1.- CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **Números reales (R)**
  - **Racionales (Q)**
    - **Números enteros (Z)**
      - Números naturales(N) : Ejemplo : 7
      - El número 0
      - **Números enteros negativos** : Ejemplo : -4
    - **Decimales exactos**. Ejemplo : 2,75
    - **Decimales periódicos**
      - **Periódicos puros**. Ejemplo : $5,333... = 5,\overline{3}$
      - **Periódicos mixtos**. Ejemplo : $7,4666... = 7,4\overline{6}$
  - **Irracionales (decimales no periódicos)**. Ejemplo : 3,1010010001....

Los números irracionales no se pueden expresar en forma de fracción porque tienen infinitas cifras no periódicas.

Ejemplos de números irracionales:

* El número π = 3,141592654...... . Se obtuvo al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro.

Las primeras cifras de π se pueden obtener con la calculadora así: **SHIFT** **EXP** **=**

El resultado es 3,141592654....

* El número $\sqrt{2}$ = 1,414213562....... . Se obtuvo al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1.

* El número de oro o número áureo: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803398...... .

Se obtuvo al dividir la diagonal del pentágono regular entre su lado

Las raíces cuadradas no exactas de números naturales son números irracionales.

Por ejemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$,etc son números irracionales

También son números irracionales: 3,1010010001.... ; 0,3737737773.....; ... pues tienen infinitas cifras no periódicas.

ACTIVIDADES

1 Clasifica los siguientes números reales en naturales, enteros, decimales exactos, periódicos puros, periódicos mixtos e irracionales:

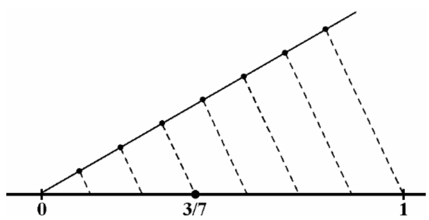
A = 5,222... B = 1,23456.... C = $\dfrac{-36}{3}$ D = $\sqrt{64}$

E = – 2,34545 .... F = $\sqrt{8}$ G = – 3,650124 H = 1 I = 2π

2.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS

Representación de fracciones en la recta

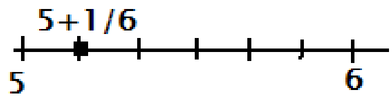
Para representar la fracción propia $\frac{3}{7}$ en la recta dividimos el segmento [0,1] en 7 partes iguales y tomamos 3 partes a partir de 0



También se pueden representar fracciones impropias (numerador > denominador) pasándolas a forma mixta

Ejemplo:

$$\frac{31}{6} \rightarrow \begin{array}{r|l} 31 & 6 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \rightarrow \frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6} \rightarrow$$ 5 unidades y $\frac{1}{6}$ del segmento [5,6]



Se puede pasar a forma mixta con la calculadora científica usando la tecla $\boxed{\text{a b/c}}$
Por ejemplo, para pasar a forma mixta la fracción 31/6 el proceso es 31 $\boxed{\text{a b/c}}$ 6 =. Da 5 + 1/6

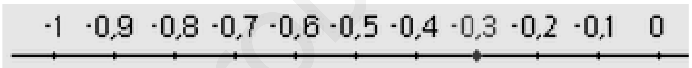
Representación de decimales en la recta

Para representar números decimales se divide el segmento correspondiente en 10 partes iguales

Ejemplos:

Números decimales en el segmento [0 , 1]

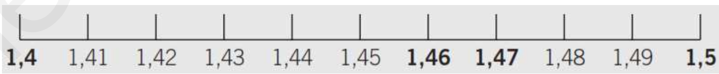
Números decimales en el segmento [–1 , 0]



Números decimales en el segmento [2 , 3]

Números decimales en el segmento [–4 , –3]

Números decimales en el segmento [1,4 ; 1,5]



Observaciones:

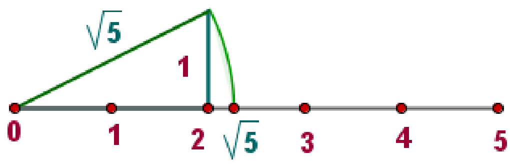
Se pueden representar fracciones pasándolas a decimal y luego representando los decimales, redondeándolos. Esto se suele hacer cuando el decimal tiene más de dos cifras decimales o cuando queramos representar un número irracional

Representación de números irracionales en la recta

Algunas raíces cuadradas se pueden representar de forma exacta en la recta numérica siempre que el radicando se pueda expresar como suma de dos cuadrados.

