

# 8

# Resolución de triángulos rectángulos



## 1. Circunferencia goniométrica

### PIENSA Y CALCULA

Escribe la fórmula de la longitud de un arco de circunferencia de radio 1 m, y calcula, en función de  $\pi$ , la longitud del arco correspondiente a:

- a)  $90^\circ$       b)  $180^\circ$       c)  $270^\circ$       d)  $360^\circ$

**Solución:**

$$L = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

a)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2}$  m      b)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 180^\circ = \pi$  m      c)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$  m      d)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 360^\circ = 2\pi$  m

### APLICA LA TEORÍA

**1** Pasa los ángulos siguientes a radianes:

- a)  $30^\circ$       b)  $120^\circ$       c)  $270^\circ$       d)  $315^\circ$

**Solución:**

a)  $30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$  rad

b)  $120^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$  rad

c)  $270^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{3\pi}{2}$  rad

d)  $315^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{7\pi}{4}$  rad

**2** Pasa los ángulos siguientes a grados:

- a) 0,5 rad      b) 1 rad      c) 1,5 rad      d) 2,5 rad

**Solución:**

a)  $0,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 28^\circ 38' 52''$

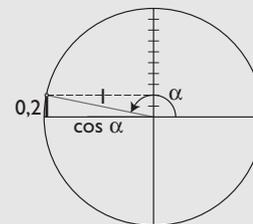
b)  $1 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 57^\circ 17' 45''$

c)  $1,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 85^\circ 56' 37''$

d)  $2,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 143^\circ 14' 22''$

**3** Determina  $\cos \alpha$  sabiendo que el ángulo  $\alpha$  está en el 2º cuadrante y que  $\sin \alpha = 0,2$

**Solución:**

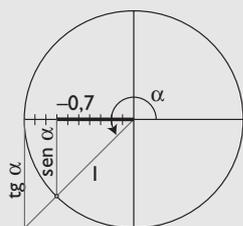


$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$0,2^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0,9798$$

**4** Calcula  $\text{tg } \alpha$ , sabiendo que el ángulo  $\alpha$  está en el 3º cuadrante y que  $\cos \alpha = -0,7$

**Solución:**



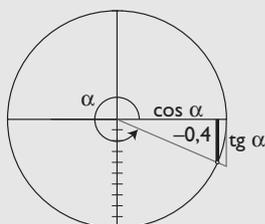
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \left(-\frac{1}{0,7}\right)^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,0408$$

**5** Determina las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  si está en el 4º cuadrante y  $\operatorname{sen} \alpha = -0,4$

**Solución:**



$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(-0,4)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = 0,9165$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -0,4364$$

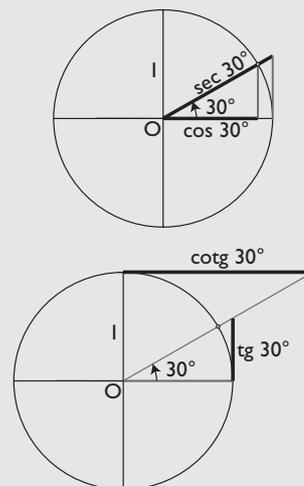
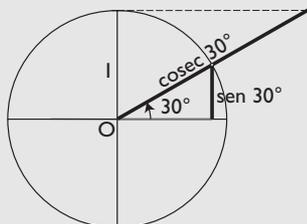
$$\sec \alpha = 1,0911$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -2,5$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = -2,2915$$

**6** Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de  $30^\circ$  y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

**Solución:**

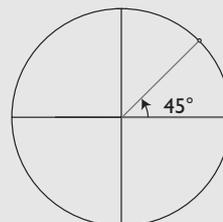


**7** Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos siguientes:

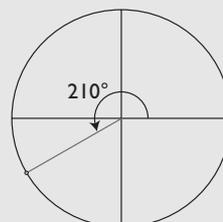
- a)  $1485^\circ$       b)  $2370^\circ$       c)  $2100^\circ$

**Solución:**

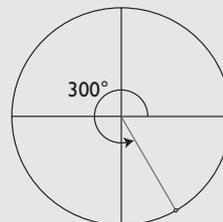
$$\text{a) } 1485^\circ = 45^\circ + 4 \cdot 360^\circ$$



$$\text{b) } 2370^\circ = 210^\circ + 6 \cdot 360^\circ$$



$$\text{c) } 2100^\circ = 300^\circ + 5 \cdot 360^\circ$$



## 2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

### PIENSA Y CALCULA

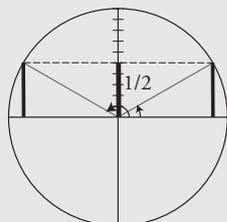
Dibuja en la circunferencia unidad todos los ángulos que cumplen que:

a)  $\sin \alpha = 1/2$

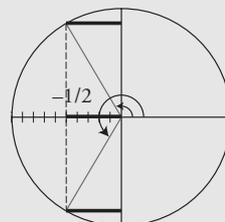
b)  $\cos \alpha = -1/2$

**Solución:**

a)



b)



### APLICA LA TEORÍA

**8** Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan:

a)  $\sin \alpha = 3/4$

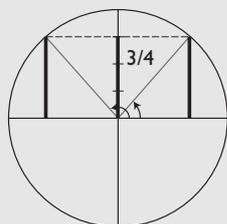
b)  $\cos \alpha = -1/4$

c)  $\sec \alpha = 2,5$

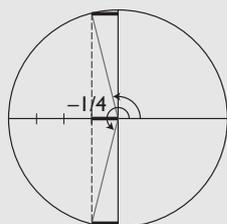
d)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$

**Solución:**

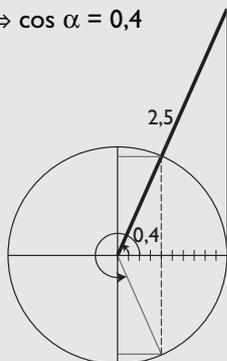
a)



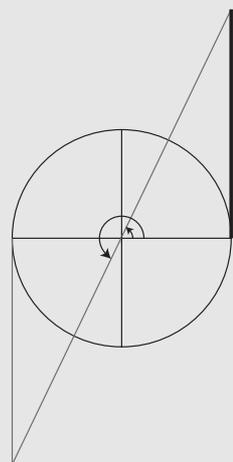
b)



c)  $\sec \alpha = 2,5 \Rightarrow \cos \alpha = 0,4$



d)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$



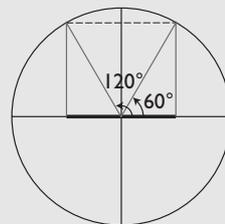
**9** Calcula, reduciendo al 1<sup>er</sup> cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a)  $\cos 120^\circ$

b)  $\sin 300^\circ$

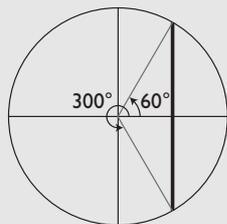
**Solución:**

a)



$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

b)



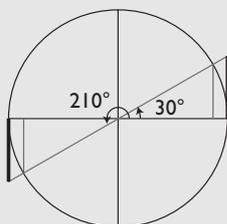
$$\text{sen } 300^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**10** Calcula, reduciendo al 1<sup>er</sup> cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

- a)  $\text{tg } 210^\circ$                       b)  $\text{sen } 135^\circ$

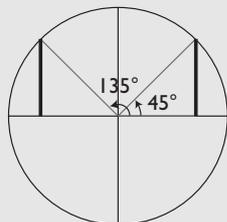
**Solución:**

a)



$$\text{tg } 210^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b)



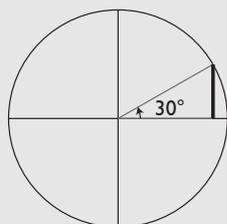
$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**11** Calcula, reduciendo al 1<sup>er</sup> cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

- a)  $\text{sen } 1830^\circ$                       b)  $\text{cos } 1230^\circ$   
c)  $\text{tg } 2385^\circ$                       d)  $\text{cos } 2820^\circ$

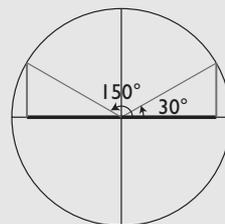
**Solución:**

a)  $1830^\circ = 30^\circ + 5 \cdot 360^\circ$



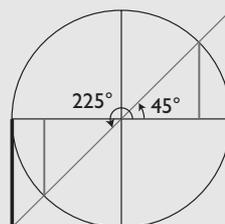
$$\text{sen } 1830^\circ = \text{sen } 30^\circ = 1/2$$

b)  $1230^\circ = 150^\circ + 3 \cdot 360^\circ$



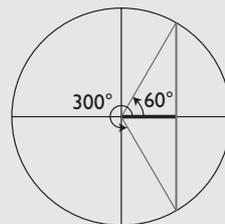
$$\text{cos } 1230^\circ = \text{cos } 150^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)  $2385^\circ = 225^\circ + 6 \cdot 360^\circ$



$$\text{tg } 2385^\circ = \text{tg } 225^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$$

d)  $2820^\circ = 300^\circ + 7 \cdot 360^\circ$



$$\text{cos } 2820^\circ = \text{cos } 300^\circ = \text{cos } 60^\circ = 1/2$$

**12** Demuestra que:

- a)  $\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$   
b)  $(\text{cosec } x + \text{tg } x) \text{cos } x = \text{sen } x + \text{cotg } x$

**Solución:**

a)  $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{cos}^2 x}{\cos^2 x} = 1$

b)  $\left(\frac{1}{\text{sen } x} + \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}\right) \text{cos } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} + \text{sen } x = \text{cotg } x + \text{sen } x$

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

**13**  $2 \text{sen } x = 1$

**Solución:**

$$\text{sen } x = 1/2$$

$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$   
 $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

**14**  $\cos x = \sec x$

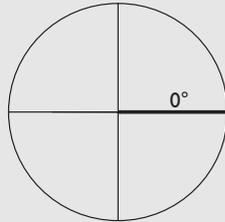
**Solución:**

$$\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = 1$$

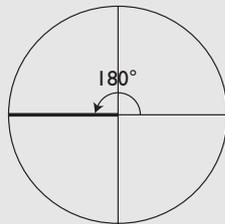
$$\cos x = \pm 1$$

a)  $\cos x = 1$



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos x = -1$

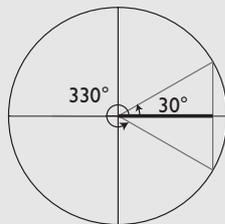


$$x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**15**  $2 \cos x = \sqrt{3}$

**Solución:**

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**16**  $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$

**Solución:**

$$3 \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0$$

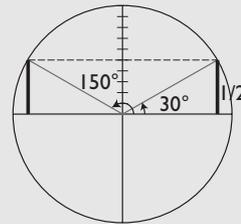
$$3 \sin x - 2 + 2 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

La solución  $\sin x = -2$  no tiene sentido, porque  $|\sin x| \leq 1$

$$\sin x = 1/2$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

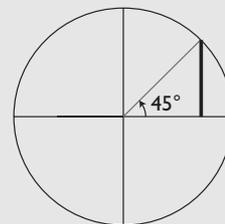
$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**17**  $\sin 2x = 1$

**Solución:**

$$2x = 90^\circ$$

$$x = 45^\circ$$



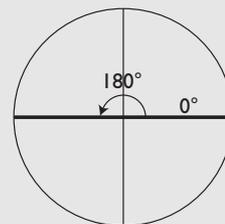
$$x = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**18**  $\sin x \cdot \cos x = 0$

**Solución:**

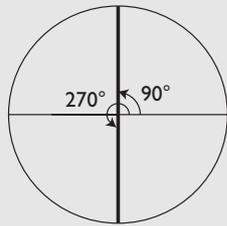
$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

a)  $\sin x = 0$



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} x = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

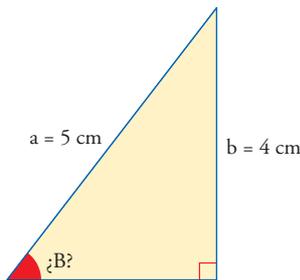
b)  $\cos x = 0$



$$\left. \begin{aligned} x_3 &= 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_4 &= 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} x = 90^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

### 3. Resolución de triángulos rectángulos

#### PIENSA Y CALCULA



Escribe la razón trigonométrica que relaciona directamente el valor de los datos conocidos en el triángulo del margen y el ángulo correspondiente. Utilizando la calculadora, halla dicho ángulo.

