EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA RESUELTO

1. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

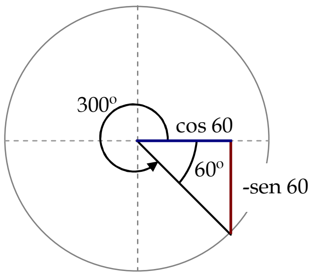
a) 1740º

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360º lo tratamos del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{ll} 1740 & \underline{|360} \\ 300 & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \text{ vueltas } \cdot 360^{\circ} + 300^{\circ}$$

El ángulo de 300º está en el 4º cuadrante y es equivalente a un ángulo de 60º para el que el seno es negativo y el coseno es positivo, tal como indica la figura adjunta:



Entonces:

- $\operatorname{sen}(1750) = \operatorname{sen}(300) = -\operatorname{sen}(60) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(1750) = \cos(300) = \cos(60) = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg}(1750) = \dfrac{-\operatorname{sen}(60)}{\cos(60)} = -\sqrt{3}$
- $\operatorname{cosec}(1750) = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}(60)} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- $\sec(1750) = \dfrac{1}{\cos(60)} = 2$
- $\operatorname{cotg}(1750) = \dfrac{1}{-\operatorname{tg}(60)} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

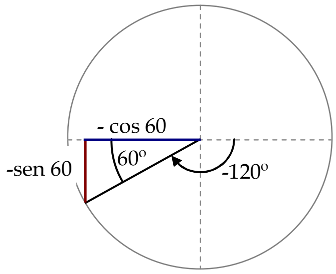
b) -840º

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360º lo tratamos del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{ll} -840 & \underline{|360} \\ -120 & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \text{ vueltas } \cdot 360^{\circ} - 120^{\circ}$$

El ángulo de -120º está en el tercer cuadrante y es equivalente a un ángulo de 60º para el que el seno y el coseno son negativos, tal como indica la figura adjunta:



Entonces:

- $\operatorname{sen}(-840)=\operatorname{sen}(-120)=-\operatorname{sen}(60)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(-840)=\cos(-120)=-\cos(60)=-\frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg}(-840)=\frac{-\operatorname{sen}(60)}{-\cos(60)}=\sqrt{3}$

- $\operatorname{cosec}(1750)=\frac{1}{-\operatorname{sen}(60)}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\sec(1750)=\frac{1}{-\cos(60)}=-2$
- $\operatorname{cotg}(1750)=\frac{1}{\operatorname{tg}(60)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Sabiendo que $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ y que α está en el 4º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 4º cuadrante entonces $\cos\alpha$ es positivo y $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo.

El $\operatorname{sen}\alpha$ lo deducimos usando la relación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Así: $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

El resto de razones trigonométricas se obtiene de forma inmediata:

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$; $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=2$; $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

3. **Deduce** las dos igualdades siguientes utilizando la *fórmula fundamental de la trigonometría*.

a) $1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2x$

Solución:

$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\operatorname{tg}^2x+1=\sec^2x$

b) $1+\operatorname{cotg}^2x=\operatorname{cosec}^2x$

Solución:

$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\frac{\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}^2x}+\frac{\cos^2x}{\operatorname{sen}^2x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}\Rightarrow 1+\operatorname{cotg}^2x=\operatorname{cosec}^2x$

4. **Demuestra** que se cumple la siguiente igualdad:

$$\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{cotg}(\alpha)-\frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2(\alpha)}}=\left[\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\right]\cdot\left(\frac{1}{\sec(\alpha)}-\frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)}\right)$$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{cotg}(\alpha)-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2(\alpha)}}=\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\alpha)}}}=1-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}}=$$

$$=1-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}}=1-\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}}=1-2\cdot\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

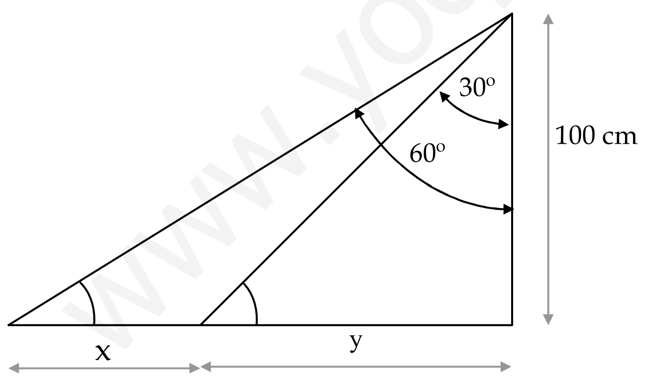
Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B=\left[\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\right]\cdot\left(\frac{1}{\sec(\alpha)}-\frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)}\right)=\left[\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\right]\cdot\left[\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)\right]=$$

$$=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-2\cdot\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