Ejemplo:

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^1} = hipotenusa\ del\ triángulo\ rectángulo\ de\ catetos\ 2\ y\ 1$$



ACTIVIDAD

$\boxed{2}$ Representa en la recta los siguientes números, cada uno en una recta diferente: **a*)** $\sqrt{29}$ **b*)** $\sqrt{8}$ **c*)** $\frac{-19}{7}$ d) $\frac{-5}{9}$ e) 15,4 f) –2,84 g) $-\sqrt{70}$ redondeando a las décimas h) $\frac{3}{7}$ i) $\frac{18}{5}$ j) $\frac{4}{3}$ k) $\frac{-12}{5}$ l) $\sqrt{13}$ m) $\sqrt{2}$ n) $\sqrt{10}$ ñ) $\sqrt{18}$

3.- INTERVALOS

Un intervalo es un segmento o una semirrecta de la recta real. Hay 8 tipos de intervalos:

Intervalo abierto	Intervalo cerrado
(a, b)  $(-1, 3) \Rightarrow -1 < x < 3$	$[a, b]$  $[-1, 3] \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$
Intervalo abierto por la izquierda $(a, b]$  $(-1, 3] \Rightarrow -1 < x \leq 3$	**Intervalo abierto por la derecha** $[a, b)$  $[-1, 3) \Rightarrow -1 \leq x < 3$

Semirrecta abierta positiva	Semirrecta cerrada positiva
(a, ∞)  $(2, \infty) \Rightarrow x > 2$	$[a, \infty)$  $[2, \infty) \Rightarrow x \geq 2$
Semirrecta abierta negativa $(-\infty, a)$  $(-\infty, 2) \Rightarrow x < 2$	**Semirrecta cerrada negativa** $(-\infty, a]$  $(-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2$

ACTIVIDAD

3 Representa gráficamente los siguientes intervalos y exprésalos con las distintas notaciones:

a) $-5 \leq x < 0$ b) $x \leq 3$ c) $[-3 , 4)$ d) $(-2 , \infty)$ e) $(-5 , -1]$ f) $x \leq -1$ g) $-1 < x < 2$

h) $(-\infty , 0]$ i) $x \geq -1$ j) $(-\infty , -10)$ k) $x > 0$ l) $x \leq -1/2$

4.- RADICALES

Concepto de radical

Si tienes que resolver la ecuación $x^5 = 40$, para calcular la "x" hay que hallar una raíz: $x = \sqrt[5]{40}$

$\sqrt[5]{40}$ se llama radical (5 es el índice y 40 es el radicando).

En general, $\sqrt[n]{a}$ con $n \geq 2$ se llama radical o raíz de índice "n" y radicando "a".

El índice, n, es un número natural mayor que 1.

Si el índice es 2, se llama raíz cuadrada y se expresa de forma simplificada así: $\sqrt{a}$

Número de soluciones de un radical

Dependiendo del índice (si es par o impar) y del radicando (si es positivo o negativo), un radical puede tener 2, 1 o ninguna solución:

	Índice par	Índice impar
Radicando positivo	2 soluciones opuestas. Por ejemplo, $\sqrt[4]{81} = \pm 3$	1 solución positiva. Por ejemplo, $\sqrt[3]{125} = 5$
Radicando negativo	Ninguna solución. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$	1 solución negativa. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$

Cálculo de radicales con la calculadora

Cualquier radical se puede hallar con la calculadora científica.

Ejemplo: $\sqrt[5]{40}$ se calcula así: 5 SHIFT $\boxed{\wedge}$ 40 $\boxed{=}$ El resultado es 2.091279105….