**Solución:**

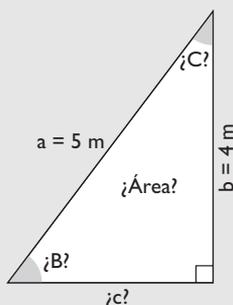
$$\text{sen } B = \frac{4}{5}$$

$$B = 53^\circ 7' 48''$$

#### APLICA LA TEORÍA

**19** En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa  $a = 5$  m y un cateto  $b = 4$  m. Calcula los demás elementos.

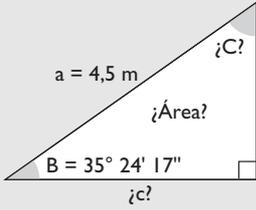
**Solución:**



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5$ m $b = 4$ m	c	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ m
	B	$\text{sen } B = \frac{b}{a}$	$\text{sen } B = \frac{4}{5} \Rightarrow B = 53^\circ 7' 48''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 36^\circ 52' 12''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ m <sup>2</sup>

- 20** En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa  $a = 4,5$  m y el ángulo  $B = 35^\circ 24' 17''$ . Calcula los demás elementos.

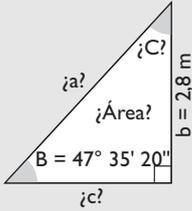
**Solución:**



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 4,5$ m $B = 36^\circ 52' 12''$	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 54^\circ 35' 43''$
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	$b = 4,5 \text{ sen } 35^\circ 24' 17'' = 2,61$ m
	c	$\text{cos } B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \text{ cos } B$	$c = 4,5 \text{ cos } 35^\circ 24' 17'' = 3,67$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,61 \cdot 3,67 = 4,79$ m <sup>2</sup>

- 21** En un triángulo rectángulo se conocen el cateto  $b = 2,8$  m y el ángulo opuesto  $B = 47^\circ 35' 20''$ . Calcula los demás elementos.

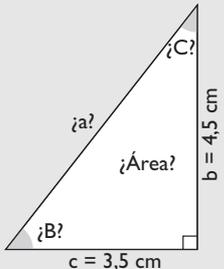
**Solución:**



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 2,8$ m $B = 47^\circ 35' 20''$	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 42^\circ 24' 40''$
	a	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B}$	$a = \frac{2,8}{\text{sen } 47^\circ 35' 20''} = b = 3,79$ m
	c	$\text{tg } C = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \text{ tg } C$	$c = 2,8 \text{ tg } 42^\circ 24' 40'' = 2,56$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 2,56 = 3,58$ m <sup>2</sup>

- 22** En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos  $b = 4,5$  cm y  $c = 3,5$  cm. Calcula los demás elementos.

**Solución:**

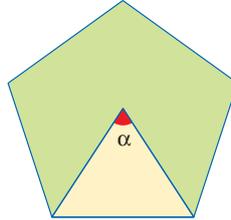


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 4,5$ cm $c = 3,5$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$c = \sqrt{4,5^2 + 3,5^2} = 5,70$ cm
	B	$\text{tg } B = \frac{b}{c}$	$\text{tg } B = \frac{4,5}{3,5} \Rightarrow B = 52^\circ 7' 30''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 37^\circ 52' 30''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3,5 = 7,88$ cm <sup>2</sup>

# 4. Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes

## PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el ángulo relleno de rojo del siguiente pentágono regular.

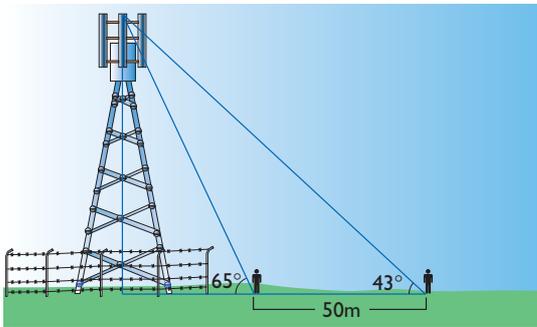


**Solución:**

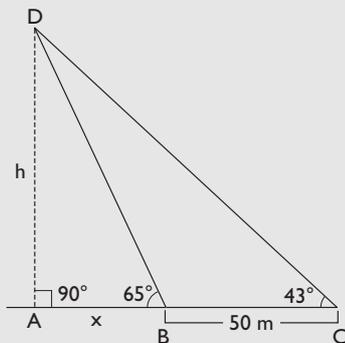
$$\alpha = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

## APLICA LA TEORÍA

- 23** Una antena de telefonía móvil está en una llanura dentro de una cerca en la que está prohibido entrar. Para hallar su altura, medimos desde un punto exterior el ángulo de elevación y se obtienen  $65^\circ$ . Nos alejamos 50 m y el nuevo ángulo de elevación es de  $43^\circ$ . Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.



**Solución:**



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 65^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 43^\circ &= \frac{h}{50+x} \end{aligned} \right\}$$

$$x = 38,47 \text{ m}$$

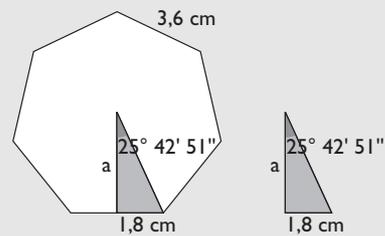
$$h = 82,50 \text{ m}$$

La antena de telefonía móvil mide 82,5 m de alto.

- 24** Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 3,6 cm

**Solución:**

$$360^\circ : 14 = 25^\circ 42' 51''$$



$$\operatorname{tg} 25^\circ 42' 51'' = \frac{1,8}{a}$$

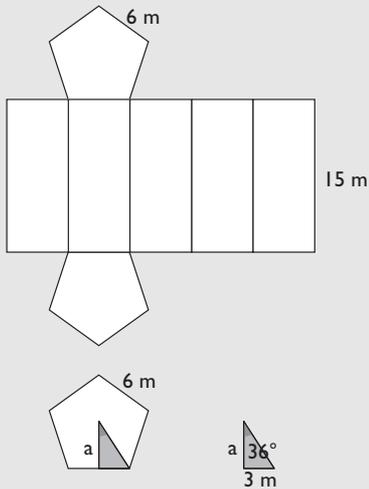
$$a = 3,74 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 3,6 \cdot 3,74}{2} = 47,12 \text{ cm}^2$$

- 25** Calcula el área de un prisma regular pentagonal en el que la arista de la base mide 6 m, y la altura, 15 m

**Solución:**



$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{3}{a}$$

$$a = 4,13 \text{ m}$$

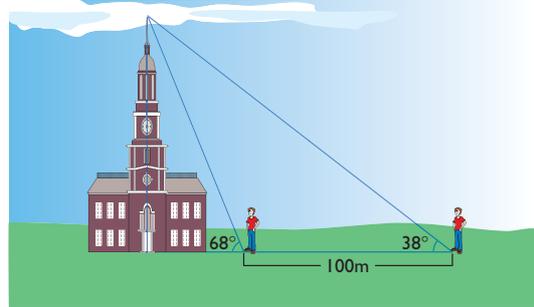
$$A_B = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4,13}{2} = 61,95 \text{ m}^2$$

$$A_L = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ m}^2$$

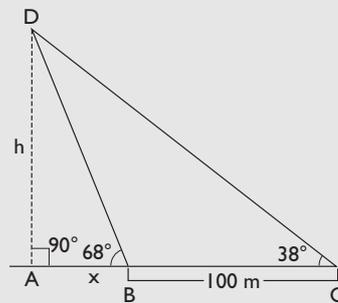
$$A_T = 2 \cdot 61,95 + 450 = 573,90 \text{ m}^2$$

- 26** Para medir la altura de una catedral, medimos el ángulo de elevación de la parte más alta desde un punto determinado y obtenemos  $68^\circ$ ; nos ale-

jamos en la misma dirección 100 m y el nuevo ángulo de elevación es de  $38^\circ$ . Halla la altura de la catedral.



**Solución:**



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 68^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 38^\circ &= \frac{h}{100 + x} \end{aligned} \right\}$$

$$x = 46,13 \text{ m}$$

$$h = 114,17 \text{ m}$$

La catedral mide 114,17 m de alto.

# Ejercicios y problemas

## 1. Circunferencia goniométrica

**27** Pasa los ángulos siguientes a radianes:

- a)  $45^\circ$                       b)  $150^\circ$   
c)  $210^\circ$                       d)  $330^\circ$

**Solución:**

- a)  $45^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$   
b)  $150^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$   
c)  $210^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$   
d)  $330^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

**28** Pasa los ángulos siguientes a grados

- a)  $2 \text{ rad}$                       b)  $\pi/9 \text{ rad}$   
c)  $5\pi/3 \text{ rad}$                       d)  $1,7 \text{ rad}$

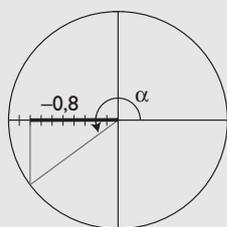
**Solución:**

- a)  $2 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 114^\circ 35' 30''$   
b)  $\frac{\pi}{9} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 20^\circ$   
c)  $\frac{5\pi}{3} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 300^\circ$   
d)  $1,7 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 97^\circ 24' 10''$

**29** Determina todas las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  si  $\cos \alpha = -0,8$  y el ángulo  $\alpha$  está en el 3<sup>er</sup> cuadrante.

**Solución:**

$$\cos \alpha = -0,8$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + (-0,8)^2 = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -0,6$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,75$$

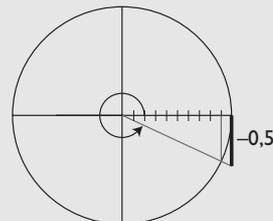
$$\sec \alpha = -1,25$$

$$\text{cosec } \alpha = -1,6667$$

$$\text{cotg } \alpha = 1,3333$$

**30** Si la  $\text{tg } \alpha = -0,5$  y  $\alpha$  está en el 4<sup>o</sup> cuadrante, determina el resto de las razones trigonométricas.

