OPERACIONES CON RADICALES

Como consecuencia de las fórmulas fundamentales de radicales, se pueden realizar las siguientes operaciones. Se requiere que en los radicales sólo haya **productos o cocientes**. Si hubiera sumandos y no se pueden transformar en productos (sacando factor común), no podríamos hacer nada.

1. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Procedimiento: Hallamos el mcd *del índice y de todos los exponentes del radicando*. Dividimos cada uno de ellos y el índice entre el mcd.

Ejemplo: $\sqrt[12]{\frac{16a^8}{b^4}}$ Sólo hay productos y cocientes, luego podemos operar. 16 está elevado a 1, pero podemos ponerlo en forma de potencia: 2^4 (normalmente buscamos que la base sea un número primo). Luego:

$\sqrt[12]{\frac{16a^8}{b^4}}=\sqrt[12]{\frac{2^4a^8}{b^4}}=$ (mcd(12,4,8,4)=4 $\Rightarrow$ dividimos el índice y cada exponente entre 4) = $\sqrt[3]{\frac{2a^2}{b}}$

Explicación en base a las fórmulas fundamentales: $\frac{2^4a^8}{b^4}=\left(\frac{2a^2}{b}\right)^4$ por las FFs 5, 6 y 7. Por tanto,

$\sqrt[12]{\frac{2^4a^8}{b^4}}=\sqrt[12]{\left(\frac{2a^2}{b}\right)^4}=$(dividiendo 12 y 4 entre 4, por la FF17) $=\sqrt[3]{\frac{2a^2}{b}}$

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt[6]{16a^4}$; b) $\sqrt[15]{2a^5}$; c) $\sqrt[4]{3^2+a^2}$; d) $\sqrt[8]{\frac{16a^6}{b^2}}$

2. AMPLIFICAR RADICALES

Procedimiento: Inverso al anterior; se multiplican el índice y cada uno de los exponentes por el mismo número.

Ejemplo: $\sqrt{\frac{3x^3}{y}}=\sqrt[6]{\frac{3^3x^9}{y^3}}$ (hemos multiplicado por 3 índice y exponentes)

Explicación en base a las fórmulas fundamentales: $\sqrt{\frac{3x^3}{y}}$ = (FF17) $=\sqrt[2\cdot 3]{\left(\frac{3x^3}{y}\right)^3}$ = (FFs 5, 6 y 7) =

$\sqrt[6]{\frac{3^3x^9}{y^3}}$

Ejercicios propuestos:

a) Poner con índice 8: $\sqrt{\frac{3x^3}{y}}$

3. **PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES**

Procedimiento: Se precisa que todos los radicales implicados tengan el mismo índice. Normalmente, será el mcm de los índices iniciales. En la transformación al nuevo índice, se amplifican los radicales, según el procedimiento explicado antes.

Ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{2a^2}\sqrt{a}}{\sqrt[4]{2^3 a}}$ = (mcm(3,2,4)=12 $\Rightarrow$ amplificamos todos los radicales a índice 12)

$$=\frac{\sqrt[12]{2^4 a^8}\sqrt[12]{a^6}}{\sqrt[12]{2^9 a^3}} = \text{(FFs 18 y 19)} = \sqrt[12]{\frac{2^4 a^8 a^6}{2^9 a^3}} = \text{(FFs 3 y 4)} = \sqrt[12]{\frac{a^{11}}{2^5}}$$

Ejercicios propuestos:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}$; b) $\frac{\sqrt[6]{2^3 a^4}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{2a^3}}$

4. **EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL RADICAL**

Procedimiento: Sólo se pueden extraer factores o divisores cuyo exponente sea mayor o igual que el índice de la raíz. En el ejemplo que sigue, el 2 no se puede extraer, pero sí *a* (elevado a 9, que es mayor que 3) y *b* (elevado a 3, igual al índice). Para la extracción de un factor en esas condiciones:

a) Si el exponente es múltiplo del índice de la raíz, el factor sale de la raíz elevado al exponente que tenía dividido entre el índice de la raíz. En el ejemplo, el exponente de *b* es 3, múltiplo del índice de la raíz, también 3. Sale *b* elevado a 3 entre 3, o sea, 1, y se mantiene en el denominador.

b) En caso contrario, como le sucede al *a* en el ejemplo, se separa dicho factor en producto de la misma base (*a* en el ejemplo) elevada al múltiplo del índice de la raíz más próximo, sin sobrepasarlo, al exponente que tenía dicho factor (en el ejemplo, 9 es el múltiplo de 3 más próximo a 10 sin sobrepasarlo) multiplicado por la misma base elevada a lo que falte hasta el exponente que tenía (lo que falta desde 9 hasta 10 es 1). Por tanto, en el ejemplo separamos $a^{10}=a^9\cdot a$. Al factor que queda con exponente múltiplo del índice, se le aplica el proceso explicado en el apartado anterior.

Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{2a^{10}}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{2a^9 a}{b^3}} = \frac{a^3}{b}\sqrt[3]{2a}$ (se aplican las FFs 16, 18 y 19; también, puede usarse la 22)

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{16+4a^2}$; c) $\sqrt[4]{\frac{16a^{15}}{b^8}}$; d) $4\sqrt{12}-3\sqrt{48}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}$;

e) $\sqrt{8}-\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{32}$

5. **INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN EL RADICAL**

Procedimiento: Se multiplican los exponentes por el índice de la raíz.

Ejemplo: $2a^5\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3 a^{15} a} = \sqrt[3]{2^3 a^{16}}$

Ejercicios propuestos:

a) $2a^3 b\ \sqrt[3]{2}$

6. **RAÍZ DE UNA RAÍZ**

Procedimiento: Si las dos raíces, una conteniendo a la otra, están consecutivas, sin ningún número que las separe, se multiplican los índices, en virtud de la FF21.

Ejemplo: $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ = (Hay un factor a que separa los radicales: lo introducimos dentro de la raíz interior, la de índice 2) $=\sqrt[3]{\sqrt{a^2 a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}=\sqrt[6]{a^3}$ = (siempre hay que simplificar y racionalizar denominadores, que lo veremos más adelante)$=\sqrt{a}$

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$; b) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

7. **RACIONALIZAR DENOMINADORES**

Consiste en cambiar la expresión para que no aparezcan raíces en el denominador. El procedimiento es diferente según los casos:

Procedimiento caso 1: No hay sumas en el denominador. Multiplicamos numerador y denominador por una raíz del mismo índice que la del denominador y con factores elevados a exponentes tales que al sumar con los exponentes originales resulte un múltiplo del índice.

Ejemplo: $\frac{a}{\sqrt[4]{2a^3}}$ = (2^1 debemos multiplicarlo por 2^3 para que de un exponente múltiplo del indice de la raíz: 2^4. a^3 precisa ser multiplicado por a^1) $=\frac{a}{\sqrt[4]{2a^3}}\frac{\sqrt[4]{2^3 a}}{\sqrt[4]{2^3 a}}=$

(FF18) $=\frac{a\sqrt[4]{2^3 a}}{\sqrt[4]{2a^3 2^3 a}}=\frac{a\sqrt[4]{2^3 a}}{\sqrt[4]{2^4 a^4}}=\frac{a\sqrt[4]{2^3 a}}{2a}=\frac{\sqrt[4]{2^3 a}}{2}$

Ejercicios propuestos:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt[3]{3x}}$; c) $\frac{2x}{3\sqrt[5]{2x^3}}$

Procedimiento caso 2: Hay una suma o diferencia en el denominador y las raíces que intervienen en el denominador son raíces cuadradas. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador (si el denominador es una suma, por la diferencia y si es una diferencia, por la suma).

Ejemplo: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ = (el conjugado de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ es $\sqrt{2}-\sqrt{5}$) $=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=$

(FF14) $=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$ = (FFs 12 y 16) $=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{2}\sqrt{5}}{2-5}$ = (FF18)

$=\frac{2+5-2\sqrt{10}}{-3}=-\frac{7-2\sqrt{10}}{3}=\frac{-7+2\sqrt{10}}{3}=\frac{2\sqrt{10}-7}{3}$

Ejercicios propuestos:

d) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

8. **POTENCIA FRACCIONARIA**

Procedimiento: Aplicar la FF22 a cada factor o divisor del radical.

Ejemplos: $5^{-1/2}=\frac{1}{5^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; Poner con exp. fracc: $\sqrt[3]{\frac{2a^2}{b}}=\left(\frac{2a^2}{b}\right)^{1/3}=\frac{2^{1/3}a^{2/3}}{b^{1/3}}$

Ejercicios propuestos:

a) Poner sin exponente fraccionario ni negativo: $2\left(3a^2b^{1/2}\right)^{1/3}$

b) Poner con exponente fraccionario: $\sqrt[3]{2^2a^2}$

9. SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES CON RADICALES

Hay que:

- Simplificar las raíces, conforme a lo dicho en el apartado 1
- Extraer factores de las raíces
- Que las raíces no contengan denominadores y que los denominadores estén racionalizados.

