1) Expresar en radianes los siguientes ángulos: 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º, 15º, 1º, 17,53º, 152º16’, 572º, 1000º.

Soluciones: $0\ rad,\ \frac{\pi}{6} rad,\ \frac{\pi}{4} rad,\ \frac{\pi}{3} rad,\ \frac{\pi}{2} rad,\ \frac{2\pi}{3} rad,\ \frac{3\pi}{4} rad,\ \frac{5\pi}{6} rad,\ \pi\, rad,\ \frac{7\pi}{6} rad,\ \frac{5\pi}{4} rad,\ \frac{4\pi}{3} rad,\ \frac{3\pi}{2} rad,\ \frac{5\pi}{3} rad,\ \frac{7\pi}{4} rad,\ \frac{11\pi}{6} rad,\ \frac{\pi}{12} rad,\ \frac{\pi}{180} rad,\ \frac{1753\pi}{18000} rad,\ 2{,}6576\ rad,\ \frac{143\pi}{45} rad,\ \frac{50\pi}{9} rad.$

2) Expresar en grados, minutos y segundos los siguientes ángulos, dados en radianes: $\frac{15\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{4}$, 0,625 rad, 10 rad *Soluciones: 337º30’, 405º, 112º30’, 1800º.*

3) a) Expresar en grados y en radianes el ángulo que forman las manecillas de un reloj a las 5 en punto. b) Ídem a las 12:20. *Soluciones: a) 150º; b) 110º*

4) ¿Qué ángulo entre 0º y 360º señala sobre la circunferencia el mismo punto que los siguientes ángulos?: a) 455º; b) 1200º; c) –175º; d) –715º; e) 500π rad

Soluciones: a) 95º; b) 120º; c) 185º; d) 5º; e) 0º $\equiv$ *0 rad*

5) En una circunferencia, a un arco de 2m le corresponde un ángulo central de 40º. Calcular el radio. *Solución:* $\frac{9}{\pi} m$

6) En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 30º y su cateto opuesto, 12 cm. Calcular el otro ángulo, la hipotenusa y el cateto restante.

Solución: 60º, h = 24 cm, c = $12\sqrt{3}\,cm$

7) Un ángulo de un triángulo rectángulo mide $\frac{\pi}{3}$ rad, y su cateto adyacente, 28cm. Calcular los restantes elementos del triángulo.

Solución: 30º, h = 56 cm, c= $28\sqrt{3}\,cm$

8) Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 38º y la hipotenusa, 30 cm. Hallar los restantes elementos. *Solución: 52º, 18,47 cm y 23,64 cm*

9) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 14 cm y uno de sus catetos, 11 cm. Calcular el otro cateto y los ángulos del triángulo.

Solución: $\sqrt{75}$ *, 51º47’12,44” y 38º12’47,56”*

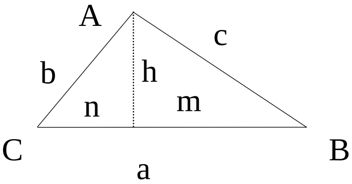
10) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 9 cm respectivamente. Calcular la hipotenusa, los ángulos y el área del triángulo.

Solución: h=11,4 cm, 37º52’29,94” y 52º7’30,06”, A=63/2cm^2

11) En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa es igual a 8 cm. ¿Cuánto miden los catetos? *Solución:* $4\sqrt{2}\,cm$

12) En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm respectivamente, calcular la hipotenusa, la altura relativa a la hipotenusa y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

Solución: a=5, n=9/5, m=16/5, h=2,4. Recordar el teorema del cateto: $b^2=a\cdot n$, $c^2=a\cdot m$, *y el teorema de la altura:* $h^2=m\cdot n$.