**Solución:**



$$\text{tg } \alpha = -0,5$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + (-0,5)^2 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = 1,1180$$

$$\cos \alpha = 0,8944$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = -0,4472$$

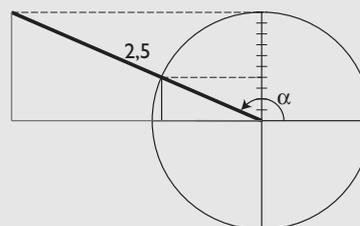
$$\text{cosec } \alpha = -2,2361$$

$$\text{cotg } \alpha = -2$$

**31** Si el ángulo  $\alpha$  está en el 2<sup>o</sup> cuadrante y tenemos  $\text{cosec } \alpha = 2,5$ , determina las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$

**Solución:**

$$\text{cosec } \alpha = 2,5 \Rightarrow \sin \alpha = 0,4$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$0,4^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0,9165$$

$$\sec \alpha = -1,0911$$

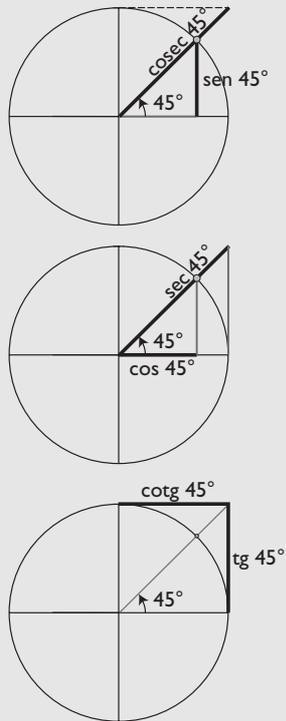
$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -0,4364$$

$$\text{cotg } \alpha = -2,2915$$

**32** Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de  $45^\circ$  y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

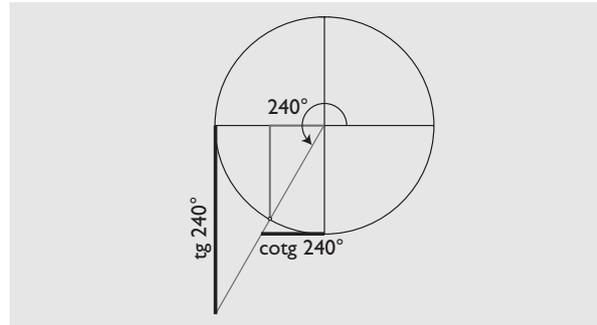
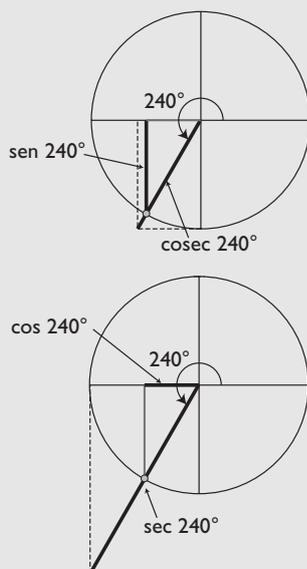
# Ejercicios y problemas

**Solución:**



**33** Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de  $240^\circ$  y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

**Solución:**



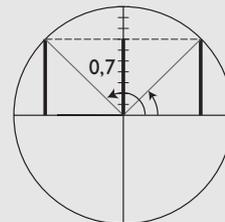
## 2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

**34** Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos que cumplan que:

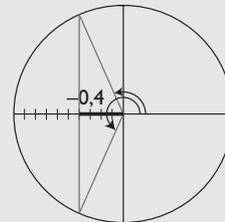
- a)  $\text{sen } \alpha = 0,7$       b)  $\text{cos } \alpha = -0,4$

**Solución:**

a)



b)

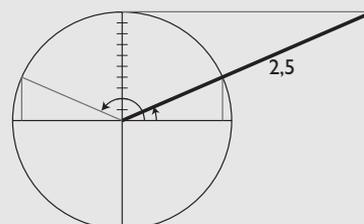


**35** Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

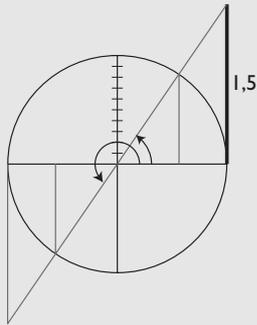
- a)  $\text{cosec } \alpha = 2,5$       b)  $\text{tg } \alpha = 1,5$

**Solución:**

a)  $\text{cosec } \alpha = 2,5$



b)  $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$



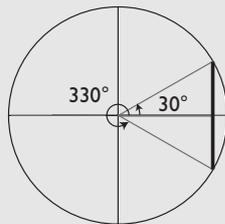
**36** Calcula, reduciendo al 1<sup>er</sup> cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a)  $\operatorname{sen} 330^\circ$                       b)  $\operatorname{cos} 210^\circ$

c)  $\operatorname{tg} 120^\circ$                          d)  $\operatorname{sen} 240^\circ$

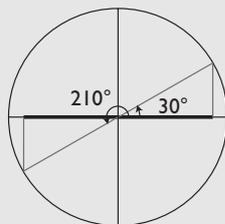
**Solución:**

a)



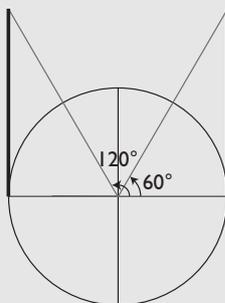
$$\operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

b)



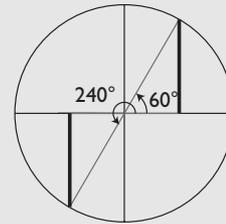
$$\operatorname{cos} 210^\circ = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)



$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

d)



$$\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**37** Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{cos}^3 \alpha + \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{cos} \alpha$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}^3 \alpha + \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha &= \\ &= \operatorname{cos}^3 \alpha + \operatorname{cos} \alpha \cdot (1 - \operatorname{cos}^2 \alpha) = \\ &= \operatorname{cos}^3 \alpha + \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos}^3 \alpha = \operatorname{cos} \alpha \end{aligned}$$

**38** Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \cdot (\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = 1 - \operatorname{tg} \alpha$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \cdot (\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha) &= \\ &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot (\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = 1 - \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

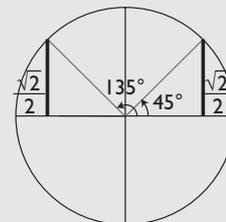
Resuelve las siguientes ecuaciones:

**39**  $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$

**Solución:**

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a)  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

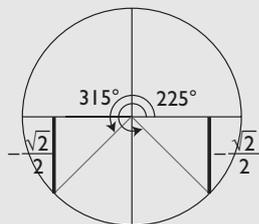


$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

# Ejercicios y problemas

b)  $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



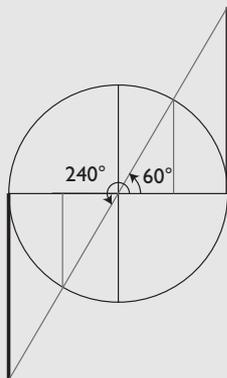
$x_3 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

40  $\text{tg } 2x = \sqrt{3}$

**Solución:**

Se considera la raíz positiva.



$2x_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$2x_2 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 120^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

41  $4 \text{sen } x = \text{cosec } x$

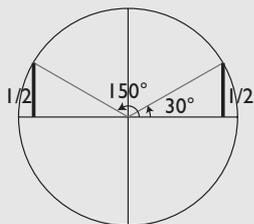
**Solución:**

$4 \text{sen } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

$4 \text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm 1/2$

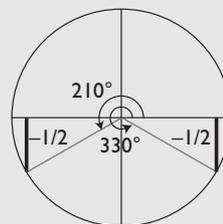
a)  $\text{sen } x = 1/2$



$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

b)  $\text{sen } x = -1/2$



$x_3 = 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

42  $2 \text{sen } x + 1 = 3 \text{cosec } x$

**Solución:**

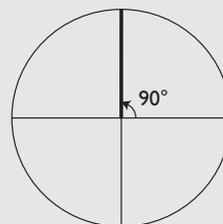
$2 \text{sen } x + 1 = \frac{3}{\text{sen } x}$

$2 \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 3 = 0$

$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$

$\text{sen } x = -3/2$  no tiene sentido, porque  $|\text{sen } x| \leq 1$

$\text{sen } x = 1$



$x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

43  $\text{sen } x = \cos^2 x + 1$

**Solución:**

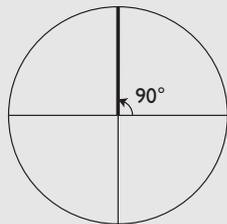
$\text{sen } x = 1 - \text{sen}^2 x + 1$

$\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2 = 0$

$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

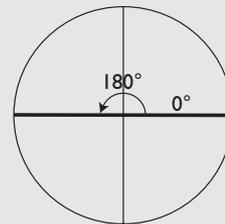
$\text{sen } x = -2$  no tiene sentido, porque  $|\text{sen } x| \leq 1$

$\text{sen } x = 1$



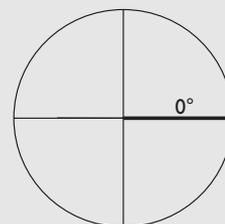
$$x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

a)  $\sin x = 0$



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} x = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos x = 1$



$$x_3 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

44  $\sin x \cdot \cos x = \sin x$

**Solución:**

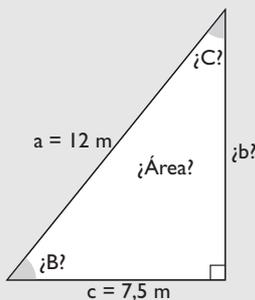
$$\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

### 3. Resolución de triángulos rectángulos

45 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa  $a = 12$  m y un cateto  $c = 7,5$  m. Calcula los demás elementos.

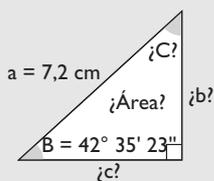
**Solución:**



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 12$ m $c = 7,5$ m	$b$	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$b = \sqrt{12^2 - 7,5^2} = 9,37$ m
	$B$	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{7,5}{12} \Rightarrow B = 51^\circ 19' 4''$
	$C$	$C = 90^\circ - B$	$C = 38^\circ 40' 56''$
	Área	Área = $\frac{1}{2} b \cdot c$	Área = $\frac{1}{2} \cdot 9,37 \cdot 7,5 = 35,14$ m <sup>2</sup>

46 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa  $a = 7,2$  cm y el ángulo  $B = 42^\circ 35' 23''$ . Calcula los demás elementos.

**Solución:**

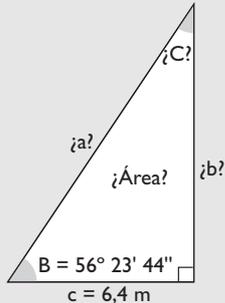


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,2$ cm $B = 42^\circ 35' 23''$	$C$	$C = 90^\circ - B$	$C = 47^\circ 24' 37''$
	$b$	$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sin B$	$b = 7,2 \sin 42^\circ 35' 23'' = 4,87$ cm
	$c$	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$	$c = 7,2 \cos 42^\circ 35' 23'' = 5,30$ cm
	Área	Área = $\frac{1}{2} b \cdot c$	Área = $\frac{1}{2} \cdot 4,87 \cdot 5,30 = 12,91$ cm <sup>2</sup>

# Ejercicios y problemas

- 47** En un triángulo rectángulo se conocen el cateto  $c = 6,4$  m y el ángulo contiguo  $B = 56^\circ 23' 44''$ . Calcula los demás elementos.

