

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Utilizando identidades notables, desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^2$	e) $(3x-5)^2$	i) $(3x-2)^2$	m) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
b) $(x-2)^2$	f) $(3x+2)(3x-2)$	j) $(2x+5)(2x-5)$	n) $(x+\sqrt{2})^2$
c) $(x+2)(x-2)$	g) $(ax+1)^2$	k) $(-1+2x)^2$	o) $(x^2+x+2)^2$
d) $(2x+3)^2$	h) $(ax-b)^2$	l) $(-2-x)^2$	

2. a) Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. b) Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Fíjate en el 1^{er} ejemplo):

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$	g) $9-x^2$	m) $x^2+10x+25$	s) x^2-6x+9
b) x^2-4x+4	h) $x^2+2ax+a^2$	n) x^2-2	t) x^2-25
c) x^2-1	i) $3x^2+6x+3$	o) $4x^2-9$	u) $25x^2-16$
d) x^2+6x+9	j) x^2-a^2	p) $a^2x^2-2ax+1$	
e) $x^2-8x+16$	k) $a^2x^2-b^2$	q) x^4-16	
f) x^2-4	l) x^2-16	r) $4x^2+4x+1$	

4. Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$	$\left(Soluc : \frac{x-1}{x+1} \right)$	f) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy}$	$\left(Soluc : 1 - \frac{y}{x} \right)$
b) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$	$\left(Soluc : 1 + \frac{4}{x} \right)$	g) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$	$\left(Soluc : \frac{x+2}{x-2} \right)$
c) $\frac{2x+4}{2x-4}$	$\left(Soluc : \frac{x+2}{x-2} \right)$	h) $\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$	$\left(Soluc : \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1} \right)$
d) $\frac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$	$\left(Soluc : \frac{2x-2}{3x+3} \right)$	i) $\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$	$\left(Soluc : \frac{x-a}{x+a} \right)$
e) $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$	$\left(Soluc : \frac{x+a}{m} \right)$	j) $\frac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$	$\left(Soluc : \frac{ax-1}{ax+1} \right)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x-1}{2x^2-3x+1}$ c) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ d) $\frac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$ e) $\frac{x+2}{x^2-1}$ f) $\frac{x^2+x-2}{x+2}$ g) $\frac{2x-2}{x^2+x-2}$	$\left(\text{Soluc : } \frac{1}{x+3} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{1}{2x-1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x+3}{x+2} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x+1}{5x+9} \right)$ $(\text{Soluc : irreducible})$ $(\text{Soluc : } x-1)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2}{x+2} \right)$	h) $\frac{x-3}{x^2+5x+6}$ i) $\frac{x-1}{5x^2+4x-9}$ j) $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ k) $\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}$ l) $\frac{x^2-a^2-a}{x^2-a^2}$	$(\text{Soluc : irreducible})$ $\left(\text{Soluc : } \frac{1}{5x+9} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x^2+x+1}{x+1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2x+3}{x+2} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x+a+1}{x+a} \right)$
--	---	---	--

6. Averiguar, **factorizando** previamente numerador y denominador, si es posible simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ c) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$ d) $\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1}$ e) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$ f) $\frac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$ g) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6}$ h) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$ i) $\frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$ j) $\frac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4}$	$\left(\text{Soluc : } \frac{x-1}{x+1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x-1}{x+1} \right)$ $(\text{Soluc : irreducible})$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2x-1}{2x+1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x-3}{x+1} \right)$ $(\text{Soluc : irreducible})$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} \right)$ $(\text{Soluc : } x-1)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2x-1}{2x+1} \right)$ $(\text{Soluc : irreducible})$	k) $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6}$ l) $\frac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ m) $\frac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8}$ n) $\frac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1}$ o) $\frac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1}$ p) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12}$ q) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ r) $\frac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4}$ s) $\frac{x^2-4}{x^3-7x-6}$	$\left(\text{Soluc : } \frac{x-3}{x+3} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{4x-1}{x+1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+4} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2x+2}{x-1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x+1}{x-1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x^2-1}{x^2+4} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{1}{x-1} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{2x+1}{x+2} \right)$ $\left(\text{Soluc : } \frac{x-2}{x^2-2x-3} \right)$
--	---	---	---

7. Efectuar las siguientes sumas y restas reduciendo previamente a común denominador y dando el resultado simplificado (NOTA: Con un * se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

a) $\frac{3}{2x+4} + \frac{2x}{x^2-4}$	$\left(\text{Soluc : } \frac{7x-6}{2x^2-8} \right)$	b) $\frac{x^2-1}{x^3} - \frac{2x}{x^2+7}$	$\left(\text{Soluc : } \frac{-x^4+6x^2-7}{x^5+7x^3} \right)$
---	--	--	---