Radical en forma de potencia

Cualquier radical se puede expresar en forma de potencia usando la siguiente fórmula: $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$

Ejemplos: $\sqrt[5]{3^{-2}} = 3^{-2/5}$ $\quad \sqrt{x^7} = x^{7/2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$

Potencia de exponente fraccionario en forma de radical

Cualquier potencia cuyo exponente sea una fracción de denominador un número natural mayor que 1 se puede expresar en forma de radical usando la siguiente fórmula: $\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$

Ejemplos: $5^{-2/3} = \sqrt[3]{5^{-2}}$ $\quad m^{3/2} = \sqrt{m^3}$

Simplificación de radicales

Si dividimos el índice y el exponente por un mismo divisor común, el radical queda simplificado

Ejemplo: $\sqrt[12]{5^8} = \sqrt[12:4]{5^{8:4}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

Si al pasar un radical a potencia resulta una potencia de exponente entero entonces el radical queda simplificado. Esto ocurre siempre que el exponente sea divisible entre el índice

Ejemplos: $\sqrt[3]{2^{18}} = 2^{18/3} = 2^6 = 64$ $\quad \sqrt[5]{y^{40}} = y^{40/5} = y^8$

Si el índice es igual al exponente se puede simplificar así: $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a^1 = a \Rightarrow \boxed{\sqrt[\cancel{n}]{a^{\cancel{n}}} = a}$

Ejemplos: $\sqrt[\cancel{6}]{2^{\cancel{6}}} = 2$ $\quad \sqrt[\cancel{\,}]{85^{\cancel{2}}} = 85$

Reducción de radicales a común índice

Para reducir radicales común índice se toma como índice común el mcm de los índices.

El común índice se divide entre cada índice y el resultado se multiplica por el exponente del radicando. *Ejemplo*: $\sqrt[6]{3}$ y $\sqrt[8]{5^7}$; mcm(6,8) = 24 $\rightarrow$ $\sqrt[24]{3^4}$ y $\sqrt[24]{5^{21}}$

ACTIVIDADES

4 Expresa las siguientes potencias en forma de radical: a) $2^{5/3}$ b) $x^{1/2}$ c) $3^{-2/5}$

5 Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[5]{3^{-2}}$ b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt{\frac{1}{x^5}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^4}}$

6 Simplifica los siguientes radicales: a) $\sqrt[4]{2^6}$ b) $\sqrt[6]{x^{-9}}$ c) $\sqrt{5^2}$ d) $\sqrt[3]{y^6}$

7 Reduce a común índice los siguientes radicales: $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[8]{x}$, $\sqrt{x}$ y $\sqrt[3]{x^{-2}}$

5.- OPERACIONES CON RADICALES

Suma y resta de radicales

Para poder sumar o restar términos con raíces, todos los términos deben llevar la misma raíz.

Para realizar las sumas y restas se saca factor común el radical

Por ejemplo, $5\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} = (5-1+2)\sqrt[3]{7} = 6\sqrt[3]{7}$

La regla es: $\boxed{M\sqrt[n]{a} \pm N\sqrt[n]{a} = (M \pm N)\sqrt[n]{a}}$

Producto de radicales

Si tienen el mismo índice, se deja el mismo índice y se multiplican los radicandos.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2.5} = \sqrt[3]{10}$ La regla es: $\boxed{\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$

Cuando no tengan el mismo índice, se reducen a común índice y se aplica la regla anterior

División de radicales

Si tienen el mismo índice, se deja el mismo índice y se dividen los radicandos

Por ejemplo, $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ La regla es: $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Cuando no tengan el mismo índice, se reducen a común índice y se aplica la regla anterior

Potencia de un radical

Para hallar la potencia de un radical se deja el mismo índice y el radicando se eleva al exponente de la potencia.

Por ejemplo, $\left(\sqrt[12]{3}\right)^{20} = \sqrt[12]{3^{20}} \xrightarrow{\text{Simplificando}} \sqrt[12:4]{3^{20:4}} = \sqrt[3]{3^5}$ La regla es: $\boxed{\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}}$

Raíz de un radical

Para calcular la raíz de un radical, se multiplican los índices y se deja el mismo radicando.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3.2]{5} = \sqrt[6]{5}$ La regla es: $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}}$

Raíz de un producto

Para calcular la raíz de un producto, se descompone como la raíz de cada factor.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{2.5} = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5}$ La regla es: $\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}}$

Raíz de un cociente

Para calcular la raíz de un cociente, se calcula la raíz de cada término.

