LOS NÚMEROS REALES

1. Números reales

- Clasificación de los números reales
- Fracción generatriz de un número decimal
- Representación de números racionales en la recta real
- Aproximaciones
- Intervalos

2. Raíces y potencias

- Propiedades de las potencias de exponente racional
- Radicales equivalentes
- Simplificar radicales
- Extracción de factores de un radical
- Introducción de factores en un radical

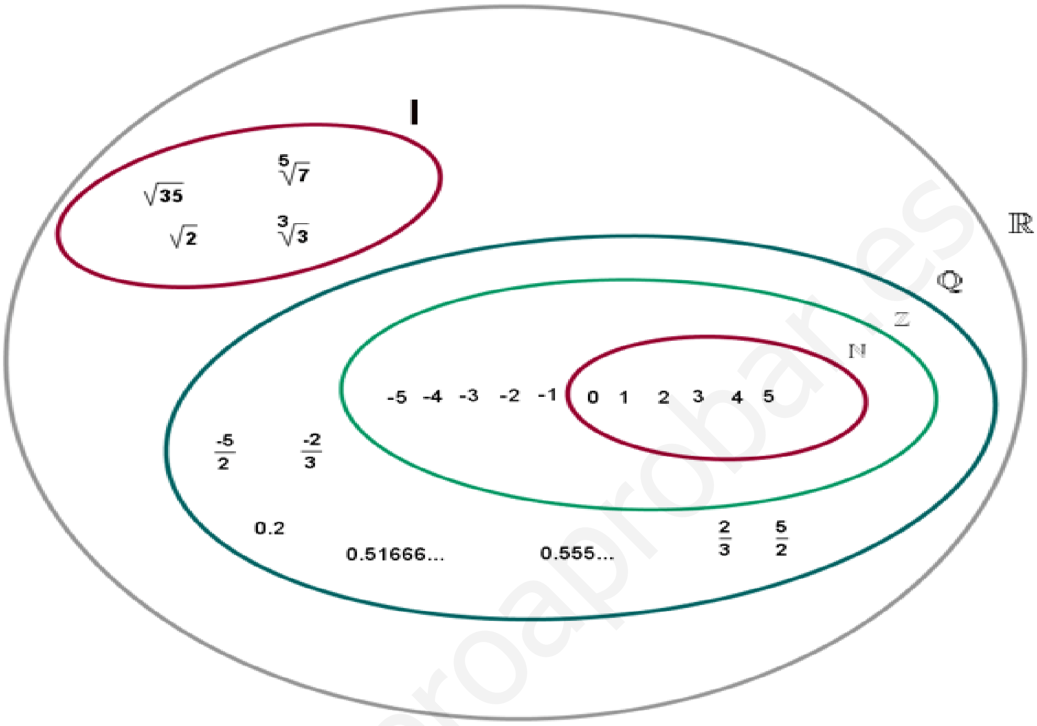
3. Operaciones con radicales

- Suma y resta de radicales
- Multiplicación de radicales
- División de radicales
- Potencia de radicales
- Raíz de un radical
- Racionalización

www.yoquieroaprobar.es

1. Números reales

- ## Clasificación de los números reales



- ## Fracción generatriz de un número decimal

Decimal exacto: se escribe el número sin coma, dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$1{,}35 = \frac{135}{100} = \frac{27}{20}$$

Decimal periódico puro: se escribe el número decimal sin la coma y se le resta la parte entera, y se divide por tantos 9 como cifras periódicas haya.

$$2{,}\overline{81} = \frac{281-2}{99} = \frac{279}{99} = \frac{31}{11}$$

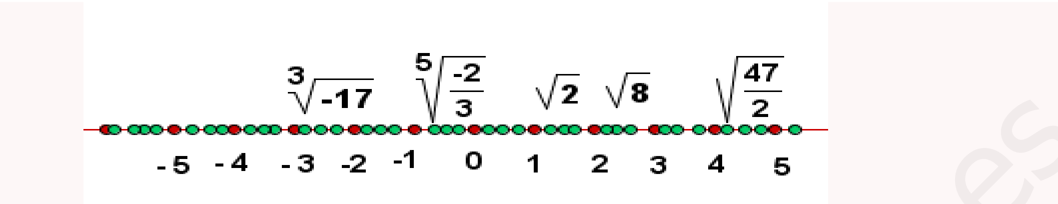
Decimal periódico mixto: se escribe el número decimal sin la coma y se le resta la parte entera y la parte decimal no periódica y se divide por tantos 9 como cifras periódicas seguidos de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$0{,}7\overline{52} = \frac{752-7}{990} = \frac{745}{990} = \frac{149}{198}$$

www.yoquieroaprobar.es

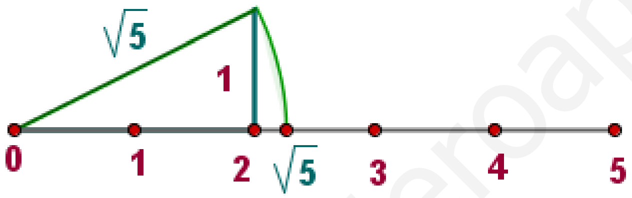
- **Representación de números racionales en la recta real**

