PROBLEMAS CON ECUACIONES E INECUACIONES

1. Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m^2. Halla las dimensiones del polígono.

Sean x = lado menor del polígono $\rightarrow$ x + 2 = lado mayor

y = área del polígono

$$\left.\begin{array}{l} x(x+2)=y \\ (x+2)(x+4)=y+40 \end{array}\right\} \rightarrow (x+2)(x+4)=x(x+2)+40 \rightarrow x^2+6x+8=x^2+2x+40$$

$4x = 32 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = 8 \cdot 10 = 80$

Los lados del polígono miden 8 y 10 m, respectivamente

2. Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

Sean x = la cifra de las decenas

y = cifra de la unidades

Número: 10x + y

Invirtiendo las cifras, el número es: 10y + x

$$\left.\begin{array}{l} x+y=14 \\ 10y+x+18=10x+y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=14 \\ -9x+9y=-18 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x+y=14 \\ -x+y=-2 \end{array}\right\} \\ \hline 2y=12 \rightarrow y=6 \rightarrow x=8 \end{array}$$

El número es 68

3. El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?

Sean x = número de amigos

y = dinero que paga cada uno

$$\left.\begin{array}{l} xy=80 \\ (x+3)(y-6)=80 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} xy=80 \\ \cancel{xy}+3y-6x-18=\cancel{80} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} xy=80 \\ y-2x=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} xy=80 \\ y=2x+6 \end{array}\right\}$$

$(2x + 6)x = 80 \rightarrow 2x^2 + 6x - 80 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \rightarrow (x + 8)(x - 5) = 0 \rightarrow x = 5, x = -8$

Solución válida: $x = 5 \rightarrow y = 10 + 6 = 16$

Van de excursión 5 amigos.

4. Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos de la tierra, se da cuenta que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?

Sean x, y las dimensiones del terreno

$$\left.\begin{matrix} x+y=170 \\ x^2+y^2=130^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} y=170-x \\ x^2+y^2=130^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow x^2+(170-x)^2=130^2$$

$$x^2+28900-340x+x^2=16900 \rightarrow 2x^2-340x+12000=0 \rightarrow x^2-170x+6000=0$$

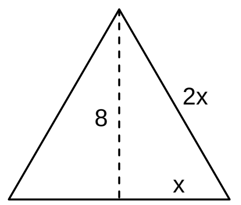
$$x=\frac{170\pm 70}{2}=\begin{cases} x=120 \rightarrow y=50 \\ x=50 \rightarrow y=120 \end{cases}$$

Las dimensiones del terreno son 120 x 50

5. La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.

El hexágono regular se divide en 6 triángulos equiláteros, donde la apotema del hexágono es una de las alturas del triángulo.

Sea 2x = la medida del lado.

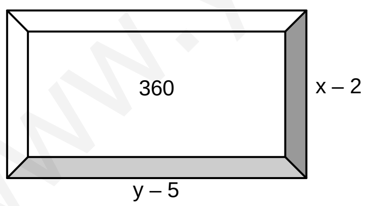


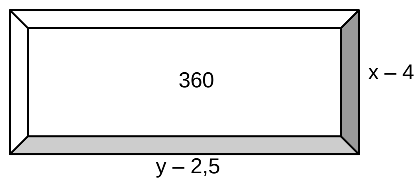
Aplicando el teorema de Pitágoras: $4x^2=64+x^2$

$$3x^2=64 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{64}{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Luego, la medida del lado es: $2x=\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm

6. Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm^2, y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.





Sean x = lado vertical del pliego

y = lado horizontal del pliego

$$\left.\begin{matrix} (x-2)(y-5)=360 \\ (x-4)(y-2,5)=360 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} xy-2y-5x=350 \\ xy-2,5x-4y=350 \end{matrix}\right\} E2=E2-E1 \rightarrow \begin{cases} xy-2y-5x=350 \\ 2,5x-2y=0 \end{cases} \rightarrow y=1,25x$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$1,25x^2-2,5x-5x=350 \rightarrow 1,25x^2-7,5x-350=0 \rightarrow 125x^2-750x-35000=0 \rightarrow x^2-6x-280=0$$

$$x=\frac{6\pm 34}{2}=\begin{cases} x=20 \rightarrow y=25 \\ x=-14 \ \text{No válida} \end{cases} \rightarrow \text{las dimensiones son 20 y 25 cm}$$

7. Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Sea x = número buscado $\rightarrow$ x + 1 = su siguiente ; $\frac{1}{x}$ = su inverso

$(x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \rightarrow x\,(x^2 + 2x + 1) - 8 = 23x \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 23x - 8 = 0 \rightarrow x^3 + 2x^2 - 22x - 8 = 0$

	1	2	–22	–8
4		4	24	8
	1	6	2	0

$(x - 4)(x^2 + 6x + 2) = 0$

$x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -3 \pm \sqrt{7}$

El número entero es 4.

8. Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Sea x = arista del cubo $\rightarrow$ Volumen: x^3

$(x + 4)^3 = 8x^3 \rightarrow x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 8x^3 \rightarrow -7x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$

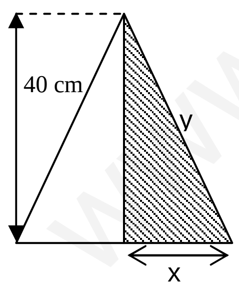
	–7	12	48	64
4		–28	–64	–64
	–7	–16	–16	0

$(x - 4)(7x^2 + 16x + 16) = 0$

$7x^2 + 16x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{-192}}{14} \rightarrow$ No tiene solución

La arista mide 4 cm

9. Un triángulo isósceles tiene 160 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 40 cm. Calcula los lados del triángulo y el área.