Por ejemplo, $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ La regla es: $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

ACTIVIDADES

8 Efectúa las siguientes sumas y restas: **a*)** $9\sqrt[3]{2} - \sqrt{2} - 4\sqrt[3]{2} + 7\sqrt{2}$ b) $3\sqrt[3]{x} - \sqrt{y} - 2\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{y}$

9 Realiza las siguientes operaciones y simplifica: **a*)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\left(\sqrt[6]{ab}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[4]{b}}}$ **b*)** $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{5} + 6\sqrt{3}\right)$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^7}\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[8]{x}\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^7}\sqrt{x}}$ e) $\dfrac{\sqrt{xy^2}}{\sqrt[3]{x^5}\sqrt[6]{y}}$ f) $\left(\sqrt[20]{x^4}\right)^5$ g) $\left(\sqrt[12]{\dfrac{1}{x^3}}\right)^{20}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^{18}}}}$

i) $\left(\sqrt{3}-5\right)\left(2\sqrt{3}+5\right)$ j) $\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3} - 2\right)$

Introducción de factores en el radical

Para introducir un factor en un radical se eleva el factor al índice de la raíz: $\boxed{A\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n B}}$

Ejemplo: $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 5} = \sqrt[3]{40}$

Extracción de factores del radical

Para extraer factores de un radical se expresan como potencia de exponente el índice de la raíz y se usa la fórmula: $\boxed{\sqrt[n]{A^n B} = A\sqrt[n]{B}}$ *Ejemplo*: $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 5} = 2\sqrt[3]{5}$

ACTIVIDADES

10 Introduce en la raíz: **a*)** $\dfrac{2x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x}}$ **b*)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^5\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ c) $x\sqrt{x}$ d) $\dfrac{a}{2}\sqrt[3]{a}$ e) $yx^3\sqrt[4]{3x^2y}$

11 Extrae factores de la raíz: **a*)** $\dfrac{3x}{5}\sqrt[3]{\dfrac{125y^7}{x^4}}$ **b*)** $\dfrac{x^2}{y}\sqrt[3]{\dfrac{2y^5}{x^3}}$ c) $\sqrt{54x^2}$ d) $2\sqrt[3]{x^4}$ e) $3x\sqrt{4x^2y^3}$ f) $\dfrac{x}{3}\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^4}}$

12 Realiza las siguientes sumas y restas: **a*)** $5\sqrt{75b^2} + \sqrt{27} - a\sqrt{3}$ **b*)** $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{54} - \dfrac{1}{6}\sqrt[3]{16}$

c) $2\sqrt{x} + \sqrt{x^3} - \sqrt{9x}$ d) $4\sqrt{2x^2} + \sqrt{8} - x\sqrt{2}$ e) $5\sqrt[3]{8x} - 3\sqrt[3]{27x}$ f) $6\sqrt[3]{27a^2} - 2\sqrt[3]{a^5}$

Racionalización de fracciones radicales

Racionalizar una fracción radical con alguna raíz en el denominador es transformarla en otra fracción equivalente pero que NO tenga ninguna raíz en el denominador.

Caso 1: En el denominador sólo hay un término en el que aparece alguna raíz

Ejemplos:

$$\frac{5a}{3\sqrt{b}} \xrightarrow{\text{Se multiplica por } \sqrt{b}} \frac{5a\,.\,\sqrt{b}}{3\sqrt{b}\,.\,\sqrt{b}} = \frac{5a\sqrt{b}}{3\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{5a\sqrt{b}}{3b}$$

$$\frac{-1}{\sqrt[5]{b^3}} \xrightarrow{\text{Se multiplica por } \sqrt[5]{b^2}} \frac{-1\,.\,\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{b^3}\,.\,\sqrt[5]{b^2}} = \frac{-\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{-\sqrt[5]{b^2}}{b}$$

Caso 2: En el denominador hay suma/resta de dos términos en los que aparece alguna raíz cuadrada

Ejemplos:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (x+2\sqrt{x})} \frac{2\sqrt{x}\,.\,(x+2\sqrt{x})}{(x-2\sqrt{x}).(x+2\sqrt{x})} = \frac{2x\sqrt{x}+4(\sqrt{x})^2}{x^2-(2\sqrt{x})^2} = \frac{2x\sqrt{x}+4x}{x^2-4x}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (3\sqrt{5}-5\sqrt{3})} \frac{\sqrt{15}\,.\,(3\sqrt{5}-5\sqrt{3})}{(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}).(3\sqrt{5}-5\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{75}-5\sqrt{45}}{(3\sqrt{5})^2-(5\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}-15\sqrt{5}}{45-75} = \frac{15(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-30}$$

$$\text{Simplificando se obtiene: } \frac{-15(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{30} = \frac{-(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

