PÁGINA 20

- RACIONALES $\mathbb{Q}$
  - ENTEROS $\mathbb{Z}$
    - NATURALES $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $0,\ 7,\ 15,\ \frac{33}{11},\ \sqrt[5]{32}$
    - ENTEROS NEGATIVOS $\rightarrow$ $-13,\ -48,\ -\frac{24}{6},\ \sqrt[3]{-27}$
  - FRACCIONARIOS (racionales no enteros) $\rightarrow$ $8{,}92;\ -15{,}8\widehat{63};\ \frac{7}{11};\ -\frac{87}{5};\ \ldots$
- NO RACIONALES $\rightarrow$ $\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ -\sqrt{8},\ \sqrt[3]{4},\ \ldots$

Conocemos y manejamos varios conjuntos numéricos. Todos ellos están bien estructurados:

- **Los naturales, $\mathbb{N}$.**
- **Si a estos les añadimos sus opuestos (negativos), obtenemos el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$.**
- **Si a los enteros les añadimos los fraccionarios, obtenemos el conjunto de los racionales, $\mathbb{Q}$.**
- **Si a los racionales les añadimos los no racionales, ¿conseguiremos un conjunto bien estructurado?**

1 **Escribe tres números naturales y tres números enteros que no sean naturales.**

Por ejemplo:

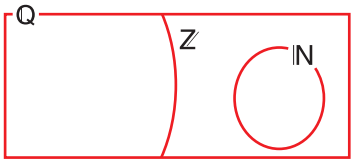
NATURALES	ENTEROS NO NATURALES
2, 3, 4	–1, –7, –3

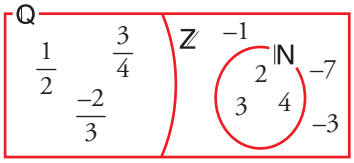
2 **Escribe tres números racionales que no sean enteros y tres números que no sean racionales.**

Por ejemplo:

RACIONALES NO ENTEROS	NO RACIONALES
$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{3}$	$\pi;\ \sqrt{2};\ 0{,}1010010001\ldots$

3 **Sitúa los números anteriores en un esquema como este:**





PÁGINA 21

ANTES DE COMENZAR, RECUERDA

1 **Halla la fracción irreducible equivalente a los siguientes números decimales y descompón en factores primos sus denominadores:**

a) 6,388 **b) 0,00875**

a) $6{,}388 = \frac{6\,388}{1\,000} = \frac{2^2 \cdot 1\,597}{2^2 \cdot 250} = \frac{1\,597}{2 \cdot 5^3}$

b) $0{,}00875 = \frac{875}{100\,000} = \frac{5^3 \cdot 7}{5^3 \cdot 800} = \frac{7}{2^5 \cdot 5^2}$

2 **Explica por qué las siguientes fracciones son equivalentes a números decimales exactos:**

a) $\frac{3\,741}{100\,000}$ **b)** $\frac{3\,147}{1\,250}$ **c)** $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}$ **d)** $\frac{57\,330}{10\,500}$

a) $\frac{3\,741}{100\,000} = \frac{3\,741}{2^5 \cdot 5^5}$

b) $\frac{3\,147}{1\,250} = \frac{3\,147}{2 \cdot 5^4}$

c) $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 91}{2 \cdot 5^2}$

d) $\frac{57\,330}{10\,500} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 273}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{273}{2 \cdot 5^2}$

Son equivalentes a números decimales exactos porque en sus fracciones irreducibles los denominadores solo tienen factores 2 y 5.

3 **Halla la fracción generatriz de:**

a) $4{,}\widehat{8}$ **b)** $0{,}0\widehat{51}$ **c)** $1{,}23\widehat{456}$ **d)** $7{,}45\widehat{6}$

a) $4{,}\widehat{8} = \frac{48 - 4}{9} = \frac{44}{9}$

b) $0{,}0\widehat{51} = \frac{51}{990}$

c) $1{,}23\widehat{456} = \frac{123\,456 - 123}{99\,900} = \frac{123\,333}{99\,900}$

d) $7{,}45\widehat{6} = \frac{7\,456 - 745}{900} = \frac{6\,711}{900}$

4 Explica por qué las siguientes fracciones son equivalentes a números decimales periódicos:

a) $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{20}{300}$ **c)** $\frac{37}{2 \cdot 5 \cdot 7}$ **d)** $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19}$

a) $\frac{3}{7}$ es una fracción irreducible y su denominador, 7, es distinto de 2 y de 5.

b) $\frac{20}{300} = \frac{1}{3 \cdot 5}$. Hay un 3 en el denominador de su fracción irreducible.

c) $\frac{37}{2 \cdot 5 \cdot 7}$. Es una fracción irreducible, y hay un 7 en su denominador.

d) $\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19} = \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 19}$. En el denominador de su fracción irreducible hay un factor distinto de 2 y de 5, el 19.

PÁGINA 22

Hazlo tú

Prueba que $\sqrt{3}$ es irracional.

Supongamos que $\sqrt{3}$ es racional. En este caso lo podemos escribir así:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 3b^2 = a^2$$

Al ser b^2 un cuadrado perfecto, contiene el factor 3 un número par de veces. Por tanto, $3b^2$ contiene el factor 3 un número impar de veces, lo cual es contradictorio con que $a^2 (a^2 = 3b^2)$, por ser cuadrado perfecto, lo contendría un número par de veces.

