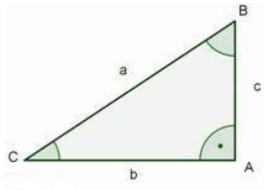
Resolución de triángulos rectángulos.

Relación lados y ángulos de un triángulo rectángulo



Relación entre los lados. Teorema de Pitágoras

Observa el triángulo rectángulo de la figura. Los lados son la hipotenusa a y los catetos b y c.

La relación entre los lados es el teorema de Pitágoras $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Relación entre sus ángulos

La suma de los 3 ángulos de un triángulo es siempre 180° $\Rightarrow$ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$

En un triángulo rectángulo siempre hay un ángulo de 90º (recto), en la figura es $\hat{A} = 90º$

La suma de los otros dos ángulos también es 90º $\Rightarrow$ $\hat{B} + \hat{C} = 90º$

Relaciones entre lados y ángulos : razones trigonométricas

Razones de $\hat{C}$

Leemos mirando por el ángulo C $\Rightarrow$ $\text{sen}\ \hat{C} = \dfrac{c}{a}$ $\quad \cos \hat{C} = \dfrac{b}{a}$ $\quad \tan \hat{C} = \dfrac{c}{b}$

Razones de $\hat{B}$

Leemos mirando por el ángulo B $\Rightarrow$ $\text{sen}\ \hat{B} = \dfrac{b}{a}$ $\quad \cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$ $\quad \tan \hat{B} = \dfrac{b}{c}$

$\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos complementarios.

Resolver triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es decir lo que valen sus 3 ángulos y sus 3 lados.

1. **Resolver el triángulo rectángulo ABC sabiendo que el lado b = 102,4 m y el ángulo B = 55°.**

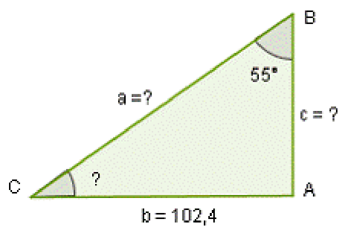
Dibujamos un triángulo rectángulo. Escribimos los ángulos con letras mayúsculas, los catetos y la hipotenusa con letras minúsculas.

Calculamos el ángulo C $\Rightarrow$ C = 90º - 55º = 35º

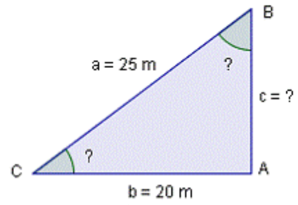
Escribimos las razones del ángulos B y vemos de cual de ellas podemos obtener resultados.

$\text{sen}\ B = \dfrac{b}{a} \rightarrow \text{sen}\ 55º = \dfrac{102,4}{a} \rightarrow a = \dfrac{102,4}{\text{sen}\ 55º} = 125\ m$

$\text{tg}\ B = \dfrac{b}{c} \rightarrow \text{tg}\ 55º = \dfrac{102,4}{c} \rightarrow c = \dfrac{102,4}{\text{tg}\ 55º} = 71,7\ m$



2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide a = 25 m y el cateto b = 20 m. Resolver el triángulo.



Dibujamos el triángulos con los datos que nos dan.

Calculamos el ángulo B $\Rightarrow$ B = 90º – 36,86º = 53,15º

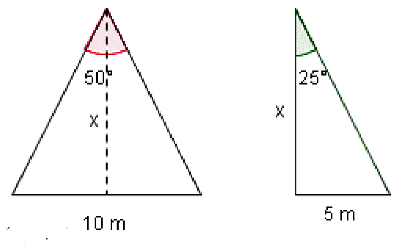
Escribimos las razones del ángulo C y vemos de cual de ellas podemos obtener resultados.

$$\cos C = \frac{b}{a} \rightarrow \cos C = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \rightarrow C = 36{,}86^\circ$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} \rightarrow \operatorname{sen} 36{,}86^\circ = \frac{c}{25} \rightarrow c = \operatorname{sen} 36{,}86^\circ \cdot 25 \rightarrow c = 15 \text{ m}$$

Aplicaciones de la trigonometría a la geometría

Triángulos isósceles



Los triángulos isósceles tienen dos lados iguales y uno desigual.
Dos ángulos iguales y uno desigual.

La base de un triángulo isósceles mide 10 m y el ángulo opuesto 50º. Halla el área.