ACTIVIDADES

13 Efectúa y simplifica: **a*)** $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{3-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}\right) : \sqrt{18}$ b) $\frac{3x}{2\sqrt{x}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

e) $\frac{4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ f) $\frac{3\sqrt{x}+1}{2+\sqrt{x}}$ g) $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-\sqrt{18}}$ h) $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) : \sqrt{8}$

6.- LOGARITMOS

Considera la ecuación $2^x = 6$.

La solución de esta ecuación, el número al que hay que elevar el "2" para obtener "6", se llama el logaritmo en base 2 de 6 y se escribe así: $\log_2 6$

En general, si a > 0 , a ≠ 1 , la solución de la ecuación $a^x = N$ se llama logaritmo en base a de N : $\log_a N$

Usando la definición podemos ver que se cumple: $\boxed{\log_a N = x \iff a^x = N}$

Si la base es 10, entonces $\log_{10} N$ se escribe simplemente como log N y se llama logaritmo decimal de N.

Si la base es el número "e", entonces $\log_e N$ se escribe simplemente como ln N ó L N y se llama logaritmo neperiano o logaritmo natural de N

La calculadora científica nos permite calcular tanto logaritmos decimales como neperianos

Ejemplos:

Para calcular log 3 pulsamos $\boxed{\text{log}}$ 3 $\boxed{=}$. El resultado es 0,477121254...

Para calcular ln 20 pulsamos $\boxed{\text{ln}}$ 20 $\boxed{=}$. El resultado es 2,995732274...

Todos los logaritmos que no den un resultado exacto (número entero o decimal exacto o periódico) son números irracionales.

ACTIVIDADES

14* Usando la definición, halla los siguientes logaritmos: a) $\log_2 512$ b) $\log_{1/3}(9)$ c) $\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{27}}$

d) $\log_8 \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{2}}}$ e) $\ln \frac{e^{-2}}{\sqrt{\frac{1}{e^3}}}$ f) $\log_2 64+\log_2 \frac{1}{4}-\log_3 9-\log_2 \sqrt{2}$ g) $\log_a \frac{\sqrt{a^3}\cdot a^2}{\sqrt[3]{a}}$ h) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64}$

15 Calcula los siguientes logaritmos usando la definición y sin el uso de la calculadora:

a) $\log_3 81$ b) $\log_{1/5}(125)$ c) $\log_2 \sqrt{8}$ d) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ e) $\log_{1/2} \frac{1}{32}$ f) $\log 100$

g) $\log(0{,}0001)$ h) $\log 10$ i) $\log_4 1$ j) $\log_6 6$ k) $\log_3 3^{15}$ l) $\log_2 0$

m) $\log_4(-16)$ n) $\ln \sqrt[5]{e^{-2}}$ ñ) $\log 10\,000$ o) $\log(0{,}1)$ p) $\log_a \frac{a^3}{\sqrt{a}}$ q) $\log_x\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

Propiedades de los logaritmos

<table>
<tr>
<td>1) $\log_a a = 1$
Ejemplo:
$\log_5 5 = 1$</td>
<td>2) $\log_a 1 = 0$
Ejemplo:
$\log_3 1 = 0$</td>
<td>3) $\nexists \log_a N$, si $N \le 0$
Ejemplos:
$\nexists \log_2(-4)$ $\nexists \log_6 0$</td>
<td colspan="2">4) $\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$
Ejemplo:
$\log_7(3.12) = \log_7(3) + \log_7(12)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">5) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$
Ejemplo:
$\log\left(\frac{5}{2}\right) = \log(5) - \log(2)$</td>
<td>6) $\log_a(M^N) = N\log_a(M)$
Ejemplo:
$\ln(5^3) = 3 . \ln(5)$</td>
<td>7) $\log_a a^N = N$
Ejemplo:
$\log_4 4^9 = 9$</td>
<td>8) $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{\log_a(M)}{n}$
Ejemplo:
$\log_2 \sqrt[3]{10} = \frac{\log_2(10)}{3}$</td>
</tr>
</table>

Fórmula de cambio de base

$$\log_a(M) = \frac{\log_b(M)}{\log_b(a)}$$

En particular, si b = 10: $\boxed{\log_a(M) = \frac{\log(M)}{\log(a)}}$, si b = e (número e): $\boxed{\log_a(M) = \frac{\ln(M)}{\ln(a)}}$

Cualquiera de estas dos últimas fórmulas nos permite hallar el logaritmo en base a de un número usando la calculadora científica.