Hazlo tú

Prueba que $3\sqrt{7} + 15$ es irracional.

Veamos primeramente que $\sqrt{7}$ es irracional. Si no lo fuese, podríamos escribir:

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow 7b^2 = a^2$$

Razonando de forma similar al ejercicio anterior, llegaríamos a una contradicción, probando que, efectivamente, $\sqrt{7}$ es irracional.

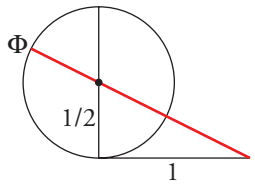
Ahora llamamos $N = 3\sqrt{7} + 15 \rightarrow \sqrt{7} = \frac{N - 15}{3}$

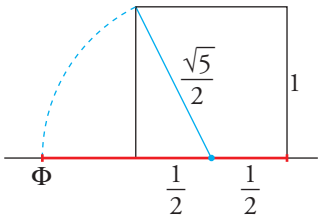
Si fuese N racional, $\frac{N - 15}{3}$ también lo sería. Es decir, $\sqrt{7}$ sería racional, y no lo es.

Por tanto, $N = 3\sqrt{7} + 15$ es un número irracional.

PÁGINA 23

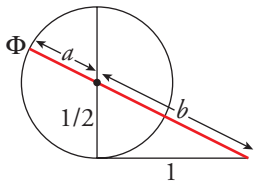
1 **Jusitifica que las construcciones siguientes:**





dan un segmento de medida igual al número de oro:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

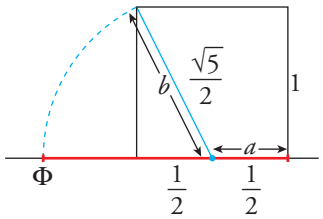


$a = \frac{1}{2}$ (radio de la circunferencia)

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 **Queremos demostrar que el número de oro, Φ, es irracional. Sabemos que $\sqrt{5}$ lo es (por lo mismo que $\sqrt{2}$). Observa que:**

Si $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, entonces:

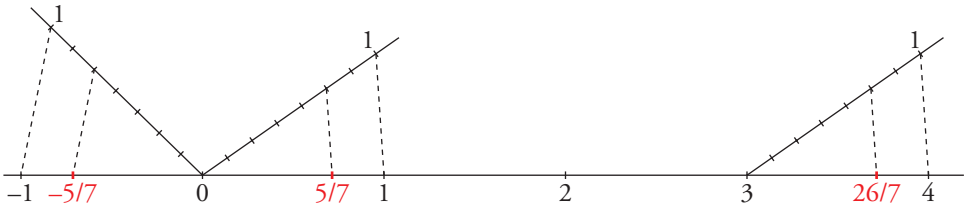
$$2\Phi = \sqrt{5} + 1 \rightarrow \sqrt{5} = 2\Phi - 1$$

De la igualdad $\sqrt{5} = 2\Phi - 1$, ¿qué deduciríamos si Φ fuera racional?

Si Φ fuese racional, $2\Phi - 1$ también sería racional, lo que contradice el que $\sqrt{5}$ es irracional.

PÁGINA 24

1 **Representa $\frac{5}{7}$, $-\frac{5}{7}$ y $\frac{26}{7}$ en la recta real.**



$$\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7}$$

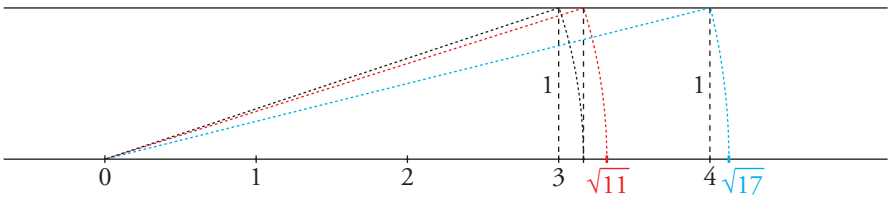
2 **Justifica la construcción de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{10}$.**

Representa $\sqrt{11}$ y $\sqrt{17}$ ($17 = 4^2 + 1^2$).

$\sqrt{2}$ es la diagonal de un cuadrado de lado 1, el cual podemos construir.

$\sqrt{3}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$, que podemos construir.

$\sqrt{10}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 1 y 3, y lo podemos construir.



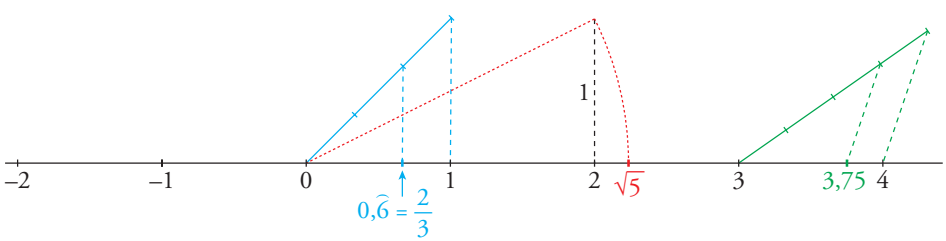
PÁGINA 25

3 **Representa en la recta real los números:**

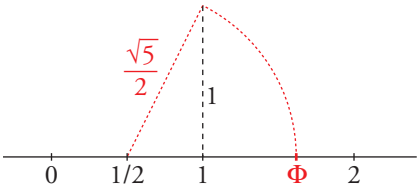
a) –2; 3,75; $\sqrt{5}$; 0,666… de forma exacta.

