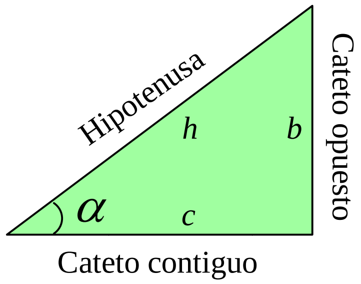
TRIGONOMETRÍA

Razones trigonométricas fundamentales



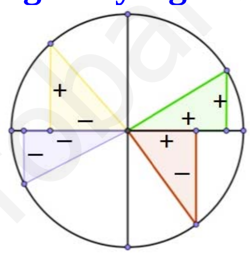
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{h}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Razones trigonométricas fundamentales de algunos ángulos y signos

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



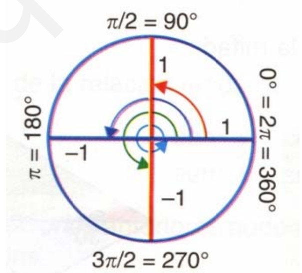
Unidades para medir ángulos

Las unidades más utilizadas para medir ángulos son:

º = grado sexagesimal (un grado sexagesimal es la medida del ángulo central correspondiente a una de las 360 partes en que se divide una circunferencia)

rad = radianes

Para transformar unos en otros, basta tener en cuenta la siguiente relación: $\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$

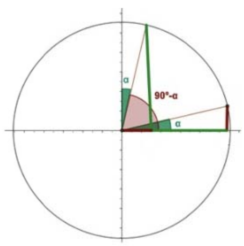


Relación fundamental (teorema de Pitágoras) $\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1}$

Reducción de las razones trigonométricas

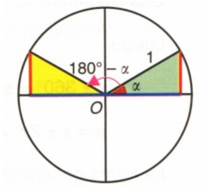
(i) <u>Ángulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos \ (90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha \end{array}}$$



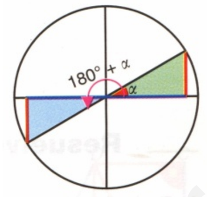
(ii) Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\,(180^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \\ \cos\,(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \end{array}}$$



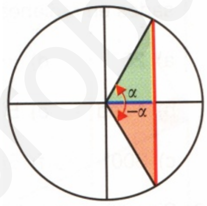
(iii) Ángulos que difieren en 180º: α y $180^\circ + \alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\,(180^\circ + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \\ \cos\,(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \end{array}}$$



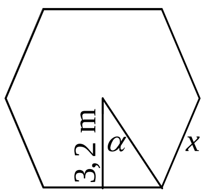
(iv) Ángulos opuestos α y $-\alpha$ ó que suman 360º: α y $360^\circ - \alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\,(-\alpha) = \text{sen}\,(360^\circ - \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha \\ \cos\,(-\alpha) = \cos\,(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha \end{array}}$$



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Calcula el perímetro de un hexágono regular cuya apotema mide 3,2 m.



Llamamos x al lado del hexágono y α al ángulo que se observa en la figura. Recuerda que las razones trigonométricas las hemos definido sobre un triángulo rectángulo, y por eso hemos buscado uno en el hexágono.
Por una parte tenemos que

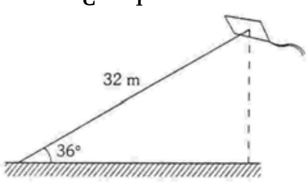
$$\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Y por otra, tenemos que buscar una razón trigonométrica que relacione los datos que nos dan con el lado, que es lo que queremos calcular, para poder obtener el perímetro.

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{3,2} = \frac{x}{6,4} \rightarrow x = 6,4 \cdot \text{tg } 30^\circ \simeq 3,695 \simeq 3,7$$

Así, el perímetro del hexágono es $p = 6x = 6 \cdot 3,7 = 22,2 \text{ m}$.

2. Hemos comprado una cometa cuyo hilo de 32 m de longitud forma con el suelo un ángulo de 36º. ¿A qué altura se encuentra la cometa en ese momento?

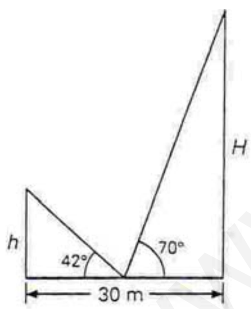


Llamamos h a la altura a la que se encuentra la cometa. Buscamos una razón trigonométrica que relacione los datos con h.

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{h}{32} \rightarrow h = 32 \cdot \text{sen } 36^\circ = 18,8 \text{ m}$$

Por tanto, la cometa se encuentra a 18,8 m.

3. La anchura de una calle es de 30 m. Si nos colocamos junto en el centro de la misma, podemos ver los tejados de los edificios de ambos lados bajo ángulos de 70º y 42º respectivamente. ¿Cuáles son las respectivas alturas de ambos edificios?



Tenemos dos incógnitas y dos triángulos rectángulos.
Del triángulo de la izquierda:

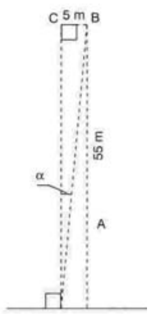
$$\text{tg } 42^\circ = \frac{h}{15} \rightarrow h = 15 \cdot \text{tg } 42^\circ = 13,5 \text{ m}$$

Y del triángulo de la derecha:

$$\text{tg } 70^\circ = \frac{H}{15} \rightarrow H = 15 \cdot \text{tg } 70^\circ = 41,2 \text{ m}$$

Por tanto, uno de los edificios mide 13,5 m y el otro 41,2 m.

4. La construcción de la torre inclinada de Pisa concluyó en el año 1284. Al terminarla se comprobó que la parte más alta de la torre se separaba de la vertical unos 90 cm, En la actualidad la separación es de unos 5 m y la altura de la torre de unos 55 m. Calcula el ángulo que forma la torre con la vertical.



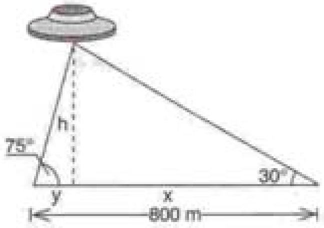
Aquí basta aplicar la definición de tangente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{5}{55}$$

y con la calculadora obtener el ángulo:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{5}{55} = 5,1944... = 5^\circ \; 11' \; 39,94''$$

5. Dos personas ven un ovni, desde dos puntos separados 800 m, con ángulos de elevación de 30º y 75º respectivamente. ¿A qué altura está el ovni, si se encuentra entre ellos?



La primera ecuación es $x + y = 800$

Por definición:

$$\text{tg } 30º = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\text{tg } 30º}$$

$$\text{tg } 75º = \frac{h}{y} \rightarrow y = \frac{h}{\text{tg } 75º}$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $\frac{h}{\text{tg } 30º} + \frac{h}{\text{tg } 75º} = 800$

Y despejando *h*:

$$h = \frac{800}{\frac{1}{\text{tg } 30º} + \frac{1}{\text{tg } 75º}} = 400 \text{ m}$$