Por ejemplo, aplicando la primera fórmula: $\log_2(7) = \frac{\log(7)}{\log(2)}$ = 2,807354922...

Si aplicamos la segunda fórmula obtenemos el mismo resultado: $\log_2(7) = \frac{\ln(7)}{\ln(2)}$ = 2,807354922...

ACTIVIDADES

16* Sabiendo que $\log_5 A = 2$ y $\log_5 B = -3$, calcula: a) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$ b) $\log_5 \frac{25\cdot B^3}{\sqrt[3]{A^5}}$ c) $\log_5 \frac{\sqrt[3]{5B^2}}{A^4B^{-4}}$

17* Toma logaritmos y desarrolla: a) $D = x\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2}{z}}$ b) $A = \frac{a^5\cdot\sqrt{b}}{c^4}$

18* La acidez del agua se mide con una unidad conocida como pH. Mientras mayor es el pH, menor es la acidez. Mientras menor es el pH, mayor es la acidez.
Cuando 0 < PH < 7 la solución es ácida; cuando pH > 7 la solución es básica (o alcalina); y cuando pH = 7 la solución es neutra.
El pH ideal para una piscina es 7.6. Si sube a 7.8, se le debe añadir un químico para bajar el pH.
Si baja tanto como a 6.8, entonces, se requiere echarle un químico para subirlo.

La siguiente fórmula calcula el pH de una solución (condición de ácido o base)

$pH = -\log[H^+]$; donde:

pH: Escala de medida que diferencia el grado de acidez o de alcalinidad de una solución.
$[H^+]$: concentración de iones de hidrógeno en moles por litro.

(a) Despeja $[H^+]$ de la fórmula anterior.
(b) Si el pH del agua es 7.0 (neutral), entonces, ¿cuál es la concentración de iones de hidrógeno en el agua?
(c) ¿Cuál es el pH de una muestra de lluvia ácida que tiene una concentración de iones de hidrógeno de 3.10^{-5}?

19 Si log x = 0,75, calcula: a) $\log\left(\frac{x^5}{0,1}\right)$ b) $\log \sqrt[4]{x}$ c) $\log\left(\frac{100}{\sqrt{x}}\right)$

20 Usando que log 2 = 0,301030 y log 3 = 0,477121 y las propiedades de los logaritmos, calcula
a) log 6 b) log 8 c) log 12

21 Sabiendo que $\lg_a x = 5$ y $\lg_a y = 2$ calcular $b = \lg_a\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{y^3}\right)$

22 Toma logaritmos y desarrolla: a) $A = x^2y^3z^4$ b) $B = \frac{x^2y^3}{z^4}$ c) $C = \sqrt[3]{\frac{x^2y^3}{z^4}}$

23 Usa tu calculadora y, si es necesario, la fórmula de cambio de base para hallar los siguientes logaritmos, expresando el resultado redondeado a las milésimas:
a) log 300 b) log 0,25 c) $\log_2 12$ d) $\log_{1/4}(500)$

24 La siguiente fórmula los decibelios de produce un determinado ruido $D = 10\log\left(I.10^{12}\right)$
donde: D: decibelios, I: intensidad del sonido.
a) El tráfico en una determinada zona de una ciudad, provoca una intensidad de sonido de $3,5.\ 10^{-5}$. Calcular la cantidad de decibelios que ocasiona este ruido.
b) Calcular la intensidad de un sonido que tiene un nivel de 72 decibelios.

25 La siguiente fórmula calcula la cantidad de energía liberada por un seísmo en la escala de Richter $\log E = 1,5R + 11,8$; donde: E: energía liberada, medida en ergios; R: magnitud del seísmo, en grados de la escala de Richter.
a) El terremoto ocurrido el 27 de Abril de 2007, en el fiordo de Aysén, fue de 6,3 grados Richter. ¿Cuánta energía se liberó por este sismo?
b) Calcular la intensidad en la escala de Richter del terremoto de Chillán, ocurrido en 1939, sabiendo que liberó una energía de $7,079.10^{16}$.