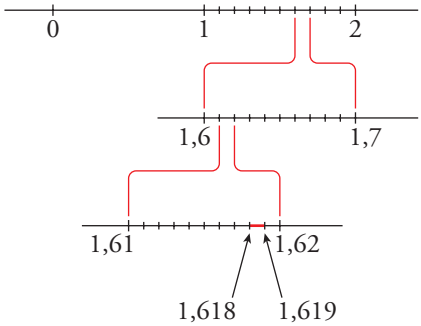
b) Φ de forma exacta $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ y aproximada (1,618…).

a)



b)





PÁGINA 27

1 **Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:**

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que –5.

a) [5, 6]

b) (7, +∞)

c) (–∞, –5]

2 **Escribe en forma de intervalo y representa:**

a) $\{x \,/\, 3 \le x < 5\}$

b) $\{x \,/\, x \ge 0\}$

c) $\{x \,/\, -3 < x < 1\}$

d) $\{x \,/\, x < 8\}$

a) [3, 5)

b) [0, +∞)

c) (–3, 1)

d) (–∞, 8)

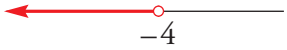
3 **Escribe en forma de desigualdad y representa:**

a) $(-1, 4]$ **b)** $[0, 6]$ **c)** $(-\infty, -4)$ **d)** $[9, +\infty)$

a) $\{x \,/\, -1 < x \leq 4\}$

b) $\{x \,/\, 0 \leq x \leq 6\}$

c) $\{x \,/\, x < -4\}$



d) $\{x \,/\, x \geq 9\}$

PÁGINA 28

Cálculo mental

1 **Di el valor de k en cada caso:**

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ **b)** $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{2}{3}$ **d)** $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

a) $k = 2^3 = 8$ b) $-243 = (-3)^5 \rightarrow k = 5$

c) $k = \dfrac{2^4}{3^4}$ d) $1\,024 = 2^{10} \rightarrow k = 10$

2 **Calcula las raíces siguientes:**

a) $\sqrt[3]{8}$ **b)** $\sqrt[5]{32}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[8]{0}$ **e)** $\sqrt[4]{81}$ **f)** $\sqrt[3]{125}$

a) -2 b) 2 c) -2

d) 0 e) 3 f) 5

1 **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x}$ **b)** $(\sqrt[3]{x^2})^5$ **c)** $\sqrt[15]{a^6}$

d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **f)** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

a) $x^{1/5}$ b) $x^{10/3}$ c) $a^{6/15}$

d) $(a^{13-6})^{1/2} = a^{7/2}$ e) $(x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}$ f) $(a^{k/m})^{1/n} = a^{k/m \cdot n}$

2 **Calcula.**

a) $4^{1/2}$ **b)** $125^{1/3}$

c) $625^{1/4}$ **d)** $8^{2/3}$

e) $64^{5/6}$ **f)** $36^{3/2}$

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$ b) $125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$

c) $625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5$ d) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 4$

e) $64^{5/6} = \sqrt[6]{64^5} = 2^5$ f) $36^{3/2} = \sqrt{36^3} = 6^3 = 216$

3 **Expresa en forma radical.**

a) $x^{7/9}$ **b)** $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$ **d)** $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

a) $\sqrt[9]{x^7}$ b) $\sqrt[3]{(m \cdot n)^5}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3 b^2}$ d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

PÁGINA 29

Halla con la calculadora:

1 **a)** $\sqrt{541}$ **b)** 327^2 **c)** $\sqrt[3]{8{,}53}$

a) $\sqrt{541} = 23{,}259406\ldots$

b) $327^2 = 106\,929$

c) $\sqrt[3]{8{,}53} = 2{,}0432257\ldots$

2 **a)** $\sqrt[5]{8{,}24}$ **b)** $\sqrt[6]{586}$ **c)** $\sqrt[4]{79{,}46}$

a) $\sqrt[5]{8{,}24} = 1{,}5247036\ldots$

b) $\sqrt[6]{586} = 2{,}8927857\ldots$

c) $\sqrt[4]{79{,}46} = 2{,}9856379\ldots$

3 **a)** $\sqrt[5]{37^2}$ **b)** $\sqrt[4]{2{,}1^5}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}008^2}$

a) $\sqrt[5]{37^2} = 4{,}2391686\ldots$

b) $\sqrt[4]{2{,}1^5} = 2{,}5279828\ldots$

c) $\sqrt[3]{0{,}008^2} = 0{,}04$

PÁGINA 31

1 **Simplifica.**

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = x^{9/12} = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = x^{8/12} = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = 2^{6/9} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

2 **¿Cuál de los dos es mayor en cada caso?**

a) $\sqrt[4]{31}$ **y** $\sqrt[3]{13}$

b) $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{31^3} = \sqrt[12]{29\,791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{13^4} = \sqrt[12]{28\,561}\end{array}\right\} \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

b) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{51^3} = \sqrt[9]{132\,651} \\ \sqrt[9]{132\,650}\end{array}\right\} \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132\,650}$

