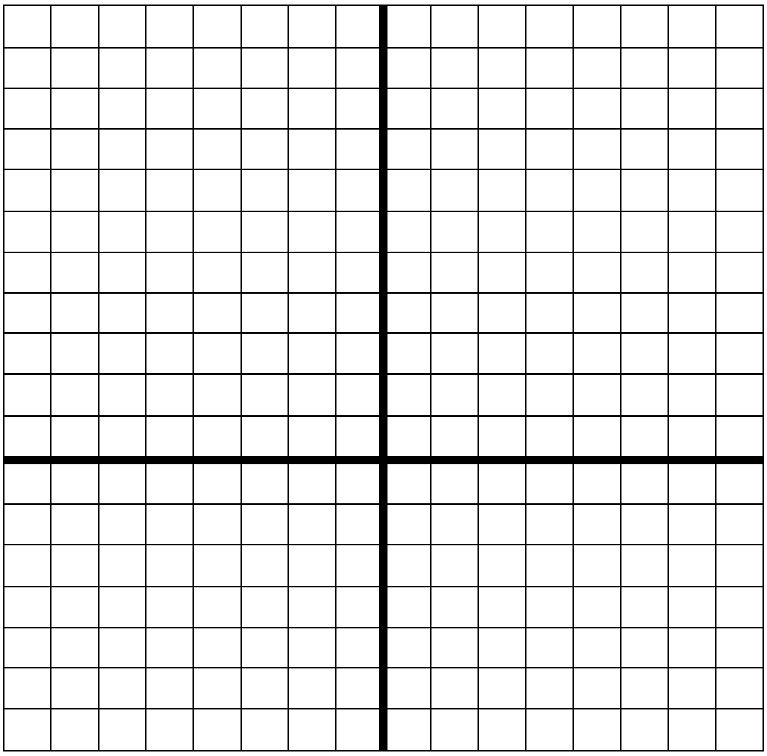
2. Con los datos del ejercicio anterior

a) Calcula la longitud del segmento AB

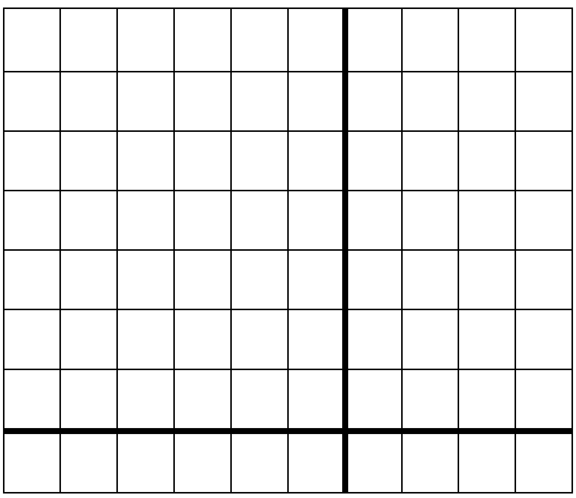
b) Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.

c) ¿Son iguales?

3. Un vector libre tiene de coordenadas $\vec{v} = (-4,7)$. Dibuja un segmento orientado, equipolente con él con origen en el punto $A = (-2, 2)$. ¿Cuál es el extremo, $B = A + \vec{v}$, de ese segmento orientado?



4. a) Calcula la longitud del segmento *AB*, siendo las coordenadas de de los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (-4, 6)$.
b) Calcula las coordenadas del punto medio del segmento *AB.* Investiga cómo hacerlo.
c) Haz un dibujo.



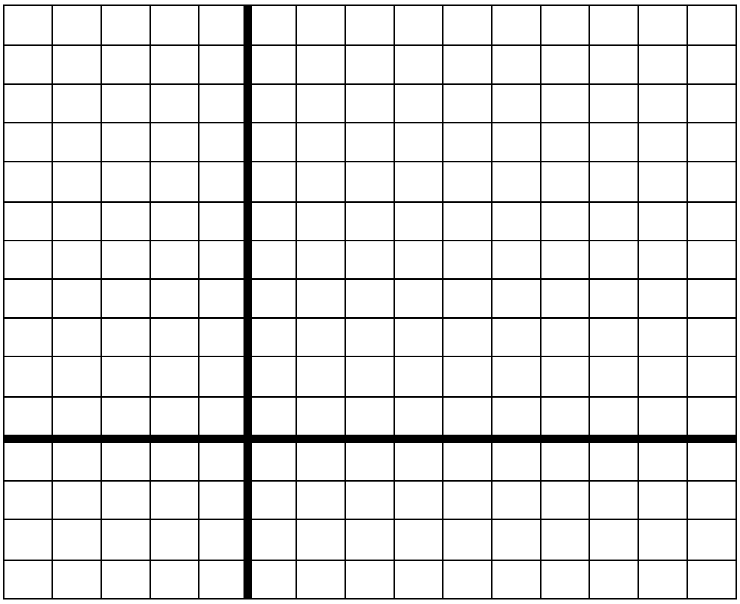
5. a) Representa los vectores libres $\vec{v} = (3,5)$ y $\vec{w} = (-5,2)$ con origen en el origen de coordenadas.

b) Representa también el vector suma $\vec{v} + \vec{w}$. Explica qué es la “regla del paralelogramo”

c) Haz una definición del “vector opuesto” a uno dado.

d) Representa el vector $\vec{v} - \vec{w}$.

e) Representa el vector $2\vec{v}$



6. Un vector libre $\vec{v} = (2,-5)$ tiene su extremo en el punto $Q = (-3, 7)$, ¿Cuáles son las coordenadas del punto origen P de modo que $\vec{v} = \vec{PQ}$? Haz un dibujo.

7. Calcula el ángulo que forma con la horizontal el vector $\vec{v} = (-2,6)$. [Pista: haz un dibujo y usa el concepto de tangente trigonométrica]

8. Estudia si son perpendiculares los siguientes pares de vectores

a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$.

b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$.

9. Calculate el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (5, -10)$ y $\vec{v} = (10, 0)$. Haz un dibujo aproximado

10. Los vértices de un triángulo son los puntos $A = (0, 0)$; $B = (8, 0)$ y $C = (2,10)$. Haz un dibujo.

a) Escribe los vectores correspondientes a cada uno de sus lados y calcula su módulo.

$a = \left|\vec{BC}\right| =$ $\qquad$ $b = \left|\vec{CA}\right| =$ $\qquad$ $c = \left|\vec{AB}\right|$

b) Utiliza el producto escalar para calcular los ángulos A, B y C del triángulo.

c) Calcula el área del triángulo.