c) $\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - x - 2}$ d) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}$ e) $\frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{x+1}{4x^2 - 8}$ f) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$ * g) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1}$ h) $1 - \frac{x}{y}$ i) $x - \frac{x^2 - 1}{x}$ j) $\frac{3x-2}{x^2 - 1} + \frac{x+2}{x-1}$ k) $\frac{7x}{6x+12} - \frac{x+5}{2x^2 - 8}$ l) $\frac{x+3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x-3}$ m) $\frac{3x}{x^2 - 1} - \frac{x+2}{x+1}$ n) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x^2 - 1}$ o) $\frac{x+2y}{x^2 - y^2} + \frac{2x-5y}{x-y}$ p) $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz}$ q) $x + \frac{1}{x}$	$\left(Soluc : \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{2x^2 + 8}{x^2 - 4} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 + 11x + 2}{4x^2 - 16} \right)$ $\left(Soluc : \frac{4x}{x^2 - 1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{2}{x+1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{y-x}{y} \right)$ $\left(Soluc : \frac{1}{x} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 + 6x}{x^2 - 1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{7x^2 - 17x - 15}{6x^2 - 24} \right)$ $\left(Soluc : \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 9}{x^3 - 3x^2 + x - 3} \right)$ $\left(Soluc : \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{2x^2 - 5y^2 - 3xy + x + 2y}{x^2 - y^2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x-z}{xz} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 + 1}{x} \right)$	r) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ * s) $\frac{1}{x-2} - \frac{x^2 + 4x + 8}{(x+2)^2(x-2)} + \frac{1}{x^2 - 4}$ * t) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{6x - x^2}{x^2 - 4}$ * u) $\frac{1}{x-1} - \frac{3x + 3}{x^2 + x - 2} + \frac{1}{x+2}$ v) $\frac{x-1}{x^2 - 4} - \frac{x-2}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x-2}$ * w) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} - \frac{12}{x^2 - 4}$ x) $\frac{x-2}{x^2 + x - 2} - \frac{x+1}{x^2 - 4} + \frac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$ y) $\frac{x^2 - x + 9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x}$ z) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-1} - \frac{1-x}{x^2 - 1}$ α) $\frac{4}{x+1} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x+1}{x-1}$ β) $\frac{3}{2x-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{x+10}{2x^2 - 8}$ * γ) $\frac{x-x^2}{1-x^2} + \frac{1+x}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1-2x}{1+x}$ δ) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{2x+1}{x^2 - 1} + \frac{x}{(x+1)^2}$ ε) $\frac{1}{x^2 - 9x + 20} - \frac{1}{x^2 - 11x + 30} + \frac{1}{x^2 - 10x + 24}$	$\left(Soluc : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{1}{x^2 + 4x + 4} \right)$ $\left(Soluc : \frac{1}{x-2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{1}{1-x} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 + 5x - 4}{x^3 - 4x} \right)$ $\left(Soluc : \frac{2x+3}{x+2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 + x + 11}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \right)$ $\left(Soluc : \frac{1}{x+3} \right)$ $\left(Soluc : \frac{5x^2 + 7x}{x^2 - 1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^4 - 1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{2}{x+2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{3x}{x+1} \right)$ $\left(Soluc : \frac{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^4 + x^3 - x^2 - x} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x-7}{x^3 - 15x^2 + 24x - 120} \right)$
--	---	---	---

8. Efectuar los siguientes productos y cocientes, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{3x-1}{x^2 - 9} \cdot \frac{x+3}{2x}$ b) $\frac{x+1}{x^2 - 2} : \frac{x^2 + 2}{x-1}$ c) $\frac{x+1}{\frac{x+2}{\frac{x+1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+3}}$ d) $\frac{\frac{3x+1}{x^2 - 4}}{\frac{x}{x^2 - 4x + 4}} =$ e) $\frac{3x-1}{x^2} \cdot \frac{x+1}{x^5}$	$\left(Soluc : \frac{3x-1}{2x^2 - 6x} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x^2 - 1}{x^4 - 4} \right)$ $\left(Soluc : \frac{x+3}{x+2} \right)$ $\left(Soluc : \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 2x} \right)$ $\left(Soluc : \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^7} \right)$	f) $\frac{\frac{x+1}{x^2 - 2}}{\frac{x-1}{x^2 + 2}} =$ g) $\frac{\frac{x-1}{x^2 - 1}}{\frac{x+1}{x^2 + 2x + 1}} =$ h) $\frac{\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a}}{\frac{x-a}{x+a}} =$ i) $\frac{\frac{9}{3} \frac{x+2y}{3} + 6z}{3} =$ j) $\frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{x-\frac{x}{3}}} =$	$\left(Soluc : \frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^3 - x^2 - 2x + 2} \right)$ $(Soluc : 1)$ $(Soluc : x^2 - 2ax + a^2)$ $(Soluc : x+2y+2z)$ $(Soluc : 1/2)$
--	--	--	--

k) $\frac{A}{B}(1-B) + A =$

(Soluc : A/B)

l) $\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} =$
 $\frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$

(Soluc : $\frac{x+1}{5x}$)

m) $\frac{\frac{2}{a} - 1}{\frac{2}{a}} =$
 $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{a}}$

(Soluc : $a - 2$)

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas con F.A. y simplificar:

a) $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1}\right) =$
 $\left(Soluc : \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{x-1}{x+1} =$
 $\left(Soluc : \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\right)$

c) $\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a+b}{a-b}\right) \frac{a+b}{ab} =$
 $\left(Soluc : -\frac{2}{a-b}\right)$

d) $\frac{xy}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x-y}{y} + \frac{y}{x-y} =$
 $\left(Soluc : \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right)$

10. Demostrar que: **a)** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ **b)** $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = a \cdot b$