3 **Reduce.**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[10]{a^4 b^6} = \sqrt[5]{a^2 b^3}$

4 **Saca del radical los factores que sea posible.**

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{81a^3 b^5 c}$ **c)** $\sqrt[5]{64}$

a) $\sqrt[3]{32x^4} = \sqrt[3]{2^5 x^4} = 2x\sqrt[3]{4x}$

b) $\sqrt[3]{81a^3 b^5 c} = \sqrt[3]{3^4 a^3 b^5 c} = 3ab\sqrt[3]{3b^2 c}$

c) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$

5 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$

d) $(\sqrt[3]{a^2})^6$ **e)** $(\sqrt{x})^3 \cdot (\sqrt[3]{x})$ **f)** $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{\dfrac{16^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^3b^5c}{a^2b^6c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

d) $(\sqrt[3]{a^2})^6 = a^{12/3} = a^4$

e) $(\sqrt{x})^3 \cdot \sqrt[3]{x} = x^{3/2} \cdot x^{1/3} = x^{11/6} = \sqrt[6]{x^{11}}$

f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 = \left(\left((2^{1/2})^{1/2}\right)^{1/2}\right)^8 = (2^{1/8})^8 = 2$

6 **Efectúa.**

$$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$$

$$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} =$$
$$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

PÁGINA 32

7 **Racionaliza los denominadores.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ **e)** $\dfrac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ **f)** $\dfrac{3}{2 - \sqrt{3}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{7}}{7}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \dfrac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

f) $\dfrac{3}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{3(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 6 + 3\sqrt{3}$

PÁGINA 33

Cálculo mental

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 340 000 **b) 0,00000319**

c) $25 \cdot 10^6$ **d) $0{,}04 \cdot 10^9$**

e) $480 \cdot 10^{-8}$ **f) $0{,}05 \cdot 10^{-8}$**

a) $340\,000 = 3{,}4 \cdot 10^5$

b) $0{,}00000319 = 3{,}19 \cdot 10^{-6}$

c) $25 \cdot 10^6 = 2{,}5 \cdot 10^7$

d) $0{,}04 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^7$

e) $480 \cdot 10^{-8} = 4{,}8 \cdot 10^{-6}$

f) $0{,}05 \cdot 10^{-8} = 5 \cdot 10^{-10}$

PÁGINA 35

1 **Toma 3,14 como valor aproximado de π.**
Da una cota del error absoluto y otra del error relativo de este número irracional.

E.A. $< 0{,}005$

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{3{,}14} < 0{,}00159 = 1{,}59 \cdot 10^{-3}$

2 **Da el valor de 100Φ (recuerda que Φ es el número de oro) con 6 cifras significativas y acota el error absoluto y el error relativo que se comete.**

$\Phi = 1{,}61803398874\ldots$

Con seis cifras significativas, $100\Phi = 161{,}803$

E.A. $(100\Phi) < 0{,}0005$

E.R. $(100\Phi) < \dfrac{0{,}0005}{161{,}803} < 0{,}00000309 = 3{,}09 \cdot 10^{-6}$

3 **La distancia de la Tierra al Sol es 149 000 000 km.**
a) Exprésala en notación científica.
b) Exprésala en cm con dos cifras significativas.
c) Exprésala en cm con cuatro cifras significativas.
d) Acota los errores absoluto y relativo en los tres casos anteriores.

a) $1{,}49 \cdot 10^8$ km

b) $1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm

c) $1{,}490 \cdot 10^{13}$ cm

d) CASO a) $\begin{cases} \text{E.A.} < 0{,}005 \text{ cientos de millones de kilómetros.} \\ \text{E.R.} < \dfrac{0{,}005}{1{,}49} < 0{,}00336 \end{cases}$

CASO b) $\begin{cases} \text{E.A.} < 0{,}05 \text{ decenas de billones de centímetros.} \\ \text{E.R.} < \dfrac{0{,}05}{1{,}5} < 0{,}033 \end{cases}$

CASO c) $\begin{cases} \text{E.A.} < 0{,}0005 \text{ decenas de billones de centímetros.} \\ \text{E.R.} < \dfrac{0{,}0005}{1{,}490} < 0{,}000336 \end{cases}$

PÁGINA 36

PRACTICA

Números reales

1 **a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?**

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son racionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

b) $-2 = \frac{-4}{2}$; $1{,}7 = \frac{17}{10}$; $4{,}\widehat{2} = \frac{42-4}{9} = \frac{38}{9}$; $-3{,}7\widehat{5} = -\frac{375-37}{90} = -\frac{338}{90} = -\frac{169}{45}$

c) Son racionales: -2; $1{,}7$; $4{,}\widehat{2}$ y $-3{,}7\widehat{5}$.