Sea x = la mitad de la medida del lado desigual

y = medida del lado igual

Perímetro es 160: $2x + 2y = 160 \Rightarrow 80 = x + y \Rightarrow y = 80 - x$

Altura es 40: $y^2 = 40^2 + x^2$

Planteamos la ecuación: $(80 - x)^2 = 40^2 + x^2$

$6400 + x^2 - 160x = 1600 + x^2 \Rightarrow 160x = 4800 \Rightarrow x = 30$ cm

Los lados miden 60 cm y 50 cm

Área = $\frac{40 \cdot 60}{2} = 1200\ \text{cm}^2$

10. Hallar una fracción tal que si se le añade 1 al numerador se convierte en un tercio y añadiendo 1 a su denominador sea igual a un cuarto.

Sea x = numerador de la fracción

y = denominador de la fracción

Si se añade 1 al numerador la fracción es un tercio: $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3} \rightarrow$ 3x + 3 = y

Si se añade 1 al denominador la fracción es un cuarto: $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4} \rightarrow$ 4x = y + 1 $\rightarrow$ y = 4x – 1

Planteamos la ecuación: 3x + 3 = 4x – 1 $\rightarrow$ 4x – 3x = 3 + 1 $\rightarrow$ x = 4 $\rightarrow$ y = 12 + 3 = 15

La fracción es $\frac{4}{15}$.

11. Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

Sea x = precio de las vacas

y = precio de los terneros

z = precio de las ovejas

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=16z \\ x+4z=3y \\ 3y+8z=4x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E1: 2x+3y-16z=0 \\ E2: x-3y+4z=0 \\ E3: -4x+3y+8z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} E1=E2+E1 \\ E3=E3+E2 \end{array}\right] \rightarrow \left.\begin{array}{l} E1: 3x-12z=0 \\ E2: x-3y+4z=0 \\ E3: -3x+12z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{cases} E1: x=4z \\ E2: 8z-3y=0 \rightarrow 3y=8z \end{cases}$$

Una vaca cuesta igual que 4 ovejas y tres terneros cuesta igual que 8 ovejas.

12. Hallar un número de tres cifras, sabiendo: que la cifra de las unidades es igual al producto de las otras dos, que la cifra de las decenas es media proporcional entre las otras dos y que la inversa de la cifra de las centenas es igual a la inversa de la cifra de las decenas más el doble de la inversa de la cifra de las unidades.

Sea x = cifra de las centenas

y = cifra de las decenas

z = cifra de las unidades

Se llama media proporcional de dos números a y b a otro número c que verifique: $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$

$$\left.\begin{array}{l} xy=z \\ \frac{y}{x}=\frac{z}{y} \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{2}{z} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E1: xy=z \\ E2: y^2=xz \\ E3: yz=xz+2yx \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sustituyendo z de E1 en E3 y E2: } \begin{cases} E1: xy=z \\ E2: y^2=x^2y \\ E3: y^2x=x^2y+2yx \end{cases}$$

Como hablamos de las inversas de las tres cifras, éstas son distintas de cero:

$$\begin{cases} E1: xy = z \\ E2: y^2 = x^2y \xrightarrow{:y} y = x^2 \\ E3: y^2x = x^2y + 2yx \xrightarrow{:yx} y = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \rightarrow x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -1.$$

Sólo es válida: $x = 2 \rightarrow y = 2^2 = 4$; $z = 2 \cdot 4 = 8$

Luego el número es 248.

13. El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

Sea x = número buscado

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow 5x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5} \rightarrow \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$$

14. De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

$$x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0$$

Resolvemos la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

La recta queda dividida en tres intervalos:

$$I_1 = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \; ; \; I_2 = \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \; ; \; I_3 = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$$

En cada intervalo la expresión $2x^2 - x - 2$ tiene el mismo signo, tomando un valor en cada intervalo estudiamos la solución:

$x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - (-10) - 2 > 0 \rightarrow$ No es solución.

$x = 0 \rightarrow -2 < 0 \rightarrow$ Es solución.

$x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 - 10 - 2 > 0 \rightarrow$ No es solución.

Por tanto, la solución es $\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

15. a) ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva?
b) ¿Qué números cumplen esa condición?

$x + x^2 > 0 \rightarrow x(x + 1) > 0$

Resolvemos la ecuación $x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -1.$

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
x	–	–	+
x + 1	–	+	+
x (x + 1)	+	–	+

La solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

16. Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas:

a) $\sqrt{5-3x}$

Imponemos que $5 - 3x \geq 0 \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow x \leq \frac{5}{3} \rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

b) $\sqrt{4-3x-x^2}$

Imponemos que $4 - 3x - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0 \rightarrow (x + 4)(x - 1) \leq 0$

	- ∞	– 4	1 + ∞
x – 1	–	–	+
x + 4	–	+	+
(x – 1)(x + 4)	+	–	+

La solución es [–4, 1]

c) log (x^2 – 2x + 1)

Imponemos que $x^2 - 2x + 1 > 0 \rightarrow (x - 1)^2 > 0$

Se verifica para cualquier número real salvo para x = 1

d) log (6 – x – x^2)

Imponemos que $6 - x - x^2 > 0 \rightarrow x^2 + x - 6 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 3) < 0$

	- ∞	– 3	2 + ∞
x – 2	–	–	+
x + 3	–	+	+
(x – 2)(x + 3)	+	–	+

La solución es (–3, 2)