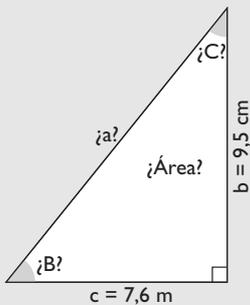
**Solución:**



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$c = 6,4$ m $B = 56^\circ 23' 44''$	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 33^\circ 36' 16''$
	a	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos B}$	$a = \frac{6,4}{\cos 56^\circ 23' 44''} = 11,56$ m
	b	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \operatorname{tg} B$	$b = 6,4 \operatorname{tg} 56^\circ 23' 44'' = 9,63$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9,63 \cdot 6,4 = 30,82$ m <sup>2</sup>

- 48** En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos  $b = 9,5$  cm y  $c = 7,6$  cm. Calcula los demás elementos.

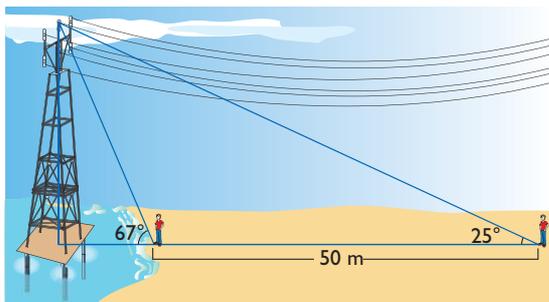
**Solución:**



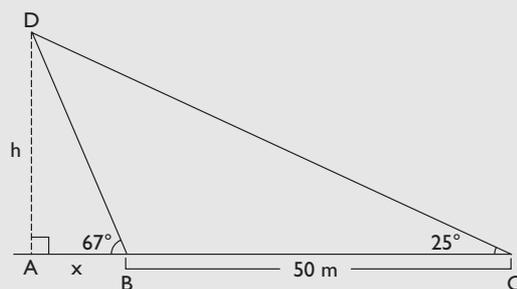
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9,5$ cm $c = 7,6$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$a = \sqrt{9,5^2 + 7,6^2} = 12,17$ cm
	B	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} B = \frac{9,5}{7,6} \Rightarrow B = 51^\circ 20' 25''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 38^\circ 39' 35''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9,5 \cdot 7,6 = 36,10$ cm <sup>2</sup>

## 4. Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes

- 49** Una torre de alta tensión está colocada dentro del mar sobre un soporte. Desde la orilla de la playa se mide el ángulo de elevación de la parte más alta y se obtiene  $67^\circ$ . Alejándose en la misma dirección 50 m, el nuevo ángulo de elevación es de  $25^\circ$ . Calcula la altura de la torre.



**Solución:**



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 67^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25^\circ &= \frac{h}{50 + x} \end{aligned} \right\}$$

$$x = 12,34 \text{ m}$$

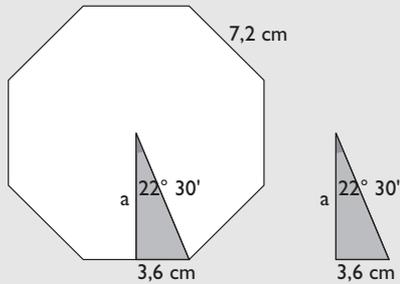
$$h = 29,07 \text{ m}$$

La torre de alta tensión mide 29,07 m de alto.

- 50** Calcula la apotema de un octógono regular en el que el lado mide 7,2 cm

**Solución:**

$$360^\circ : 16 = 22^\circ 30'$$

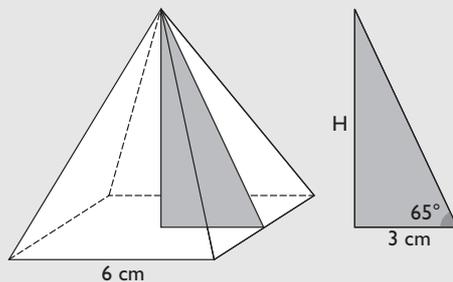


$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{3,6}{a}$$

$$a = 8,89 \text{ cm}$$

- 51** Calcula el volumen de una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 6 cm y el ángulo que forma la base con las caras laterales es de  $65^\circ$

**Solución:**



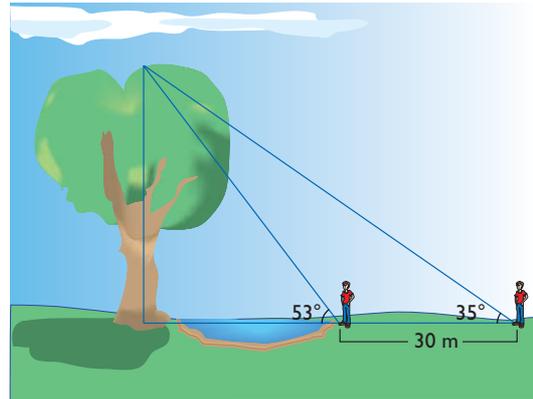
$$\operatorname{tg} 65^\circ = \frac{H}{3}$$

$$H = 6,43 \text{ cm}$$

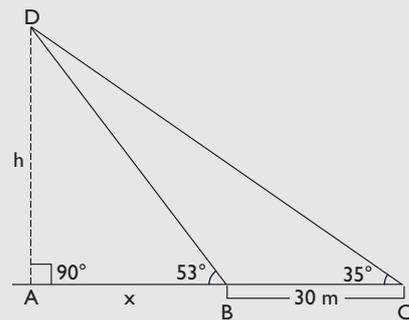
$$A_B = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6,43 = 77,16 \text{ cm}^3$$

- 52** Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtienen  $53^\circ$ . Alejándose 30 m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen  $35^\circ$ . Calcula la anchura del río.



**Solución:**



$$\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{30 + x}$$

$$x = 33,51 \text{ m}$$

$$h = 44,47 \text{ m}$$

El río mide de ancho 33,51 m

# Ejercicios y problemas

## Para ampliar

**53** Pasa los ángulos siguientes a radianes:

- a)  $120^\circ$                       b)  $135^\circ$   
c)  $240^\circ$                       d)  $300^\circ$

**Solución:**

- a)  $120^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$   
b)  $135^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$   
c)  $240^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$   
d)  $300^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$

**54** Pasa los ángulos siguientes a grados:

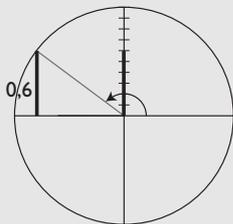
- a) 3,5 rad                      b) 3 rad  
c) 2,6 rad                      d) 0,4 rad

**Solución:**

- a)  $3,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 200^\circ 32' 7''$   
b)  $3 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 171^\circ 53' 14''$   
c)  $2,6 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 148^\circ 58' 9''$   
d)  $0,4 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 22^\circ 55' 6''$

**55** Calcula todas las razones trigonométricas de  $\alpha$  sabiendo que  $\text{sen } \alpha = 0,6$  y  $\alpha$  está en el 2º cuadrante.

**Solución:**

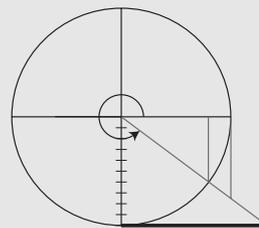


$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha &= 1 \\ 0,6^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha &= 1 \Rightarrow \text{cos } \alpha = -0,8 \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = -0,75 \\ \text{sec } \alpha &= -1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cosec } \alpha &= 1,67 \\ \text{cotg } \alpha &= -1,33 \end{aligned}$$

**56** Calcula todas las razones trigonométricas de  $\alpha$  sabiendo que  $\text{cotg } \alpha = -3/2$  y  $\alpha$  está en el 3º cuadrante.

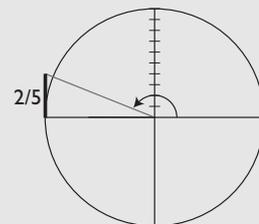
**Solución:**



$$\begin{aligned} 1 + \text{cotg}^2 \alpha &= \text{cosec}^2 \alpha \\ 1 + (-3/2)^2 &= \text{cosec}^2 \alpha \\ \text{cosec } \alpha &= -\frac{\sqrt{13}}{2} \\ \text{sen } \alpha &= -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \text{tg } \alpha &= -2/3 \\ \text{cotg } \alpha &= \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \text{cotg } \alpha \cdot \text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha &= -\frac{3}{2} \left( -\frac{2\sqrt{13}}{13} \right) = \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \text{sec } \alpha &= \frac{13}{3\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

**57** Calcula todas las razones trigonométricas de  $\alpha$  sabiendo que  $\text{tg } \alpha = -2/5$  y  $\alpha$  está en el 2º cuadrante.

**Solución:**



$$\begin{aligned} 1 + \text{tg}^2 \alpha &= \text{sec}^2 \alpha \\ 1 + (-2/5)^2 &= \text{sec}^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\sec \alpha = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

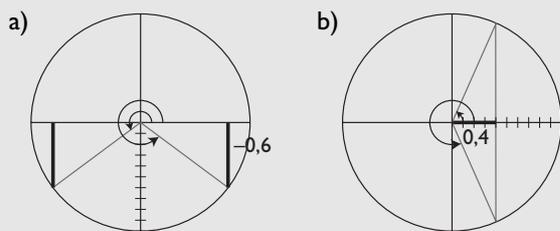
$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29} \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{29}{2\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

**58** Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

- a)  $\operatorname{sen} \alpha = -0,6$   
 b)  $\cos \alpha = 0,4$

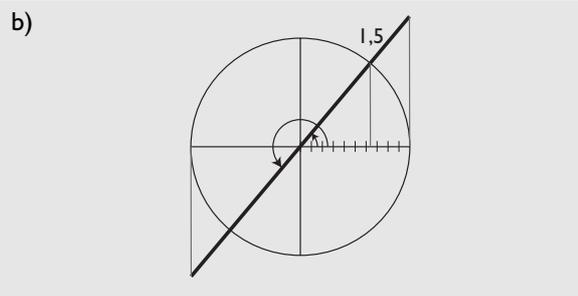
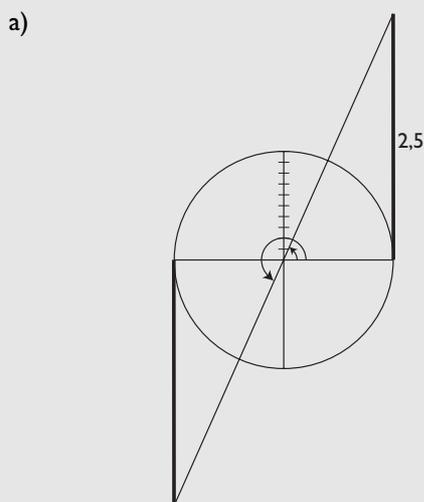
**Solución:**



**59** Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

- a)  $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$   
 b)  $\sec \alpha = 1,5$