2 **a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:**

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

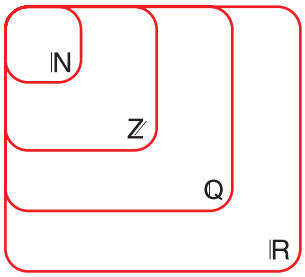
c) ¿Cuáles son números reales?

a) Racionales: $0{,}8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\frac{7}{3}$ Irracionales: $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

b) $-\frac{7}{3} < -\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}8\widehat{7} < 2\pi$

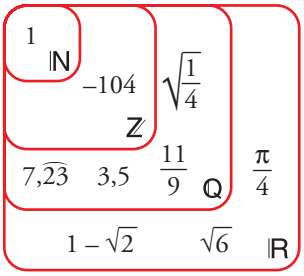
c) Todos son números reales.

3 **Sitúa los siguientes números en el diagrama adjunto:**



$$1;\ 7{,}\widehat{23};\ 1-\sqrt{2};\ 3{,}5$$

$$\frac{11}{9};\ \sqrt{\frac{1}{4}};\ \sqrt{6};\ \frac{\pi}{4};\ -104$$



4 ■■□ **Indica a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ pertenece cada uno de los siguientes números:**

$$-\frac{5}{4};\quad -3;\quad \frac{13}{6};\quad \sqrt{5};\quad \sqrt{16};\quad 152;\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$\mathbb{N}$: $\sqrt{16}$; 152

$\mathbb{Z}$: $\sqrt{16}$, 152, –3

$\mathbb{Q}$: $\sqrt{16}$; 152; –3; $-\frac{5}{4}$; $\frac{13}{6}$

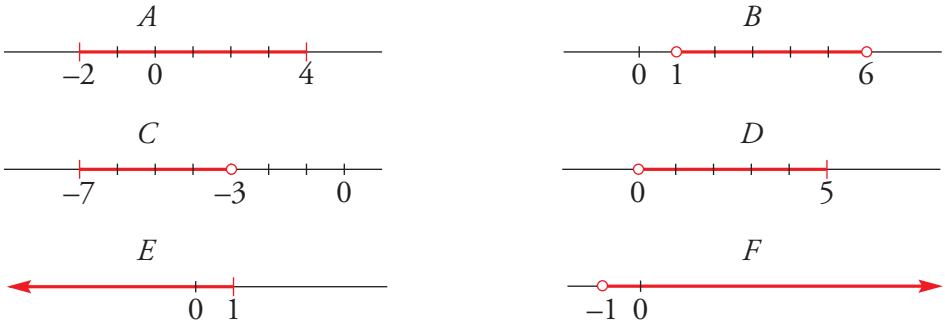
$\mathbb{R}$: $-\frac{5}{4}$; –3; $\frac{13}{6}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{16}$; 152 y $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Intervalos y semirrectas

5 ■□□ **Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:**

$A = [-2, 4]$ $\quad B = (1, 6)$ $\quad C = [-7, -3)$

$D = (0, 5]$ $\quad E = (-\infty, 1]$ $\quad F = (-1, +\infty)$



6 ■□□ **Escribe en forma de intervalo o semirrecta y representa en la recta real los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:**

a) $-3 \le x \le 2$ **b)** $-1 < x < 5$

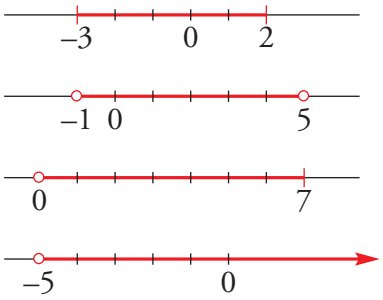
c) $0 < x \le 7$ **d)** $x > -5$

a) [–3, 2]

b) (–1, 5)

c) (0, 7]

d) (–5, +∞)



7 ■□□ **Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados.**

a) $[-1, 3]$

$-1 \leq x \leq 3$

b) $(1, 5]$

$1 < x \leq 5$

c) $[-2, +\infty)$

$x \geq -2$

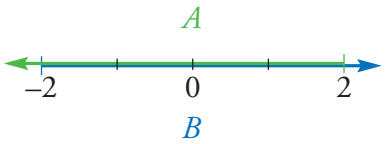
d) $(-\infty, 4)$

$x < 4$

8 ■■□ **Representa en una misma recta las semirrectas:**

$$A = (-\infty, 2] \text{ y } B = [-2, +\infty)$$

¿Cuáles son los números que pertenecen a A y a B $(A \cap B)$? Exprésalo como un intervalo.



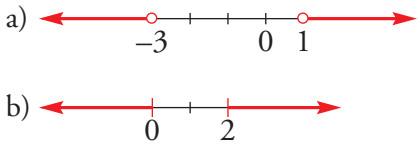
$A \cap B = [-2, 2]$

9 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

10 ■□□ **Representa en la recta real:**

a) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$



Números aproximados. Notación científica

11 ■■□ **Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de cada una de las aproximaciones siguientes sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:**

a) 128 mil euros

b) 25 millones de euros

c) 648 500 €

d) 3 200 €

a) Error absoluto < 500 €

Error relativo < 0,0039

b) Error absoluto < 500 000 €

Error relativo < 0,02

c) Error absoluto < 50 €

Error relativo < 0,000077

d) Error absoluto < 50 €

Error relativo < 0,0156

12 ■■□ **Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.**

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

a) 840 000 oyentes $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 5\,000 \\ \text{Error relativo} < 0{,}0059 \end{cases}$

b) 29 000 € $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 500 \\ \text{Error relativo} < 0{,}017 \end{cases}$

c) 0,04 segundos $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 0{,}005 \\ \text{Error relativo} < 0{,}13 \end{cases}$

d) 49 000 000 € $\begin{cases} \text{Error absoluto} < 500\,000 \\ \text{Error relativo} < 0{,}01 \end{cases}$