13) Desde un punto situado a 25m del pie de una torre se ve ésta bajo un ángulo de 60º. ¿Cuánto mide la torre? *Solución:* $25\sqrt{3}\,m$

14) Hallar el área de un hexágono regular de 20 cm de lado. *Solución:* $600\sqrt{3}\,cm^2$

15) Hallar el área de un octógono regular de 50 cm de lado. *Solución: 12.071,07 cm*^{2}

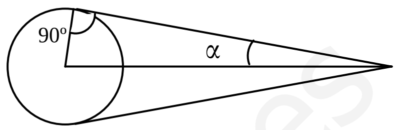
16) Calcular el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 cm tiene como arco correspondiente uno de 70º. *Solución: 21,44 cm*

17) La base de un triángulo isósceles mide 10 cm y el ángulo opuesto 50º. Calcular el área. *Solución: 53,61 cm^2*

18) El ángulo de elevación de la cúspide de una torre es de 45º15’ a una distancia de 72 m de la torre. Si el punto de observación se encuentra a 1,10 m del suelo, calcular la altura de la torre. *Solución: 73,73 m.*

19) Una moneda mide 2,5 cm de diámetro. Hallar el ángulo que forman las tangentes a dicha moneda desde un punto situado a 6 cm del centro .
Solución: 2α=24º2’57,83”

20) Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de 20º9’48,81”. Siendo el radio de la Tierra de 6.366 km, calcular la distancia de la nave a la superficie terrestre. *Solución: 30.000 km.*



21) Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60º. Suponiendo que el hilo esté tirante, calcular la altura de la cometa. *Solución:* $50\sqrt{3}\,m$

22) Los tres cables que sujetan una antena tienen sus anclajes en una circunferencia de 100 m de radio y forman un triángulo equilátero. Cada cable forma con la horizontal un ángulo de 45º. ¿Cuál es la altura de la antena? *Solución: 100 m.*

23) Las dos ramas de un compás forman un ángulo de 60º y cada rama tiene 12 cm de longitud. Hallar el radio de la circunferencia que puede trazarse. *Solución: 12 cm.*

24) Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo mide 60º. Hallar la altura de la torre.

Solución: $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ *m (típico problema del llamado método de doble observación)*

25) Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? *Solución: 24º14’14”*

26) Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 45º, y si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30º. Hallar la altura del árbol y el ancho del río. *Solución: ambos, 54,64 m.*

27) Un hombre está situado al oeste de una antena. Observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. ¿Cuál es la altura de la antena? *Solución: 35,36 m.*

28) Se desea calcular la altura de una torre. Para ello se hacen dos observaciones desde los puntos A y B, situados en una misma recta con el pie de la torre, obteniéndose como ángulos de elevación 30º y 45º respectivamente. La distancia AB = 30 m. Calcular la altura de la torre. *Solución: 40,98 m.*

29) Juan y Ana ven desde las puertas de sus casas una colina bajo ángulos de 45º y 60º respectivamente. La distancia entre sus casas es de 126 m, y la colina se encuentra en la recta que las une. Calcular la altura de la colina. *Solución: 79,88 m.*

30) Dibujar los ángulos menores cuyas razones trigonométricas son: a) sen α = 3/5; b) cos α = 4/5; c) tg α = 1; d) cotg α = 1; e) sec α = 1; f) cosec α = 2.

31) Calcular las restantes razones trigonométricas, sabiendo que: a) sen α = 3/5, α∈I cuad.; b) cos α = 4/5, 270º≤α≤360º; c) sen α = 3/5, 90º≤α≤180º; d) tg α = 3/4, 180º≤α≤270º; e) cotg α = –2, 90º≤α≤180º; f) sec α = 1, 270º≤α≤360º; g) cosec α = –2, 180º≤α≤270º; h) tg α = 3/4, 0º≤α≤90º; i) cos α = 1,3, α∈IV cuad; j) tg α = 2, 90º≤α≤180º.