**Solución:**

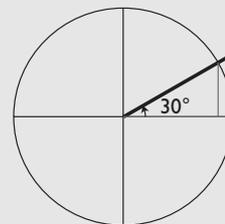


**60** Calcula, reduciendo al 1<sup>er</sup> cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

- a)  $\sec 3270^\circ$       b)  $\cos 3000^\circ$   
 c)  $\operatorname{tg} 2040^\circ$       d)  $\operatorname{sen} 2850^\circ$

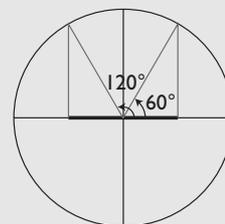
**Solución:**

a)  $3270^\circ = 30^\circ + 9 \cdot 360^\circ$



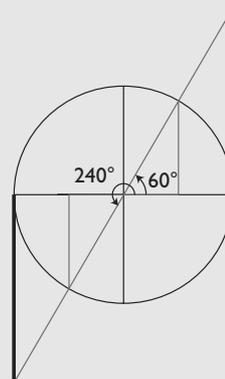
$$\sec 3270^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b)  $3000^\circ = 120^\circ + 8 \cdot 360^\circ$



$$\cos 3000^\circ = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$$

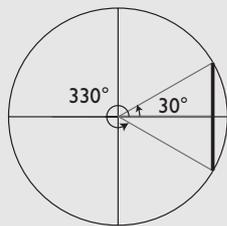
c)  $2040^\circ = 240^\circ + 5 \cdot 360^\circ$



$$\operatorname{tg} 2040^\circ = \operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = 3$$

# Ejercicios y problemas

d)  $2850^\circ = 330^\circ + 7 \cdot 360^\circ$



$\text{sen } 2850^\circ = \text{sen } 330^\circ = -1/2$

**61** Calcula las razones trigonométricas siguientes sabiendo que  $\text{sen } 15^\circ = 0,2588$ :

- a)  $\text{sen } 165^\circ$                       b)  $\text{sen } 195^\circ$   
 c)  $\text{sen } 345^\circ$                       d)  $\text{cos } 105^\circ$   
 e)  $\text{cos } 255^\circ$                       f)  $\text{cos } 285^\circ$

**Solución:**

- a)  $\text{sen } 165^\circ = \text{sen } (180^\circ - 15^\circ) = \text{sen } 15^\circ = 0,2588$   
 b)  $\text{sen } 195^\circ = \text{sen } (180^\circ + 15^\circ) = -\text{sen } 15^\circ = -0,2588$   
 c)  $\text{sen } 345^\circ = \text{sen } (360^\circ - 15^\circ) = -\text{sen } 15^\circ = -0,2588$   
 d)  $\text{cos } 105^\circ = \text{cos } (180^\circ - 75^\circ) = -\text{cos } 75^\circ = -\text{sen } 15^\circ = -0,2588$   
 e)  $\text{cos } 255^\circ = \text{cos } (180^\circ + 75^\circ) = -\text{cos } 75^\circ = -\text{sen } 15^\circ = -0,2588$   
 f)  $\text{cos } 285^\circ = \text{cos } (360^\circ - 75^\circ) = \text{cos } 75^\circ = \text{sen } 15^\circ = 0,2588$

**62** Sabiendo que  $\text{sen } \alpha = 0,4$  y  $\alpha$  es un ángulo del 1<sup>er</sup> cuadrante, calcula:

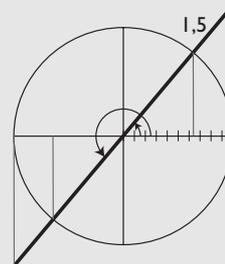
- a)  $\text{sen } (180^\circ - \alpha)$   
 b)  $\text{sen } (360^\circ - \alpha)$   
 c)  $\text{sen } (90^\circ + \alpha)$

**Solución:**

- a)  $\text{sen } (180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0,4$   
 b)  $\text{sen } (360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0,4$   
 c)  $\text{sen } (90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha$   
 Se calcula  $\text{cos } \alpha$   
 $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$   
 $0,4^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$   
 $\text{cos } \alpha = 0,9165$

**63** Dibuja en la circunferencia un ángulo  $\alpha$  tal que  $\text{sec } \alpha = 3/2$ . Calcula  $\text{cos}(\alpha + \pi)$

**Solución:**



$\text{cos}(\alpha + \pi) = -\text{cos } \alpha = -2/3$

**64** Demuestra la siguiente identidad:

$\text{tg } \alpha \cdot (\text{cos } \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha) = \text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha$

**Solución:**

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \cdot (\text{cos } \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha)$$

$$\text{sen } \alpha + \frac{1}{\text{cos } \alpha} - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sec } \alpha - \frac{1 - \text{cos}^2 \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sec } \alpha - \text{sec } \alpha + \text{cos } \alpha$$

$$\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha$$

**65** Demuestra la siguiente identidad:

$\frac{2 \text{tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha (1 + \text{tg}^2 \alpha)} = 2 \text{sen } \alpha$

**Solución:**

$$\frac{2 \text{tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha \text{sec}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} \cdot \frac{\text{cos } \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{sen}^2 \alpha \text{cos } \alpha}{\text{cos}^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha} =$$

$$= 2 \text{sen } \alpha$$

**66** Demuestra la siguiente identidad:

$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{1 - \text{sen } \alpha}$

**Solución:**

$$(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

**67** Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

**Solución:**

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

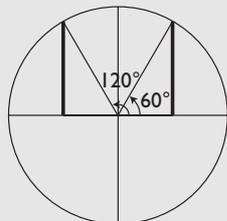
Resuelve las siguientes ecuaciones:

**68**  $\operatorname{sen}(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solución:**

$$\operatorname{sen}(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se toma la raíz positiva.



$$x_1 + 45^\circ = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = 15^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 + 45^\circ = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 75^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**69**  $\cos^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$

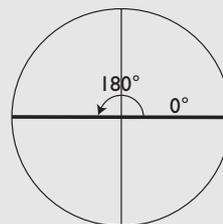
**Solución:**

$$\cos^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0$$



$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} x = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**70**  $3 \operatorname{tg} x = 2 \cos x$

**Solución:**

$$3 \operatorname{sen} x = 2 \cos^2 x$$

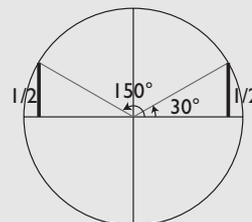
$$3 \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{array}{l} 1/2 \\ -2 \end{array}$$

La solución  $\operatorname{sen} x = -2$  no es válida.

$$\operatorname{sen} x = 1/2$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**71**  $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

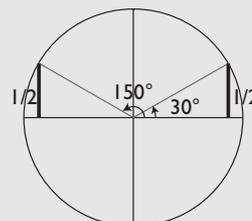
**Solución:**

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{array}{l} 1/2 \\ -1 \end{array}$$

a)  $\operatorname{sen} x = 1/2$

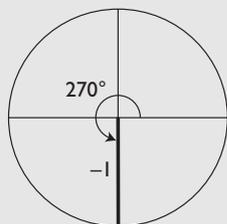


# Ejercicios y problemas

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\sin x = -1$



$$x_3 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**72**  $\sin^2 x - \cos^2 x = -1/2$

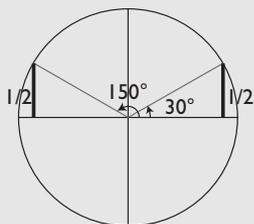
**Solución:**

$$\sin^2 x - 1 + \sin^2 x = -1/2$$

$$2 \sin^2 x = 1/2$$

$$\sin x = \pm 1/2$$

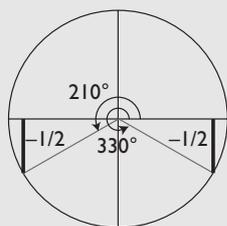
a)  $\sin x = 1/2$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\sin x = -1/2$



$$x_3 = 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**73**  $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$

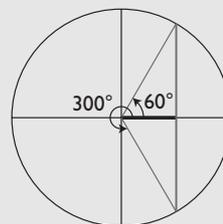
**Solución:**

$$\cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

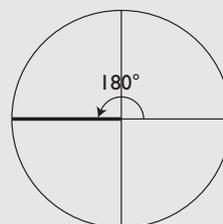
a)  $\cos x = 1/2$



$$x_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos x = -1$



$$x_3 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**74**  $\sin x \cdot \cos x = 2 \cos x$

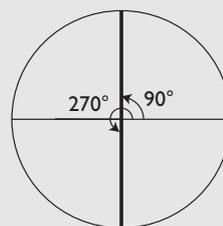
**Solución:**

$$\sin x \cdot \cos x - 2 \cos x = 0$$

$$\cos x (\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\sin x - 2 \neq 0 \text{ para todo valor de } x$$

$$\text{Si } \cos x = 0$$



$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \quad \left. \vphantom{x_1} \right\} x = 90^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**75**  $\operatorname{tg} x = 2 \sin x \cdot \cos x$

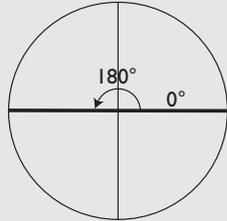
**Solución:**

$$\sin x = 2 \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$\sin x - 2 \sin x \cdot \cos^2 x = 0$$

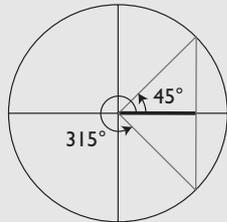
$$\text{sen } x(1 - 2 \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

a)  $\text{sen } x = 0$



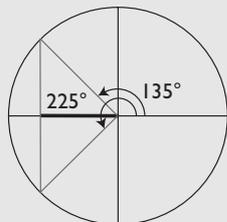
$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} x = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\begin{array}{l} x_3 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

c)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\begin{array}{l} x_5 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_6 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

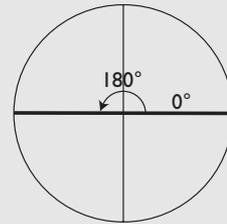
**76**  $\text{tg } x - \text{sen } x = 0$

**Solución:**

$$\text{sen } x - \text{sen } x \cos x = 0$$

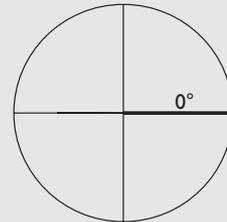
$$\text{sen } x(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = 1 \end{cases}$$

a)  $\text{sen } x = 0$



$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} x = 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos x = 1$



$$x_3 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Es la misma que una anterior.