Trazamos la altura del lado desigual y se forman dos triángulos rectángulos. (ver figura)

- **Calculamos la altura x**

Para calcular la altura "x" aplicamos la tangente, a uno de los triángulos rectángulos que se nos han originado al trazar la altura.

$$\tan 25 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \rightarrow \tan 25 = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\tan 25} \rightarrow x = 10{,}72 \text{ m}$$

- **Área**

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \rightarrow A = \frac{10 \cdot 10{,}72}{2} \rightarrow A = 53{,}6 \text{ m}^2$$

Polígonos regulares

Los polígonos regulares están formados por triángulos isosceles, tantos como lados tenga el polígono.
El valor de los lados iguales es el radio de una circunferencia circunscrita.
Si es un hexágono los triángulos son equiláteros.

Hallar el área de un pentágono regular de lado 10 m.

- Por ser un pentágono está formado de cinco triángulos isósceles.

- Calculamos el valor del ángulo central α de cada uno de los triángulos isósceles.

$$\alpha = \frac{360}{5} = 72^{\circ}$$

- Sabemos que el lado L = 10 m

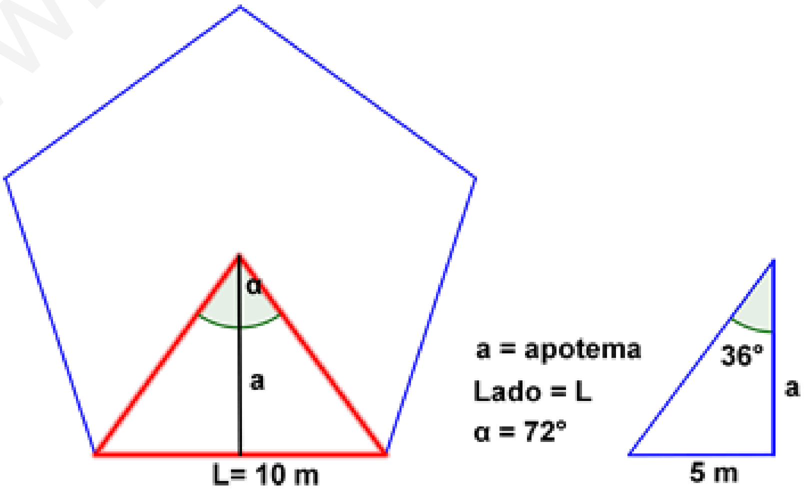
- La apotema a es la altura del triángulo isósceles.
  Al trazar la apotema nos quedan dos triángulos rectángulos.

  Conocemos el ángulo que será: $\frac{72}{2} = 36^{\circ}$

  Calculamos la apotema: $a = \frac{5}{\tan 36} = 6{,}9 \text{ m}$

- Área del polígono

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \Rightarrow A = \frac{(5 \cdot 10)\ 6{,}9}{2} = 172{,}5 \text{ m}^2$$



Rombo

Calcular los ángulos y el lado del rombo, de diagonales 12 y 6 cm. Ver figura .

Un rombo tiene los 4 lados iguales, y los 4 ángulos iguales dos a dos.
$\hat{B}$ y $\hat{D}$ agudos, $\hat{A}$ y $\hat{C}$ obtusos, entre todos suman 360º.

Las diagonales me originan 4 triángulos rectángulos.
El lado del rombo es la hipotenusa de los triángulos rectángulos.

- Calculamos el valor de los catetos de uno de los 4 triágulos rectángulos.

  Llamamos D a la diagonal mayor y d a la diagonal menor.
  D / 2 es un cateto del triángulo rectángulo 12 / 2 = 6 cm
  d /2 es el otro cateto 6 / 2 = 3 cm

- Calculamos el ángulo B del rombo

  $\tan B/2 = 3/6 \quad \Rightarrow \quad \tan B/2 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad B/2 = \text{arctg } 1/2 = 26{,}56º$
  El ángulo B del rombo será $26{,}56 \cdot 2 = 53{,}12º \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 53{,}12º$

- Calculamos el ángulo A del rombo

  $A / 2 = 90º - 26{,}56º = 63{,}44º \quad \Rightarrow \quad \hat{A}$ será $63{,}44 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 126{,}88º$

- Lado $\Rightarrow \quad l = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ cm