13 ■□□ **Escribe en notación científica.**

a) 752 000 000 **b) 0,0000512**

c) 0,000007 **d) 15 000 000 000**

a) $7{,}52 \cdot 10^{8}$ b) $5{,}12 \cdot 10^{-5}$

c) $7 \cdot 10^{-6}$ d) $1{,}5 \cdot 10^{10}$

PÁGINA 37

14 ■■□ **Expresa en notación científica.**

a) $\mathbf{32 \cdot 10^{5}}$ **b)** $\mathbf{75 \cdot 10^{-4}}$ **c)** $\mathbf{843 \cdot 10^{7}}$

d) $\mathbf{458 \cdot 10^{-7}}$ **e)** $\mathbf{0{,}03 \cdot 10^{6}}$ **f)** $\mathbf{0{,}0025 \cdot 10^{-5}}$

a) $3{,}2 \cdot 10^{6}$ b) $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ c) $8{,}43 \cdot 10^{9}$

d) $4{,}58 \cdot 10^{-5}$ e) $3 \cdot 10^{4}$ f) $2{,}5 \cdot 10^{-8}$

15 ■■□ **Da una cota del error absoluto de cada una de las siguientes aproximaciones y compara sus errores relativos.**

a) $\mathbf{8 \cdot 10^{5}}$ **b)** $\mathbf{5{,}23 \cdot 10^{6}}$ **c)** $\mathbf{1{,}372 \cdot 10^{7}}$

d) $\mathbf{2{,}5 \cdot 10^{-4}}$ **e)** $\mathbf{1{,}7 \cdot 10^{-6}}$ **f)** $\mathbf{4 \cdot 10^{-5}}$

a) $5 \cdot 10^{4}$ b) $5 \cdot 10^{3}$ c) $5 \cdot 10^{3}$

d) $5 \cdot 10^{-6}$ e) $5 \cdot 10^{-8}$ f) $5 \cdot 10^{-6}$

El menor error relativo se da en c) y el mayor, en f).

16 ■□□ **Calcula mentalmente.**

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ **b)** $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$ **d)** $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

a) $3 \cdot 10^{12}$ b) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

c) $2 \cdot 10^5$ d) $2 \cdot 10^4$

17 ■■□ **Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.**

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(6 \cdot 10^{-7})^2$

a) $14 \cdot 10^{15} = 1{,}4 \cdot 10^{16}$ b) $12{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$

c) $0{,}24 \cdot 10^{13} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$ d) $36 \cdot 10^{-14} = 3{,}6 \cdot 10^{-13}$

18 ■■□ **Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba después con la calculadora.**

a) $5{,}3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 8{,}2 \cdot 10^{-6}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

d) $7{,}2 \cdot 10^8 + 1{,}5 \cdot 10^{10}$

a) $53 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{11} = 50 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{12}$

b) $30 \cdot 10^{-6} + 8{,}2 \cdot 10^{-6} = 38{,}2 \cdot 10^{-6} = 3{,}82 \cdot 10^{-5}$

c) $6 \cdot 10^{-9} - 50 \cdot 10^{-9} = -44 \cdot 10^{-9} = -4{,}4 \cdot 10^{-8}$

d) $7{,}2 \cdot 10^8 + 150 \cdot 10^8 = 157{,}2 \cdot 10^8 = 1{,}572 \cdot 10^{10}$

19 ■□□ **Expresa el resultado de las siguientes operaciones en notación científica con 3 cifras significativas como máximo:**

a) $(2{,}8 \cdot 10^{-5}) : (6{,}2 \cdot 10^{-12})$

b) $(7{,}2 \cdot 10^{-6})^3 : (5{,}3 \cdot 10^{-9})$

c) $7{,}86 \cdot 10^5 - 1{,}4 \cdot 10^6 + 5{,}2 \cdot 10^4$

d) $(3 \cdot 10^{-10} + 7 \cdot 10^{-9}) : (7 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^5)$

a) $4{,}52 \cdot 10^6$ b) $7{,}04 \cdot 10^{-8}$

c) $-5{,}62 \cdot 10^5$ d) $1{,}12 \cdot 10^{-15}$

Potencias y raíces

20 ■□□ **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x^2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt[3]{10^6}$ **d)** $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ **f)** $\sqrt[4]{a}$ **g)** $(\sqrt[5]{x^{-2}})^3$ **h)** $\sqrt[15]{a^5}$

a) $x^{2/5}$ b) $2^{1/2}$ c) 10^2 d) $20^{1/2}$

e) $(-3)^{3/5}$ f) $a^{1/4}$ g) $x^{-6/5}$ h) $a^{1/3}$

21 ■□□ **Pon en forma de raíz.**

a) $5^{1/2}$ **b)** $(-3)^{2/3}$ **c)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ **e)** $(a^{1/2})^{1/3}$ **f)** $(a^{-1})^{3/5}$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$