La recta real es el conjunto ordenado de todos los números reales. Cada punto de la recta corresponde a un número real, y cada número está representado por un punto.



Para representar radicales de forma exacta se utiliza el teorema de Pitágoras

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$$



- **Aproximaciones**

La aproximación de los números reales se puede obtener mediante dos procedimientos: truncamiento y redondeo.

Truncamiento: el número se obtiene al suprimir las cifras a partir del orden de aproximación.
Por ejemplo si se aproxima por truncamiento el número 3,123432 a la milésima es 3,123 no se tiene en cuenta la cifra siguiente en el orden de aproximación

Redondeo: el número se obtiene al suprimir las cifras a partir del orden de aproximación pero teniendo en cuenta que si el siguiente número es inferior a 5, se queda igual; y que si es igual o superior a 5, se suma 1.
Por ejemplo, si se aproxima por redondea 3, 123432 a la milésima es 3,123. Pero si aproximamos a la milésima por redondeo el número 3, 1236 será 3,124

www.yoquieroaprobar.es

- ## Intervalos

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	{ x / a < x < b } Nº comprendidos entre a y b, sin incluir a ni b	
Intervalo cerrado	[a,b]	{ x / a ≤ x ≤ b } Nº comprendidos entre a y b, ambos incluidos.	
Intervalo semiabierto	(a,b]	{ x / a < x ≤ b } Nº comprendidos entre a y b, incluido b pero no a	
	[a,b)	{ x / a ≤ x < b } Nº comprendidos entre a y b, incluido a pero no b	
Semirrecta	(-∞,a)	{ x / x < a } Números menores que a	
	(-∞,a]	{ x / x ≤ a } Nº menores que a y el propio a	
	(a,+∞)	{ x / a < x } Números mayores que a	
	[a,+∞)	{ x / a ≤ x } Nº mayores que a y el propio a	

La propia **recta real** se representa en forma de intervalo, así: R = (-∞,+∞)

2. Raíces y potencias

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \rightarrow b^n = a$$

Raíz	*Potencia*
b : raíz a : radicando n : índice de la raíz	b : base a : potencia n : exponente

Raíz de índice par:

- Tiene la solución positiva y negativa, por ejemplo: $\sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow (-5)^2 = 25$
- No existe si el radicando es negativo. $\sqrt{-25} \rightarrow$ no existe.

Raíz de índice impar:

- Existe tanto si el radicando es positivo como negativo.
- La solución es positiva si el radicando es positivo. $\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$
- La solución es negativa si el radicando es negativo.
  $\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$

www.yoquieroaprobar.es

Un radical también se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ Por lo tanto podemos aplicar las propiedades de las potencias a los radicales si expresamos los radicales como potencias de exponente fraccionario, tal como se expresa en la siguiente tabla:

- **Propiedades de las potencias de exponente racional**

Multiplicación de potencias de la misma base	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
División de potencias de la misma base	$\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
Potencia de potencia	$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

- **Radicales equivalentes**

Los radicales equivalentes son diferentes expresiones de un mismo número.. Se obtienen multiplicando índice y exponente por un mismo número.

$\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt[16]{2^8}$

- **Simplificar radicales**

Vamos a simplificar $\sqrt[10]{243}$

Se descompone el radicando como producto de factores primos. Si descomponemos el número 243 como producto de factores primos obtenemos: $243=3^5$.