Soluciones a los ejercicios:

1a) $\sqrt[6]{16a^4} = \sqrt[6]{2^4a^4} = \sqrt[3]{2^2a^2}$ (dividiendo índice y exponentes entre 2)

1b) $\sqrt[15]{2a^5}$; mcd (15,1,5)=1 $\Rightarrow$ no se puede simplificar

1c) $\sqrt[4]{3^2+a^2}$; no podemos transformar el radicando en productos $\Rightarrow$ no se puede simplificar.

1d) $\sqrt[8]{\dfrac{16a^6}{b^2}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4a^6}{b^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^2a^3}{b}}$ (dividiendo índice y exponentes entre 2)

2a) $\sqrt{\dfrac{3x^3}{y}} = \sqrt[2\cdot 4]{\dfrac{3^{1\cdot 4}x^{3\cdot 4}}{y^{1\cdot 4}}} = \sqrt[8]{\dfrac{3^4x^{12}}{y^4}}$

3a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^4}{a^3}} = \sqrt[6]{a}$

3b) $\dfrac{\sqrt[6]{2^3a^4}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{2a^3}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^6a^8}}{\sqrt[12]{a^6}\sqrt[12]{2^3a^9}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^6a^8}{a^62^3a^9}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^3}{a^7}}$

4a) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^23} = 3\sqrt{3}$

4b) $\sqrt{16+4a^2}$ = (hay que transformar en productos, para poder hacer algo; sacamos factor común) = $\sqrt{4(4+a^2)} = \sqrt{2^2(4+a^2)} = 2\sqrt{4+a^2}$

4c) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^{15}}{b^8}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^4a^{12}a^3}{b^8}} = \dfrac{2a^3}{b^2}\sqrt[4]{a^3}$

4d) $4\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} = 4\sqrt{2^23} - 3\sqrt{2^43} + 2\sqrt{3^23} + 3\sqrt{5^23} =$
$= 4\cdot 2\sqrt{3} - 3\cdot 2^2\sqrt{3} + 2\cdot 3\sqrt{3} + 3\cdot 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = (8-12+6+15)\sqrt{3} =$
$= 17\sqrt{3}$

4e) $\sqrt{8} - \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{32} = \sqrt{2^22} - \sqrt{3^23} + \sqrt{2^23} - \sqrt{2^42} =$
$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2^2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

5a) $2a^3b\ \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^32a^9b^3} = \sqrt[3]{2^4a^9b^3}$

6a) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}} = \sqrt{5^2\sqrt{3^4\sqrt{2^8}}} = \sqrt{5^2\sqrt{3^4\sqrt{2^8}}} = \sqrt{5^2\sqrt{\sqrt{3^82^8}}} = \sqrt{5^2\sqrt[4]{3^82^8}} = \sqrt{\sqrt[4]{5^83^82^8}}$
$= \sqrt[8]{5^83^82^8}$ =(extrayendo factores)$= 5\cdot 3\cdot 2 = 30$. Hay otras formas de hacerlo.

6b) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$ =(con sumandos no se pueden aplicar las fórmulas fundamentales, que es lo que se basan todas estas operaciones) $=\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+4}}}=\sqrt{1+\sqrt{6+3}}=$
$=\sqrt{1+3}$ =2

7a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7b) $\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{3x}}=\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{3x}}\dfrac{\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^2x^2}}=\dfrac{3x^2\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}}=\dfrac{3x^2\sqrt[3]{3^2x^2}}{3x}=x\sqrt[3]{3^2x^2}$

7c) $\dfrac{2x}{3\sqrt[5]{2x^3}}=\dfrac{2x}{3\sqrt[5]{2x^3}}\dfrac{\sqrt[5]{2^4x^5}}{\sqrt[5]{2^4x^5}}=\dfrac{2x\sqrt[5]{2^4x^5}}{3\sqrt[5]{2^5x^5}}=\dfrac{2x\sqrt[5]{2^4x^5}}{3{\cdot}2x}=\dfrac{\sqrt[5]{2^4x^5}}{3}$

7d) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\dfrac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{3^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2{\cdot}3{\cdot}\sqrt{5}}{9-5}=\dfrac{9+5-6\sqrt{5}}{4}=\dfrac{14-6\sqrt{5}}{4}=$
$=\dfrac{2\left(7-3\sqrt{5}\right)}{4}=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ que no se puede simplificar más (recordar las reglas básicas 2 y 3).

8a) $2\left(3a^2b^{1/2}\right)^{1/3}=2\sqrt[3]{3a^2\sqrt{b}}$

8b) $\sqrt[3]{2^2a^2}=2^{2/3}a^{2/3}$