22 ■□□ **Obtén con la calculadora.**

a) $\sqrt[3]{-127}$ **b)** $\sqrt[5]{0{,}2^{-3}}$ **c)** $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{9}\right)^3}$

d) $12^{-2/3}$ **e)** $\sqrt[6]{3^{-5}}$ **f)** $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$

a) $\sqrt[3]{-127} \approx -5{,}03$ b) $\sqrt[5]{0{,}2^{-3}} \approx 2{,}63$ c) $\sqrt[4]{\left(\frac{13}{9}\right)^3} \approx 1{,}32$

d) $12^{-2/3} \approx 0{,}19$ e) $\sqrt[6]{3^{-5}} \approx 0{,}4$ f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}} \approx 0{,}64$

23 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

24 ■□□ **Expresa como potencia única.**

a) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4}$ **b)** $3\,\sqrt[3]{9}$ **c)** $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$ **e)** $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ **f)** $\sqrt[3]{m^2} : (m \cdot \sqrt{m})$

a) $2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$ b) $3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$ c) $5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$

d) $a^{1/2} \cdot a^{2/5} = a^{9/10}$ e) $a^{1/10}$ f) $m^{2/3} : (m \cdot m^{1/2}) = m^{-5/6}$

Radicales

25 ■□□ **Simplifica.**

a) $\sqrt[4]{3^2}$ **b)** $\sqrt[12]{a^8}$ **c)** $\sqrt[5]{a^{15}}$

d) $\sqrt[8]{a^2 b^4}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$ **f)** $\sqrt[3]{a^6 b^9}$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a^2}$ c) a^3

d) $\sqrt[4]{ab^2}$ e) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ f) $a^2 b^3$

26 ■□□ **Multiplica y simplifica.**

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^4}\,\sqrt[3]{a}$ **c)** $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$

a) $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$

c) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$

27 ■■□ **Extrae del radical los factores que sea posible.**

a) $\sqrt[3]{16a^3}$ **b)** $\sqrt[4]{81a^5b^3}$ **c)** $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{24}{a^4}}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{162}{75}}$ **f)** $\sqrt[5]{\dfrac{9}{32}}$

a) $2a\sqrt[3]{2}$ b) $3a\sqrt[4]{ab^3}$ c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\dfrac{2}{a}\sqrt[3]{\dfrac{3}{a}}$ e) $\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

28 ■■□ **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:**

$$\sqrt{7},\ \sqrt[3]{30},\ \sqrt[4]{40},\ \sqrt[6]{81}$$

mín.c.m. (2, 3, 4, 6) = 12

$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6} = \sqrt[12]{117\,649}$

$\sqrt[3]{30} = \sqrt[12]{30^4} = \sqrt[12]{810\,000}$

$\sqrt[4]{40} = \sqrt[12]{40^3} = \sqrt[12]{64\,000}$

$\sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81^2} = \sqrt[12]{6\,561}$

$$\sqrt[6]{81} < \sqrt[4]{40} < \sqrt{7} < \sqrt[3]{30}$$

29 ■■□ **Introduce dentro de la raíz y simplifica.**

a) $5\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{18}}{3}$

c) $2\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}}$ **d)** $2\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}}$

e) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12}$ **f)** $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\dfrac{5^2 \cdot 3}{5}} = \sqrt{15}$ b) $\sqrt{\dfrac{18}{3^2}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 7}{4}} = \sqrt[3]{14}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\dfrac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\dfrac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 9}{3^3 \cdot 4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

PÁGINA 38

30 ■■□ **Divide y simplifica.**

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}}$

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{7 : \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6} : \frac{45}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

31 ■■□ **Reduce a índice común y efectúa.**

a) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{4} : \sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10}$ **d)** $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) : (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3})$

a) $\sqrt[10]{6^2 \cdot 3^5} = \sqrt[10]{8\,748}$ b) $\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[12]{20^2 : 10^3} = \sqrt[12]{\frac{4}{10}} = \sqrt[12]{\frac{2}{5}}$ d) $\sqrt[6]{(2^3 \cdot 3^2) : (2^2 \cdot 3^3)} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

32 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

33 ■■□ **Efectúa.**

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{108} - 2\sqrt{12} - \sqrt{28} + \sqrt{7/4}$

a) $\sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{2^2 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{7}$

34 ■■□ **Efectúa.**

a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ **b)** $(3\sqrt{2}+2)^2$

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$ **d)** $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

a) $4-3=1$ b) $9\cdot 2+4+12\sqrt{2}=22+12\sqrt{2}$

c) $5-4\cdot 3=-7$ d) $4\cdot 5+3-4\sqrt{15}=23-4\sqrt{15}$

35 ■□□ **Racionaliza y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ **e)** $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$

c) $\dfrac{3\sqrt{15}}{15}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ d) $\dfrac{4\sqrt{12}}{12}=\dfrac{4\cdot 2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{3\sqrt{6}}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ f) $\dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}=\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

36 ■■□ **Racionaliza y simplifica si es posible.**

a) $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$

g) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **h)** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **i)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{(1+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$

b) $\dfrac{3(1-\sqrt{3})}{1-3}=\dfrac{3-3\sqrt{3}}{-2}=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{14(3+\sqrt{2})}{9-2}=\dfrac{42+14\sqrt{2}}{7}=6+2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1-2}=\dfrac{1+2+2\sqrt{2}}{-1}=-3-2\sqrt{2}$

e) $\dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot 5-9}=2\sqrt{5}-3$

f) $\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}+3)}{4\cdot 2-9} = \dfrac{2\cdot 2+3\sqrt{2}}{-1} = -4-3\sqrt{2}$