- Podemos simplificar el radical expresándolo como potencia de exponente fraccionario y simplificando la fracción $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,   volviendo a escribir la potencia como radical.

$$\sqrt[10]{243} = \sqrt[10]{3^5} = 3^{\frac{5}{10}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

- Pero también lo podemos hacer dividiendo índice y exponente entre el mismo número, en el ejemplo dividimos entre 5:

$$\sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10/5]{3^{5/5}} = \sqrt{3}$$

www.yoquieroaprobar.es

- **Extracción de factores de un radical**

Solamente se pueden extraer factores de un radical cuando el exponente es mayor que el índice, es decir:

$\sqrt[n]{a^m} \rightarrow m \geq n$

Dividimos el exponente entre el índice (sin calculadora), fuera del radical se escribe la base elevada al cociente y dentro del radical la base elevada al resto:

$\sqrt[3]{4^8} = 4^2 \cdot \sqrt[3]{4^2}$

- **Introducción de factores en un radical**

Para introducir un factor dentro de un radical, basta con elevarlo al índice de la raíz:

$$b \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{b^3 \cdot a^2}$$

Ejemplo: $4 \cdot \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{4^5 \cdot 3^3}$

3. Operaciones con radicales

- **Suma y resta de radicales**

Esta operación sólo se puede realizar entre radicales semejantes (los que tienen el mismo índice y el mismo radicando). Se pone el radical (como factor común) y se suman los coeficientes.

Ejemplo: $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (5 - 3 + 6)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

En algunos casos los radicales semejantes no se ven tan fácilmente, lo que tenemos que hacer es descomponer el radicando como producto de factores primos y extraer factores del radical, obteniendo así radicales semejantes, veamos un ejemplo:

$$\sqrt[3]{625} - \sqrt[6]{25} + 2 \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135} \xrightarrow{descomponer}$$
$$\sqrt[3]{5^4} - \sqrt[6]{5^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} \xrightarrow{extraer}$$
$$5 \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{5} \xrightarrow{sumar} (5 - 1 + 2 + 3) \cdot \sqrt[3]{5} = 9 \cdot \sqrt[3]{5}$$

www.yoquieroaprobar.es

- **Multiplicación de radicales**

- Con el mismo índice: es un radical con el mismo índice y como radicando el producto de radicandos. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

  Ejemplo: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5\cdot 4}=\sqrt[3]{20}$

- Con distinto índice: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$
  1) El m.c.m de los índices: m.c.m(n,m)= p, es el índice del nuevo radical.
  2) Elevar cada radicando al cociente de p entre cada índice
  3) Multiplicar los radicandos

  $$\sqrt[p]{a^{\frac{p}{n}}\cdot b^{\frac{p}{m}}}$$

  Ejemplo: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[12]{2^{\frac{12}{3}}\cdot 3^{\frac{12}{4}}\cdot 5^{\frac{12}{2}}}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3\cdot 5^6}$

- **División de radicales**

- Con el mismo índice: es un radical con el mismo índice y como radicando el cociente de radicandos. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

  Ejemplo: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5\cdot 4}=\sqrt[3]{20}$

- Con distinto índice: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$
  4) El m.c.m de los índices: m.c.m(n,m)= p, es el índice del nuevo radical.
  5) Elevar cada radicando al cociente de p entre cada índice
  6) Dividir los radicandos

  $$\sqrt[p]{a^{\frac{p}{n}}:b^{\frac{p}{m}}}$$

  Ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{\frac{2^{\frac{12}{3}}}{5^{\frac{12}{4}}}}=\sqrt[12]{\frac{2^4}{5^3}}$

www.yoquieroaprobar.es

- **Potencia de radicales**

Se eleva el radicando al exponente

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{Ejemplo: } \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$$

- **Raíz de un radical**

Se multiplican los índices

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a} \qquad \text{Ejemplo: } \sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot 3]{5} = \sqrt[6]{5}$$

- **Racionalización**

Está operación consiste en transformar una fracción que tenga uno o más radicales en el denominador en otra fracción sin radicales en el denominador. Podemos tener tres casos diferentes:

a) En el denominador tenemos un radical de índice 2: multiplicamos numerador y denominador por el radical de índice 2 del denominador

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

Ejemplo: $$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

b) En el denominador tenemos un radical de índice n > 2: multiplicamos numerador y denominador por el radical de índice n del denominador, cuya base del radicando este elevada al índice menos el exponente.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{\sqrt[n]{b^m \cdot b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{m-n}}}{b}$$

Ejemplo: $$\frac{3}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{3}{\sqrt[5]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{4^{5-3}}}{\sqrt[5]{4^{5-3}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^{3+2}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{4}$$

c) En el denominador tenemos una suma o diferencia de dos o más radicales de índice 2: multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, y realizamos el producto de fracciones.