Soluciones:

a) sen α = 3/5, cos α = 4/5, tg α = 3/4, cotg α = 4/3, sec α = 5/4, cosec α = 5/3

b) sen α = –3/5, cos α = 4/5, tg α = -3/4, cotg α = –4/3, sec α = 5/4, cosec α = -5/3

c) sen α = 3/5, cos α = –4/5, tg α = -3/4, cotg α = –4/3, sec α = –5/4, cosec α = 5/3

d) sen α = –3/5, cos α = –4/5, tg α = 3/4, cotg α = 4/3, sec α = –5/4, cosec α = –5/3

e) sen α= $\sqrt{5}$/5, cos α= –2$\sqrt{5}$/5, tg α= –1/2, cotg α= –2, sec α = –$\sqrt{5}$/2, cosec α= $\sqrt{5}$

f) sen α = 0, cos α = 1, tg α = 0, cotg α no tiene, sec α = 1, cosec α = no tiene

g) sen α= –1/2, cos α = $-\sqrt{3}/2$, tg α = $\sqrt{3}/3$, cotg α = $\sqrt{3}$, sec α= $-2\sqrt{3}/3$, cosec α=-2

h) sen α = 3/5, cos α = 4/5, tg α = 3/4, cotg α = 4/3, sec α = 5/4, cosec α = 5/3

i) cos α no puede ser mayor que 1 ni menor que -1; tg α es negativa en el 2º cuad.

32) Expresar las siguientes razones trigonométricas en función de un ángulo del primer cuadrante: a) sen(–120º); b) cotg(–150º); c)sen 2700º; d) sec(–25º); e) cos(–30º); f) cosec 4420º; g) tg(–275º); h) cotg 4500º.

Soluciones: a) –sen 60º= $-\sqrt{3}/2$; b) cotg 30º= $\sqrt{3}$; c) sen 0º=0; d) sec 25º; e) cos 30º= $\sqrt{3}/2$; f) cosec 80º; g) tg 85º; h) cotg 0º, que no existe.

33) Siendo α un ángulo del tercer cuadrante tal que tg α = 3/4, calcular: a) tg(-α); b) tg(180º+α); c) tg(720º+α); d) tg(90º-α); e) tg(270º-α); f) tg(90º+α); g) tg(270º+α); h) tg(180º-α)

Soluciones: a) –tg α = –3/4; b) tg α = 3/4; c) tg α = 3/4; d)cotg α = 4/3 (tener en cuenta que 90–α=–(α–90)); e)cotg α = 4/3; f) –cotg α = –4/3; g) –cotg α = –4/3; h) –tg α = –3/4

34) Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tag}\alpha} = \cos\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = 1$

c) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

d) $\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\,\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} = |\cos\alpha|$

e) $\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

f) $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 1$

g) $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$ (este resultado es igual a –cos 2α)

h) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha} = 1$

i) $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha} = -1$

j) $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$

k) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$

l) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

m) $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$

n) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \cos\alpha$

ñ) $\dfrac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$

35) Simplificar: $\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha$ *Sol:* $(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^3$

36) a) ¿Puede ocurrir que sen α = 1/2 y cos α = 1/3 para el mismo ángulo α? b) ¿Y que tg α = $2\sqrt{2}$ y cos α = 1/3?

Solución: a) No, porque no se cumple que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$*; b) Si, puesto que* $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

37) Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades, para cualesquiera valores de los ángulos que en ellas aparecen tales que existan las expresiones:

a) $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$;

c) $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta = \operatorname{sen}^2\beta - \cos^2\alpha$; d) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

e) $\operatorname{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; f) $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\alpha\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha = 1$;

g) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}$; i) $\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$; j) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\sec\alpha} - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\sec\alpha} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$;

k) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$; l) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{1-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$;

m) $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$; n) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha} - \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = 0$;

ñ) $\dfrac{\sec^4\alpha - 1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \sec^2\alpha + 1$; o) $\dfrac{2\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = 3\cos\alpha$;

p) $\dfrac{\sec\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{\sec\alpha + 1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$; q) $(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha + 1) = \operatorname{cotg}\alpha$;

r) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 0$; s) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$;

t) $\dfrac{\sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$

38) Si sen 30º = ½, calcular: a) sen 150º; b) sen 210º; c) sen 330º; d) cos 60º; e) cos 120º; f) cos 240º; g) cos 300º; h) cosec 210º; i) sec 300º; j) sen(–225º); k) sen 855º.