# *LA FUNCIÓN INVERSA*

Existen diferentes definiciones de función inversa, aunque el concepto matemático es el mismo. Expondremos aquí tres de ellas, para efectos formales, ya que para hallar la inversa de una función no se requiere la utilización de la definición.

DEFINICIÓN 1

Si $R$ es una relación, la relación $R^*$ definida por la proposiciones

$$(a,b) \in R \longleftrightarrow (b,a) \in R^*$$

y

$$(a,b) \in R \wedge (c,b) \in R \longrightarrow a = c$$

es llamada la inversa de $R$.

Es decir, la inversa de una relación $R$ es la relación $R^*$ que se obtiene intercambiando las componentes de cada una de los pares ordenados de $R$. Deducimos de esta definición que el dominio de $R$ es el codominio de $R^*$ y que el codominio de $R$ es el dominio de $R^*$. Tomemos a $R = f$ y a $R^* = f^{-1}$, en esta definición.

DEFINICIÓN 2

Sea la función directa $f : X \longrightarrow Y$, inyectiva y de ámbito Y. Se dice que $f$ es invertible si existe una función $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, llamada función inversa y cumple con la siguiente condición:

$$(f \circ f^{-1}) = f[f^{-1}(x)] = x, \;\; \forall\, x \;\in\; Y$$

y

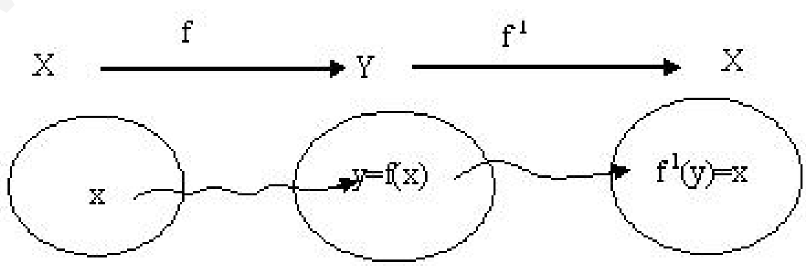
$$(f^{-1} \circ f) = f^{-1}[f(x)] = x, \;\; \forall\, x \;\in\; X.$$

Esta definición usa el concepto de composición de funciones tanto por la izquierda como por la derecha, a saber uno de ellos es: $[f \circ f^{-1}](x) = I_X(x) = x$.

DEFINICIÓN 3

Sea la función $f : X \longrightarrow Y$, ambos conjuntos no vacíos. Si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) = x$; $\forall\, x$ en el dominio de $f \wedge \forall\, y$ en el dominio de $f^{-1}$.

Esto en diagramas de Venn-Euler se representa como




Esta última definición es más apta para secundaria mientras que los dos primeras se usan más a nivel universitario, para hacer demostraciones matemáticas.

COMENTARIOS

**i)** La notación $f^{-1}$ se refiere a la inversa de la función $f$ y no al exponente $^{-1}$ usado para números reales. Unicamente se usa como notación de la función inversa.

**ii)** La inversa de un función cuando existe, es única.

**iii)** La inversa de una función cualquiera no siempre existe, pero la inversa de una función biyectiva siempre existe.

**iv)** En general, las gráficas de $f$ y $f^{-1}$ son simétricas respecto a la función identidad $y = x$.

## Método para Hallar la Inversa de una Función

Aunque existen varios métodos para hallar la inversa, los siguientes pasos ayudan a obtener la inversa de la función $f(x)$.

PROCEDIMIENTO

1. Se sustituye $f(x)$ por $y$ es la función dada.
2. Se intercambian $x$ y $y$ para obtener $x = f(y)$.
3. Se despeja la variable $y$.
4. En la solución se escribe $f^{-1}(x)$ en vez de $y$.

Ejemplo 1 Hallar la inversa de la función $f(x) = \frac{x}{2} - 5$.

Solución

$f(x) = \frac{x}{2} - 5$,

$y = \frac{x}{2} - 5$, intercambiando $f(x)$ por $y$

$x = \frac{y}{2} - 5$, intercambiando $y$ por $x$

$x + 5 = \frac{y}{2}$, transponiendo el 5

$2(x + 5) = y$, subiendo el 2 al lado izquierdo

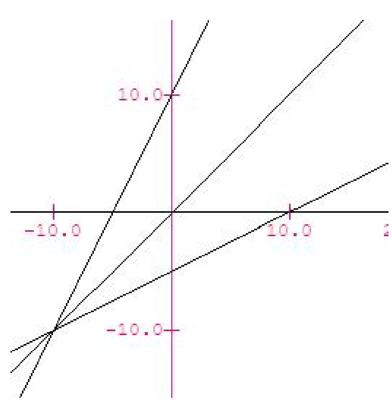
$2x + 10 = y$, multiplicando por 2

$y = 2x + 10$, dando vuelta a la expresión anterior

$f^{-1}(x) = 2x + 10$ intercambiando $y$ por $f^{-1}(x)$

Y la inversa es la función;

$$f^{-1}(x) = 2x + 10$$



Ejemplo 2 Hallar la inversa de la función $f(x) = x^2$.