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Ejemplo: $$\frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{2}} \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(6+\sqrt{2}\right)}{6^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(6+\sqrt{2}\right)}{36-2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(6+\sqrt{2}\right)}{34}$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicios

1. Encuentra qué radicales son equivalentes entre sí:

$$\sqrt{5};\sqrt[6]{125};\sqrt[3]{2};\sqrt[4]{9};\sqrt[10]{243};\sqrt[9]{8};\sqrt[8]{625};\sqrt[4]{25}$$

2. Simplifica los siguientes radicales:

$\sqrt{320} =$ $\quad\sqrt[3]{686} =$ $\quad\sqrt[4]{12960} =$ $\quad\sqrt{1350} =$

3. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas

a) $\sqrt{192x^2y^5}$ b) $\sqrt{600a^3b^4}$ c) $\sqrt[5]{1024a^6b^5c^{10}}$ d) $\sqrt[4]{3888x^4y^2z^5}$

4. Extrae de las raíces todos los factores y simplifica:

a) $\sqrt{\dfrac{27a^6b^3c^2}{392x^9y^2}}$ b) $6\sqrt{\dfrac{50a^3}{24x^2}}$ c) $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{4a^2}{27y^3}}$ d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{243x^4}{16a^2b^4}}$

5. Calcula:

a) $2\sqrt{5}-2\sqrt{45}+3\sqrt{80}-\sqrt{128}$

b) $\sqrt{63}+\sqrt{28}-2\sqrt{49}+\sqrt{175}$

c) $2\cdot\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{300}-3\cdot\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{75}$

d) $\sqrt{450}+4\sqrt{12}-5\sqrt{48}-2\sqrt{98}$

e) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{16}+2\cdot\sqrt[3]{150}$

f) $3\cdot\sqrt{80}-2\cdot\sqrt{800}+4\cdot\sqrt{320}-6\cdot\sqrt{450}$

g) $\sqrt[3]{686}+\sqrt[3]{81}-3\cdot\sqrt[3]{375}+2\cdot\sqrt[3]{648}$

h) $2\cdot\sqrt{45}-\dfrac{3}{4}\cdot\sqrt{125}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{180}$

i) $\dfrac{3}{4}\cdot\sqrt{48}+\dfrac{1}{2}\sqrt{12}+\dfrac{1}{6}\sqrt{72}-\dfrac{1}{3}\sqrt{18}$

j) $5\sqrt{50}+\dfrac{3}{14}\sqrt{98}-\dfrac{1}{3}\sqrt{162}$

k) $\dfrac{1}{7}\sqrt{147}+\dfrac{1}{10}\sqrt{28}-\dfrac{1}{3}\sqrt{2187}-\dfrac{1}{5}\sqrt{700}$

6. Efectúa las operaciones siguientes y simplifica si es conveniente

a) $2\sqrt{12}\sqrt{6}$

b) $3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{20}\cdot(-2)\sqrt{3}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\dfrac{2}{7}\sqrt{21}$

d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{21}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{42}\cdot\dfrac{3}{7}\sqrt{22}$

e) $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{2ab^4}\cdot\sqrt[3]{4a^7b^6}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{a^4b^3}$

f) $\dfrac{10\sqrt{32}}{2\sqrt{24}}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{2x^4}{25y^5}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x^5}{5y}}$

h) $\dfrac{18\sqrt{180}}{-12\sqrt{48}}$

i) $\dfrac{\sqrt{24}\sqrt{6}}{\sqrt{20}}$

j) $\dfrac{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{300}}{\sqrt[3]{72}\cdot\sqrt[3]{24}}$

www.yoquieroaprobar.es

7. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica si es conveniente:

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$ b) $\left(7\sqrt{3}+5\sqrt{5}\right)\cdot 2\sqrt{3}$

c) $\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{7}\right)$ d) $\sqrt{x}\left(5\sqrt{\frac{1}{25}y}-\frac{1}{2}\sqrt{xy}\right)$

8. Efectúa las operaciones siguientes reduciendo los radicales a índice común y simplifica si conviene

a) $\dfrac{\sqrt{x^3y}\cdot\sqrt[3]{8y}}{\sqrt[6]{50x^3y^5}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{24}}$

9. Expresa en forma de un solo radical

a) $\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3}}}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{8}}{2\sqrt[4]{4}}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2^3}}{2\sqrt[4]{2^2}}}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}}$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}}$ f) $\sqrt[3]{ab^2\sqrt[4]{\dfrac{1}{ab}}}$

10. Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{72}+3\sqrt{32}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

11. Racionaliza:

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x}}$ c) $\dfrac{6ab}{\sqrt[3]{4a^2b}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{9x}}$

12. Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$ e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ f) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

13. Racionaliza y efectúa:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

www.yoquieroaprobar.es