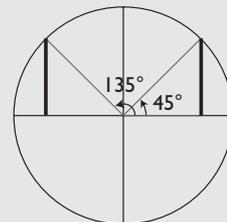
**77**  $\text{sen } x - \cos x = 0$

**Solución:**

$$\text{sen } x = \cos x$$

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1$$

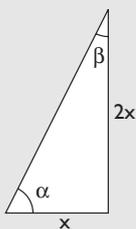
$$\text{tg } x = 1$$



**78** En un triángulo rectángulo un cateto mide el doble que el otro. Calcula la amplitud de sus ángulos agudos.

# Ejercicios y problemas

**Solución:**

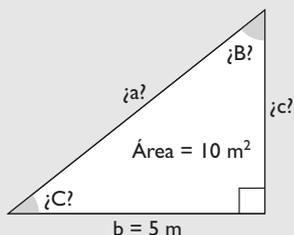


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 6''$$

$$\beta = 90^\circ - 63^\circ 33' 54'' = 26^\circ 33' 54''$$

- 79** En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 m, y el área, 10 m<sup>2</sup>. Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

**Solución:**



$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc$$

$$\frac{1}{2} 5c = 10$$

$$5c = 20$$

$$c = 4 \text{ m}$$

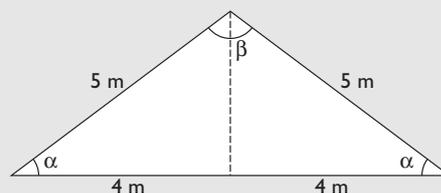
$$a = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6,40 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{5}{4} \Rightarrow B = 51^\circ 20' 25''$$

$$C = 90^\circ - 51^\circ 20' 25'' = 38^\circ 39' 35''$$

- 80** En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 5 m, y el desigual, 8 m. Halla la amplitud de sus ángulos.

**Solución:**



$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36^\circ 52' 12''$$

$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ 52' 12'' = 106^\circ 15' 36''$$

## Con calculadora

- 81** Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

- sen  $\alpha = 0,4$  estando  $\alpha$  en el 1<sup>er</sup> cuadrante.
- cos  $\alpha = -0,65$  estando  $\alpha$  en el 2<sup>o</sup> cuadrante.
- tg  $\alpha = 1,4$  estando  $\alpha$  en el 3<sup>er</sup> cuadrante.
- cos  $\alpha = 0,8$  estando  $\alpha$  en el 4<sup>o</sup> cuadrante.

**Solución:**

- 23° 34' 41''
- 130° 32' 30''
- 234° 27' 44''
- 323° 7' 48''

- 82** Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

- cos  $\alpha = 0,2$  estando  $\alpha$  en el 1<sup>er</sup> cuadrante.
- tg  $\alpha = -1,6$  estando  $\alpha$  en el 2<sup>o</sup> cuadrante.
- sen  $\alpha = -0,7$  estando  $\alpha$  en el 3<sup>er</sup> cuadrante.
- tg  $\alpha = -0,5$  estando  $\alpha$  en el 4<sup>o</sup> cuadrante.

**Solución:**

- 78° 27' 47''
- 122° 19''
- 224° 25' 37''
- 333° 26' 6''

**83** Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

- a)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$  estando  $\alpha$  en el 1<sup>er</sup> cuadrante.
- b)  $\operatorname{sen} \alpha = 0,9$  estando  $\alpha$  en el 2<sup>o</sup> cuadrante.
- c)  $\operatorname{cos} \alpha = -0,4$  estando  $\alpha$  en el 3<sup>er</sup> cuadrante.
- d)  $\operatorname{sen} \alpha = -0,3$  estando  $\alpha$  en el 4<sup>o</sup> cuadrante.

**Solución:**

- a)  $63^\circ 26' 6''$
- b)  $115^\circ 50' 31''$
- c)  $246^\circ 25' 19''$
- d)  $342^\circ 32' 33''$

## Problemas

**84** Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de  $80^\circ$  en una circunferencia de 20 cm de radio.

**Solución:**

$$\frac{20\pi}{180^\circ} \cdot 80^\circ = 27,93 \text{ cm}$$

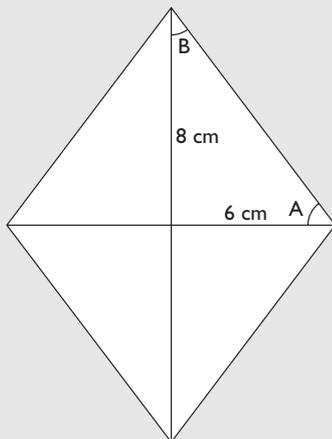
**85** En una circunferencia de 8 cm de radio, el arco correspondiente a un ángulo central mide 32 cm. Calcula en radianes lo que mide dicho ángulo.

**Solución:**

$$\frac{32}{8} = 4 \text{ rad}$$

**86** Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. Calcula los ángulos del rombo.

**Solución:**



$$\operatorname{tg} A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$A = 53^\circ 7' 48''$$

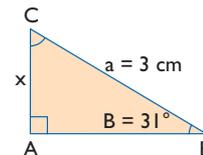
$$B = 90^\circ - 53^\circ 7' 48'' = 36^\circ 52' 12''$$

Los ángulos del rombo son:

$$2A = 106^\circ 15' 37''$$

$$2B = 73^\circ 44' 24''$$

**87** Halla el valor de  $x$  en el siguiente triángulo rectángulo:

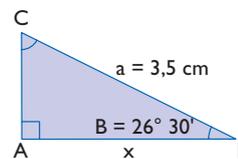


**Solución:**

$$\operatorname{sen} 31^\circ = \frac{x}{3}$$

$$x = 3 \cdot \operatorname{sen} 31^\circ = 1,55 \text{ cm}$$

**88** Halla el valor de  $x$  en el siguiente triángulo rectángulo:



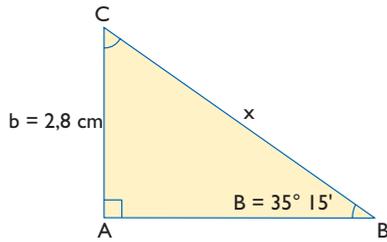
**Solución:**

$$\operatorname{cos} 26^\circ 30' = \frac{x}{3,5}$$

$$x = 3,5 \cdot \operatorname{cos} 26^\circ 30' = 2,81 \text{ cm}$$

**89** Halla el valor de  $x$  en el siguiente triángulo rectángulo:

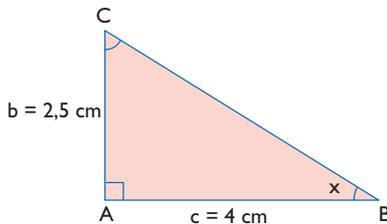
# Ejercicios y problemas



**Solución:**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 35^\circ 15' &= \frac{2,8}{x} \\ x &= \frac{2,8}{\operatorname{sen} 35^\circ 15'} = 4,85 \text{ cm} \end{aligned}$$

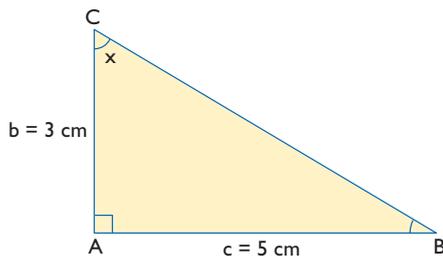
- 90** Halla el valor de  $x$  en el siguiente triángulo rectángulo:



**Solución:**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{2,5}{4} \\ x &= 32^\circ 19'' \end{aligned}$$

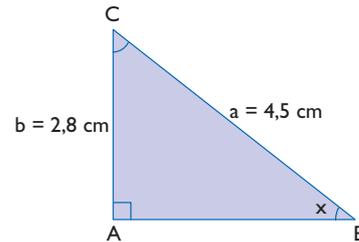
- 91** Halla el valor de  $x$  en el siguiente triángulo rectángulo:



**Solución:**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{5}{3} \\ x &= 59^\circ 2' 10'' \end{aligned}$$

- 92** Halla el valor de  $x$  en el siguiente triángulo rectángulo:

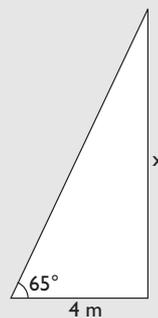


**Solución:**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2,8}{4,5} \\ x &= 38^\circ 28' 43'' \end{aligned}$$

- 93** El extremo de una escalera está apoyado sobre la pared de un edificio, y su base se encuentra a 4 m de la pared. Si el ángulo que forma la escalera con la pared es de  $65^\circ$ , ¿a qué altura del suelo llega la escalera?

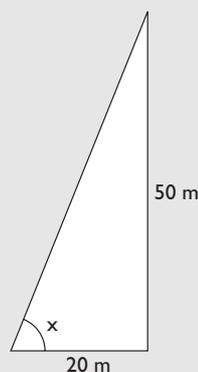
**Solución:**



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 65^\circ &= \frac{x}{4} \\ x &= 4 \operatorname{tg} 65^\circ = 8,58 \text{ m} \end{aligned}$$

- 94** Una torre de 50 m de altura proyecta un sombra de 20 m a cierta hora del día. Calcula el ángulo con el que se verá el extremo superior de la torre desde el extremo de la sombra.

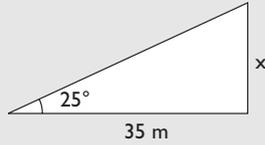
**Solución:**



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{50}{20} \\ \operatorname{tg} x &= 2,5 \\ x &= 68^\circ 11' 55'' \end{aligned}$$

- 95** A una distancia de 35 m del pie de una chimenea se ve el extremo de la misma con un ángulo de  $25^\circ$ . Calcula la altura de la chimenea.

**Solución:**

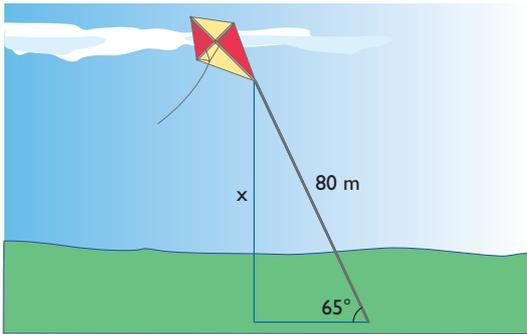


$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{x}{35}$$

$$x = 35 \operatorname{tg} 25^\circ$$

$$x = 16,32 \text{ m}$$

- 96** Una cometa está sujeta al suelo con una cuerda de 80 m de largo y ésta forma con el suelo un ángulo de  $65^\circ$ . Si la cuerda está recta, ¿a qué altura del suelo está la cometa?



**Solución:**

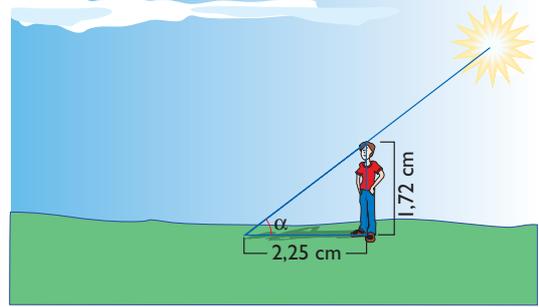


$$\operatorname{sen} 65^\circ = \frac{x}{80}$$

$$x = 80 \operatorname{sen} 65^\circ$$

$$x = 72,50 \text{ m}$$

- 97** Una persona que mide 1,72 cm proyecta una sombra de 2,25 cm. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?