<u>Solucion</u>

$f(x) = x^2$

$y = x^2$

$x = y^2$, intercambiamos $y$ por $x$

$\sqrt{x} = \sqrt{y^2}$, aplicando la raíz a ambos lados

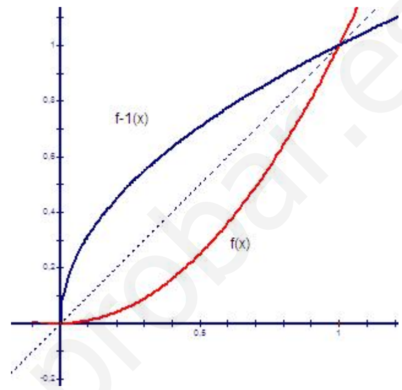
$\sqrt{x} = y$, eliminando raíz y el cuadrado

$y = \sqrt{x}$, acomodando la $y$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, sustituyendo $y$ por $f^{-1}(x)$

La solución buscada es

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$




Ejemplo 3 Encuentre la inversa de la función: $f(x) = 3x - 5$

<u>Solución</u>

$f(x) = 3x - 5$

$y = 3x - 5$

$x = 3y - 5$

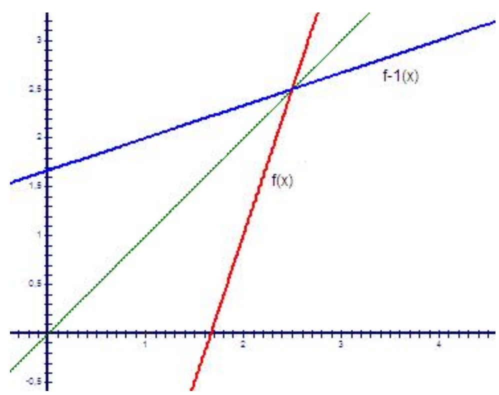
$x + 5 = 3y$

$\frac{x+5}{3} = y$

$y = \frac{x+5}{3}$

y finalmente, tenemos la inversa de $f$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$



Ejemplo 4 Encontrar la función inversa de la función: $f(x) = x^2 - 3$.

Solución

$f(x) = x^2 - 3$

$y = x^2 - 3$

$x = y^2 - 3$

$x + 3 = y^2$

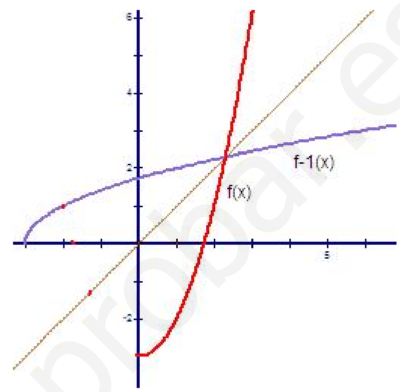
$\sqrt{x+3} = \sqrt{y^2}$

$\sqrt{x+3} = y$

$y = \sqrt{x+3}$

Sustituyendo, hallamos la función inversa,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$




Ejemplo 5 Hallar la función inversa de: $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Solución

$f(x) = \sqrt{x-1}$

$y = \sqrt{x-1}$

$x = \sqrt{y-1}$

$x^2 = (\sqrt{y-1})^2$

$x^2 = y - 1$

$x^2 + 1 = y$

$y = x^2 + 1$

Cambiando, $y$ por $f^{-1}(x)$, obtenemos la función inversa,

$$f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

# EJERCICIOS

Encuentre la función inversa de las siguientes funciones. Asuma que las funciones están bien definidas en el conjunto de los números reales.

1. $f(x) = 7x$
2. $f(x) = 3x$
3. $g(x) = -10x$
4. $f(x) = \frac{x}{3}$
5. $f(x) = \frac{3x}{8}$
6. $f(x) = \frac{-x}{13}$
7. $g(x) = 4x - 6$
8. $h(x) = 3x + 10$
9. $f(x) = 9x - 11$
10. $f(x) = 5 + 6x$
11. $f(x) = 2 - 8x$
12. $g(x) = 12 - 10x$
13. $f(x) = -x + 25$
14. $f(x) = 2 + 9x$
15. $f(x) = -17 - 6x$
16. $g(x) = \frac{x-8}{3}$
17. $f(x) = \frac{2x+1}{5}$
18. $f(x) = \frac{x-8}{-2}$
19. $g(x) = \frac{x+12}{9}$
20. $f(x) = \frac{x+10}{4}$
21. $g(x) = \frac{7-2x}{7}$
22. $g(x) = \frac{-7x+6}{10}$
23. $f(x) = 4x^2 + 1$
24. $f(x) = -8x^2 + 7$
25. $k(x) = 9 - x^2$
26. $f(x) = 8 - 5x^3$
27. $h(x) = 10x^3 + 6$
28. $h(x) = \sqrt{3x - 5}$
29. $h(x) = \sqrt{-9x + 15}$
30. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
31. $g(x) = 6\sqrt{15 - x} - 3$
32. $g(x) = -5\sqrt{2x - 9} + 17$
33. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
34. $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$
35. $g(x) = 5\sqrt{4 + x^2} - 12$
36. $g(x) = -9\sqrt{7 - x^2} + 1$
37. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
38. $j(x) = \sqrt[3]{x + 8}$
39. $h(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$
40. $f(x) = (x - 1)^3$
41. $h(x) = (6x + 13)^2$
42. $g(x) = (-4x - 11)^2$
43. $f(x) = (x - 20)^3$
44. $f(x) = (3x + 7)^2$
45. $h(x) = \frac{7}{x-9}$
46. $g(x) = \frac{1}{x-4}$
47. $f(x) = \frac{2}{x+4}$
48. $h(x) = \frac{x+6}{x+2}$
49. $h(x) = \frac{x-5}{x+16}$
50. $h(x) = \frac{x+10}{x-3}$