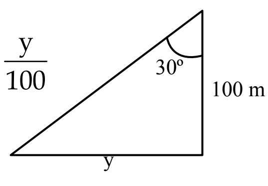
5. Calcula x e y



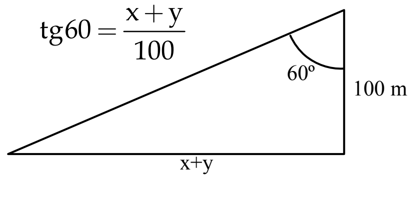
Solución:

Tenemos dos triángulos rectángulos. De cada uno de ellos obtendremos una ecuación trigonométrica.

$$\operatorname{tg}30=\frac{y}{100}$$



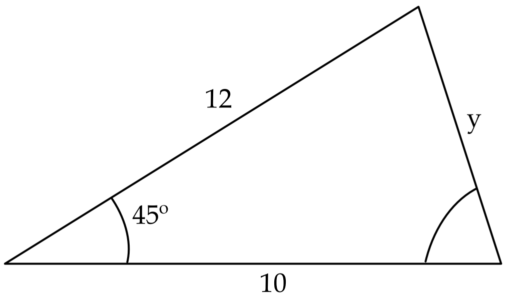
$$\operatorname{tg}60=\frac{x+y}{100}$$



Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{y}{100}\\[2mm] \sqrt{3}=\dfrac{x+y}{100}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\boxed{\dfrac{100}{\sqrt{3}}\ \text{m}=y}\\[2mm] \sqrt{3}=\dfrac{x+y}{100}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{x+\dfrac{100}{\sqrt{3}}}{100}\Rightarrow\boxed{x=\dfrac{200}{\sqrt{3}}\ \text{m}}$$

6. Calcula el valor de y de este triángulo no rectángulo (las longitudes están expresadas en cm)



Solución:

Aplicamos el teorema del coseno:
$y^2 = x^2 + z^2 - 2\cdot x\cdot z\cdot \cos A$, en donde hemos denotado por x al lado de 10 cm y por z al lado de 12 cm.

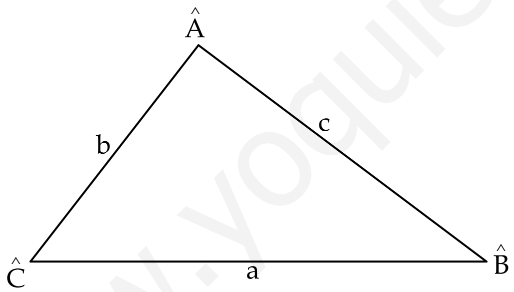
Entonces:
$y^2 = 10^2 + 12^2 - 2\cdot 10\cdot 12\cdot \cos 45 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \sqrt{100+124-240\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{224-120\cdot\sqrt{2}} = 7{,}4\ \text{m}$$

7. Resuelve el siguiente triángulo: $\hat{A} = 80^{\circ}$; $\hat{B} = 30^{\circ}$; $a = 26$ cm

Solución:

- Dibujamos un triángulo auxiliar para la resolución del problema.



- Valor del lado b:

Aplicamos el teorema del seno para obtenerlo:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{26}{\text{sen}80} = \frac{b}{\text{sen}30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 26\cdot\frac{1}{1{,}97} = 13{,}2\ \text{cm}$$

- Valor de $\hat{C}$:

$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A}+\hat{B}\right) = 180 - (80+30) = 70$

- Valor del lado c:

Aplicamos el teorema del coseno de forma conveniente para hallar el lado que nos interesa, la cuál es la siguiente: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\hat{C}$.

Despejamos c y sustituimos datos:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\hat{C}} = \sqrt{26^2+13{,}2^2-2\cdot 26\cdot 13{,}2\cdot\cos 70} = 24{,}8\ \text{cm}$$