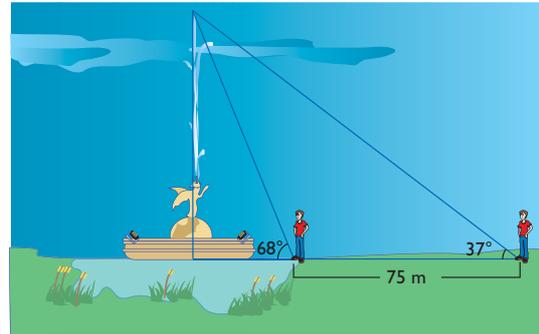


**Solución:**

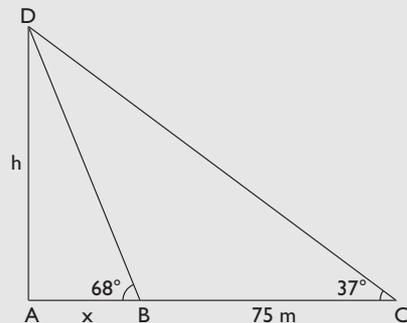
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,72}{2,25}$$

$$\alpha = 37^\circ 23' 45''$$

- 98** En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen  $68^\circ$ ; alejándose 75 m del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen  $37^\circ$ . Calcula la altura del chorro de agua.



**Solución:**



$$\operatorname{tg} 68^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{h}{x + 75}$$

# Ejercicios y problemas

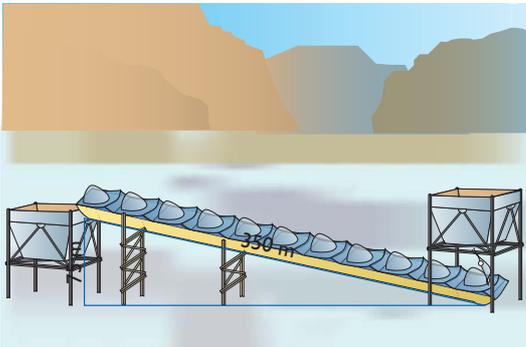
$$\left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 68^\circ \\ h &= (x + 75) \operatorname{tg} 37^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 2,48x \\ h &= 0,75(x + 75) \end{aligned} \right\}$$

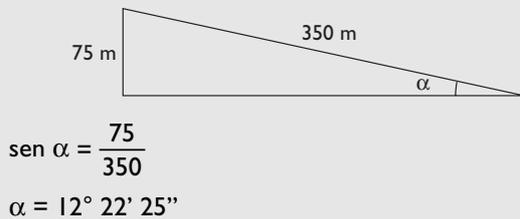
$$x = 32,51 \text{ m}$$

$$h = 80,64 \text{ m}$$

- 99** Una cinta transportadora de sacos de cemento mide 350 m y se quiere que eleve el cemento a 75 m de altura. ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?

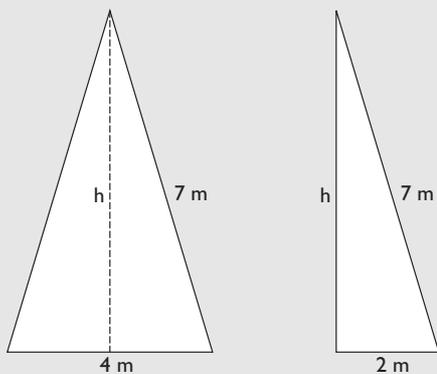


**Solución:**



- 100** Dado un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7 m, y el desigual, 4 m, calcula la altura relativa al lado desigual.

**Solución:**

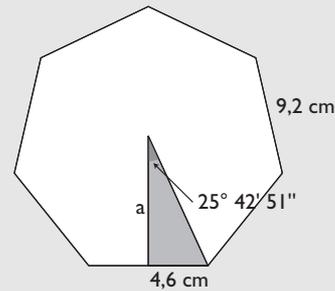


$$h = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 6,71 \text{ m}$$

- 101** Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9,2 cm

**Solución:**

$$360^\circ : 14 = 25^\circ 42' 51''$$

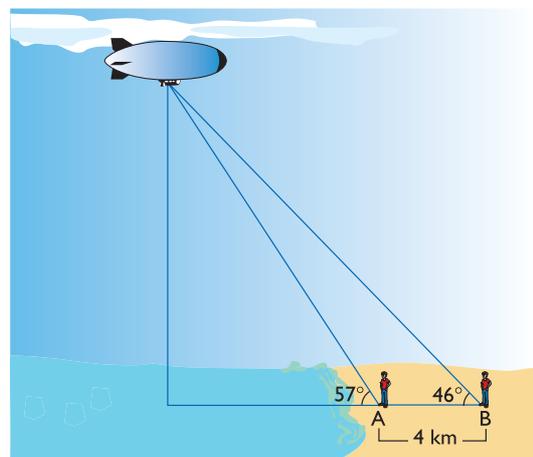


$$\operatorname{tg} 25^\circ 42' 51'' = \frac{4,6}{a}$$

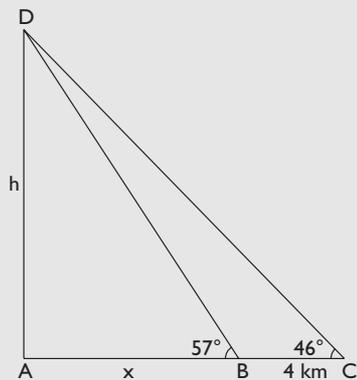
$$a = 9,55 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 9,2 \cdot 9,55}{2} = 307,51 \text{ cm}^2$$

- 102** Dos personas están en una playa y ven un globo desde los puntos A y B, respectivamente, de forma que las dos personas y el globo están en un plano perpendicular al suelo. La distancia entre las dos personas es de 4 km. El ángulo de elevación del globo desde el punto A es de  $57^\circ$ , y desde el punto B, de  $46^\circ$ . Calcula la altura a la que se encuentra el globo.



**Solución:**



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 57^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 46^\circ &= \frac{h}{x+4} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 57^\circ \\ h &= (x+4) \operatorname{tg} 46^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 1,54x \\ h &= 1,04(x+4) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} x &= 8,32 \text{ km} \\ h &= 12,81 \text{ km} \end{aligned}$$

**Para profundizar**

**103** Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = 2 \sec \alpha$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} &= \\ &= \frac{(1 + \operatorname{sen} \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\ &= \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\ &= \frac{2 + 2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\ &= \frac{2(1 + \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \\ &= \frac{2}{\cos \alpha} = 2 \sec \alpha \end{aligned}$$

**104** Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{cotg} x = 4$$

**Solución:**

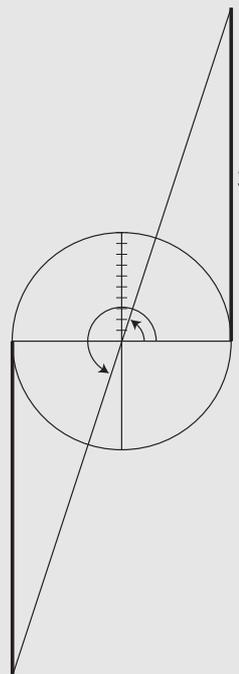
$$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 4 \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

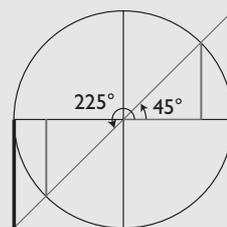
a)  $\operatorname{tg} x = 3$



$$x_1 = 71^\circ 33' 54'' + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 251^\circ 33' 54'' + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $\operatorname{tg} x = 1$



$$x_3 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \quad \left. \vphantom{x_3} \right\} x = 45^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

**105** Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{tg} x \cdot \sec x = \sqrt{2}$$

**Solución:**

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$

# Ejercicios y problemas

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{2} \cos^2 x$$

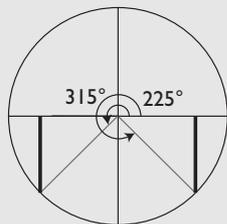
$$\operatorname{sen} x = \sqrt{2} (1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$\sqrt{2} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = \sqrt{2}$  no tiene sentido porque  $|\operatorname{sen} x| \leq 1$

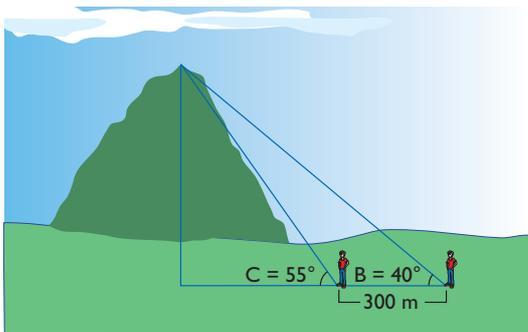
$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



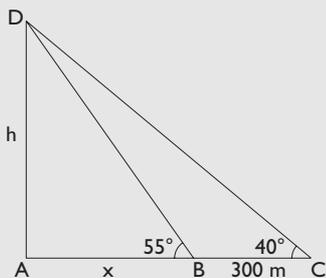
$$x_1 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

- 106** En una llanura, desde un punto cualquiera se mide el ángulo B de elevación de una montaña y se obtiene  $40^\circ$ . Acercándose a la montaña una distancia de 300 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene  $55^\circ$ . Calcula la altura de la montaña.



**Solución:**



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 55^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 40^\circ &= \frac{h}{x+300} \end{aligned} \right\}$$

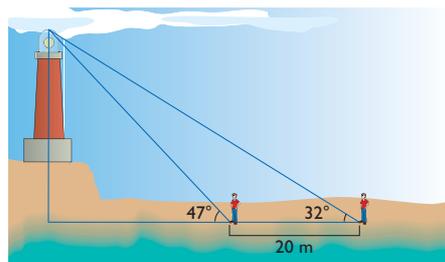
$$\left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 55^\circ \\ h &= (x+300) \operatorname{tg} 40^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 1,43x \\ h &= 0,84(x+300) \end{aligned} \right\}$$

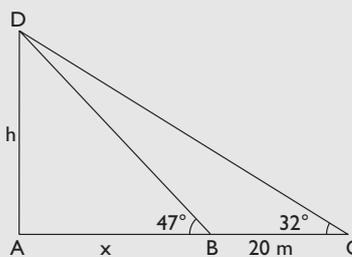
$$x = 427,12 \text{ m}$$

$$h = 610,78 \text{ m}$$

- 107** Un faro está colocado sobre un montículo. Al lado del montículo hay una pequeña llanura y desde ella se mide el ángulo de elevación del punto más alto del faro y se obtiene  $47^\circ$ . Nos alejamos en la misma dirección 20 m, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene  $32^\circ$ . Calcula la altura del faro más el montículo.



**Solución:**



$$\left. \operatorname{tg} 47^\circ = \frac{h}{x} \right\}$$

$$\left. \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{h}{x+20} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 47^\circ \\ h &= (x+20) \operatorname{tg} 32^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 1,07x \\ h &= 0,62(x+20) \end{aligned} \right\}$$

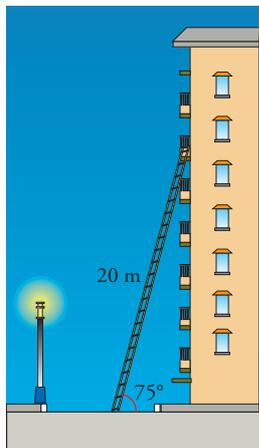
$$x = 27,56 \text{ m}$$

$$h = 29,49 \text{ m}$$

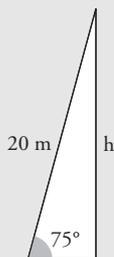
# Aplica tus competencias

## Cálculo de alturas

- 108** Una escalera de bomberos que mide 20 m de longitud se apoya sobre una fachada. El ángulo que forma el suelo con la escalera es de  $75^\circ$ . ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la fachada?