7.- PORCENTAJES

Porcentaje de una cantidad

Puesto que un porcentaje es una fracción, para hallar el porcentaje de una cantidad podemos usar la fracción como operador.

Ejemplo:

$$2{,}5\% \text{ de } 300\ € = \frac{2{,}5}{100} \text{ de } 300 = 2{,}5 : 100 \,.\, 300 = 0{,}025 \,.\, 300 = 7{,}5\ €$$

ACTIVIDADES

26* Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120000 bacterias y adquiere una enfermedad que produce la muerte del 16% de la población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14%. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?

27 En agosto el precio del m^2 de solar era, en una determinada ciudad, de 500 €; en septiembre subió un 2% y en octubre bajó un 3% con respecto al precio que tenía en Septiembre. Halla el precio del m^2 en octubre.

Porcentaje como proporción

Usando proporciones (reglas de tres directas) se pueden resolver muchos problemas de porcentajes:

Ejemplo:

El 30% de los peces que tenía Juan murieron por una enfermedad. Si murieron 6 peces, ¿cuántos peces tenía Juan?

100% ________ x

30% ________ 6 peces

$$x = \frac{6 \,.\, 100}{30} = 20 \text{ peces}$$

ACTIVIDADES

28* En un Instituto hay un total de 1 500 alumnos, entre chicos y chicas.
Si este año hay un 20% menos de alumnos que el año pasado, ¿cuántos alumnos había el año pasado?

29* En un instituto, el 40% de los alumnos de 3º ESO van a Refuerzo de Lengua, el 80% de los restantes a Refuerzo de Matemáticas y los que quedan, 42 alumnos, van a Francés.
Averigua cuántos alumnos hay en 3º ESO y cuántos hay en cada optativa.

30 En un Instituto de 625 alumnos, hay 240 alumnos que usan gafas. Halla el % de alumnos sin gafas

31 A un trabajador le descuentan el 15% de su sueldo entre impuestos y seguridad social. La cantidad que percibe después de los descuentos es 920 €. ¿Cuál era su sueldo inicial?

32 Una persona se dispuso perder kilos siguiendo una dieta que empezó en Junio. Ahora, en Septiembre, pesa 87,4 kg. ¿Cuánto pesaba en Junio si se sabe que ha perdido un 8% de su peso?

8.- INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Interés simple

Cuando metemos dinero en el Banco, se generan unos intereses que se pueden calcular con la fórmula $\boxed{I = \frac{Crt}{100}}$, donde C es el capital (dinero que metemos), r es el rédito (% al que colocamos el dinero) y t es el tiempo en años que lo tenemos

ACTIVIDADES

33* ¿Cuántos meses debe estar colocado en un Banco un capital a un rédito del 8% a interés simple para que se triplique?

34* ¿A qué tanto por ciento se han depositado 10800 € en un banco a interés simple, si en 2 meses produjeron unos intereses de 36 €?

35 Calcular el capital que debe imponerse 3 años al 5% para que los intereses sean de 60000 €

36 ¿Cuánto tiempo hay que tener en un Banco 8 000 € al 2,75% de interés simple para que se conviertan en 9 320 €?

Interés compuesto anual

Supongamos que colocamos un capital en un Banco de forma que los intereses que se producen cada año se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el siguiente año.

En este caso, el capital final se puede calcular usando la fórmula $\boxed{C_f = C_0 (1 + \frac{r}{100})^t}$, siendo C_0 el capital inicial, r el rédito y t el tiempo en años

ACTIVIDADES

37* Se invierten 4 500 € al 2,15% de interés compuesto anual.
¿Cuánto tiempo debe pasar para tener 5 000 €?

38* ¿Cuánto tiempo debería pasar para que el dinero que tenemos en el Banco, a un 3,5% de interés compuesto anual, se triplique?

39 Se invierten 1 200 € al 2,5% de interés compuesto anual.
¿Cuánto tiempo debe pasar para tener 3 000 €?

40 ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el dinero que tenemos en el Banco, a un 2,25% de interés compuesto anual, se duplique?