### Solución:



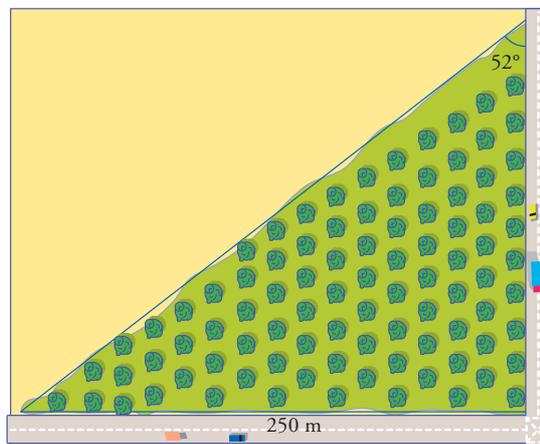
$$\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{h}{20}$$

$$h = 20 \cdot \operatorname{sen} 75^\circ$$

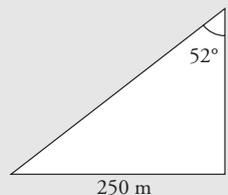
$$h = 19,32 \text{ m}$$

## Cálculo de áreas

- 109** Una finca tiene forma de triángulo rectángulo. Uno de los catetos mide 250 m, y el ángulo opuesto,  $52^\circ$ . Calcula el área de la finca.



### Solución:



$$\operatorname{tg} 52^\circ = \frac{250}{c}$$

$$c = 195,32 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 195,32$$

$$\text{Área} = 24\,415 \text{ m}^2$$

# Comprueba lo que sabes

- 1** Define qué es una identidad trigonométrica y pon un ejemplo.

**Solución:**

Una identidad trigonométrica es una igualdad que se verifica para cualquier valor de la variable.

**Ejemplo:**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

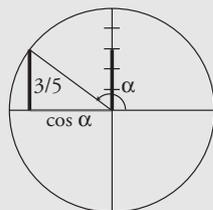
- 2** Un ángulo mide 1,23 rad. ¿Cuántos grados son?

**Solución:**

$$1,23 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 70^\circ 28' 26''$$

- 3** Sabiendo que  $\sin \alpha = 3/5$  y que el ángulo está en el 2º cuadrante, halla el valor del  $\cos \alpha$

**Solución:**



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

- 4** Calcula el ángulo  $\alpha$  en los siguientes casos:

- $\sin \alpha = 0,5678$  y el ángulo está en el 2º cuadrante.
- $\cos \alpha = -0,4321$  y el ángulo está en el 3º cuadrante.
- $\text{tg } \alpha = -1,2345$  y el ángulo está en el 4º cuadrante.

**Solución:**

a)  $\alpha = 145^\circ 24' 11''$

b)  $\alpha = 244^\circ 23' 57''$

c)  $\alpha = 309^\circ 32''$

- 5** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

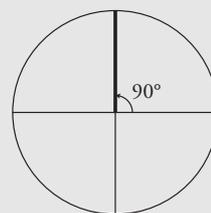
$$\sin^2 x + 2 = \cos^2 x + 3 \sin x$$

**Solución:**

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

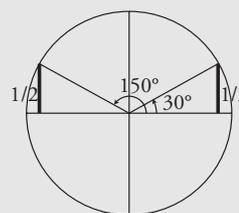
$$\sin x = 1, \sin x = 1/2$$

a)  $\sin x = 1$



$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

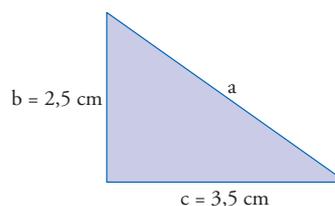
b)  $\sin x = 1/2$



$$x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

- 6** Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



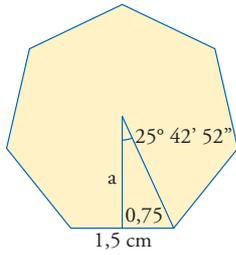
**Solución:**

$$\text{tg } \alpha = \frac{2,5}{3,5} \Rightarrow \alpha = 35^\circ 32' 16''$$

$$\beta = 90^\circ - 35^\circ 32' 16'' = 54^\circ 27' 44''$$

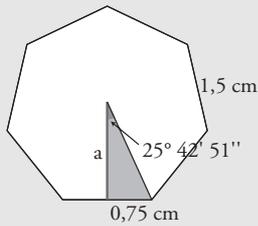
$$a^2 = 2,5^2 + 3,5^2 \Rightarrow a = 4,30 \text{ cm}$$

- 7** Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 1,5 cm



**Solución:**

$$360^\circ : 14 = 25^\circ 42' 51''$$



$$\operatorname{tg} 25^\circ 42' 51'' = \frac{0,75}{a}$$

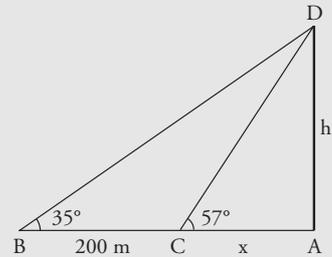
$$a = 1,56 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 1,5 \cdot 1,57}{2} = 8,24 \text{ cm}^2$$

- 8** En la llanura, desde un punto cualquiera, se mide el ángulo B de elevación de una montaña y se obtiene  $35^\circ$ . Acercándose a la montaña una dis-

tancia de 200 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene  $57^\circ$ . ¿Cuánto mide de alto la montaña?

**Solución:**



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 57^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{x + 200} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 57^\circ \\ h &= (x + 200) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 1,54 x \\ h &= (x + 200) 0,7 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 166,67 \text{ m}$$

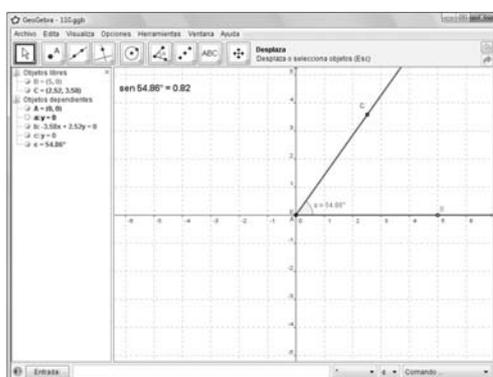
$$h = 256,67 \text{ m}$$

La montaña mide 256,67 m de alto.



## Paso a paso

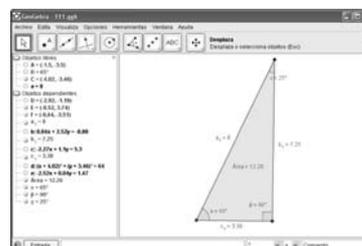
**110** Estudia el signo de la razón trigonométrica seno en cada cuadrante.



### Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

**111** Dibuja un triángulo rectángulo en el que se conocen la hipotenusa  $a = 8$  cm y el ángulo  $B = 65^\circ$ . Calcula todos sus elementos.



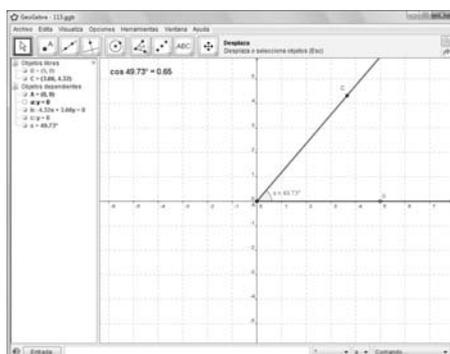
### Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

**112** Internet. Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige Matemáticas, curso y tema.

## Practica

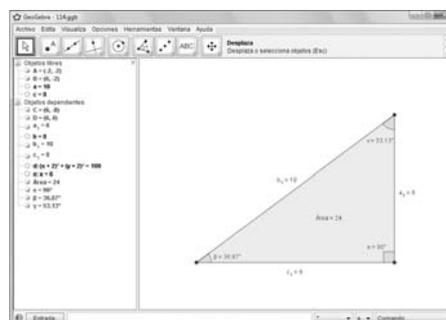
**113** Estudia el signo de la razón trigonométrica coseno en cada cuadrante.



### Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

**114** Dibuja un triángulo rectángulo en el que se conocen la hipotenusa  $a = 10$  cm y  $c = 8$  cm. Calcula todos sus elementos.



### Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

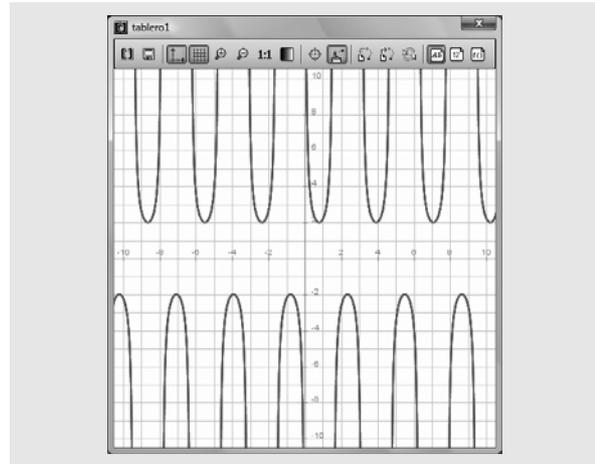
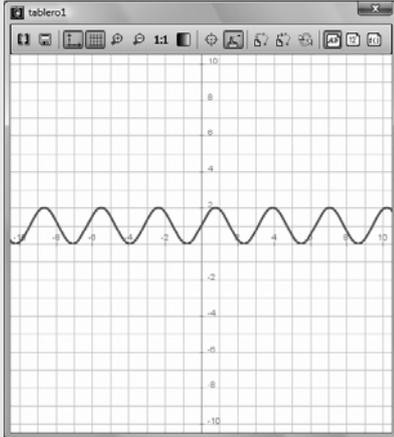
Demuestra las siguientes identidades; primero dibuja el 1<sup>er</sup> miembro, y luego, el 2<sup>o</sup>

**115**  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$

**Solución:**

Ejercicio 115

dibujar  $(\cos(x) + \sin(x))^2$ , {color = azul, anchura\_linea=2}  
 dibujar  $1 + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ , {color = rojo, anchura\_linea=2}



**116**  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \operatorname{cosec} x$

**Solución:**

Ejercicio 116

dibujar  $\tan(x) + \cot(x)$ , {color = azul, anchura\_linea=2}  
 dibujar  $\sec(x) \cdot \csc(x)$ , {color = rojo, anchura\_linea=2}

Resuelve las siguientes ecuaciones:

**117**  $3\sin x - 2\cos^2 x = 0$

**Solución:**

Ejercicio 117

resolver  $3 \cdot \sin(x) - 2 \cdot (\cos(x))^2 = 0 \Rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{\pi}{6} \right\}, \left\{ x = \frac{5 \cdot \pi}{6} \right\} \right\}$

**118**  $\sin x \cdot \cos x = 0$

**Solución:**

Ejercicio 118

resolver  $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \{x=0\}, \{x=-\pi\}, \{x=\pi\}, \left\{ x = \frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ x = -\frac{\pi}{2} \right\} \right\}$