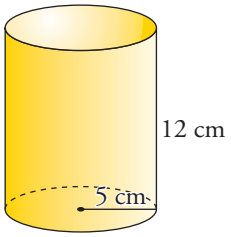
g) $\dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4\cdot 3-2} = 2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} = \dfrac{\sqrt{6}-3}{-1} = -\sqrt{6}+3$

i) $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \dfrac{5+3-2\sqrt{15}}{2} = \dfrac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$

PIENSA Y RESUELVE

37 ■□□ **Halla el área total y el volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de altura. Da su valor exacto en función de π.**



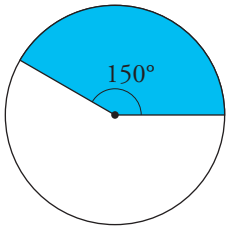
Área lateral = $2\pi R\text{h} = 2\pi\cdot 5\cdot 12 = 120\pi$ cm^2

Área base = $\pi R^2 = \pi\cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

Área total = $120\pi + 2\cdot 25\pi = 170\pi$ cm^2

Volumen = $\pi R^2\text{h} = \pi\cdot 5^2\cdot 12 = 300\pi$ cm^3

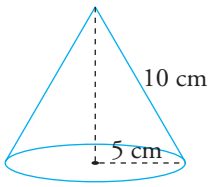
38 ■□□ **En un círculo cuya circunferencia mide 30π m, cortamos un sector circular de 150° de amplitud. Halla el área de ese sector dando su valor exacto en función de π.**



Radio del círculo: $2\pi R = 30\pi \rightarrow R = 15$ m

$\left.\begin{array}{lll} 360° & \rightarrow & \pi\cdot 15^2 \\ 150° & \rightarrow & x \end{array}\right\}$ Área $= \dfrac{150°\cdot 15^2\pi}{360°} = \dfrac{375\pi}{4}$ m^2

39 ■□□ **Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de generatriz. Da el valor exacto.**



Altura = $\sqrt{10^2-5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

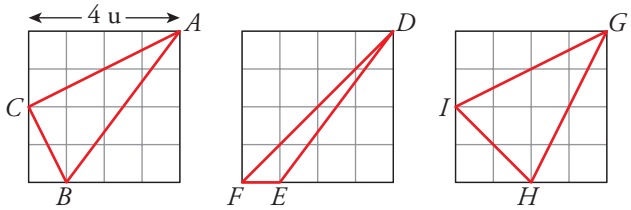
Área lateral = $\pi R g = \pi\cdot 5\cdot 10 = 50\pi$ cm^2

Área base = $\pi R^2 = 25\pi$ cm^2

Área total = $50\pi + 25\pi = 75\pi$ cm^2

Volumen = $\dfrac{1}{3}\pi R^2\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi\cdot 25\cdot 5\sqrt{3} = \dfrac{125\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3

40 ■■□ **Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.**



ABC $\quad \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

Perímetro de $ABC = 2\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$ u

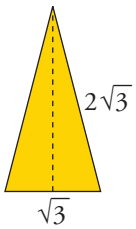
DFE $\quad \overline{DF} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $\overline{DE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $\overline{FE} = 1$

Perímetro de $DFE = 4\sqrt{2} + 5 + 1 = 6 + 4\sqrt{2}$ u

GHI $\quad \overline{GH} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\overline{GI} = \overline{GH} = 2\sqrt{5}$; $\overline{HI} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Perímetro de $GHI = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ u

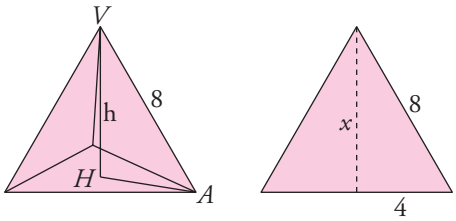
41 ■■□ **Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**



$$\text{Altura} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$$

42 ■□□ **Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Da su valor exacto.**



Altura de una cara:

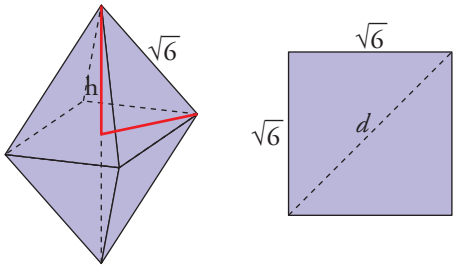
$x = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

$\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

Altura del tetraedro:

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{128}{3}} = \sqrt{\frac{2^7}{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

43 ■□□ **Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Da su valor exacto.**



$d = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

$\frac{d}{2} = \sqrt{3}$ cm

Altura de la pirámide $= \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ cm

Volumen del octaedro $= 2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{6})^2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$ cm^3

44 ■■□ **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x-7}$ **b)** $\sqrt{5-x}$ **c)** $\sqrt{-x}$ **d)** $\sqrt{x^2+1}$

a) $x - 7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7 \rightarrow x \in [7, +\infty)$

b) $5 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -5 \rightarrow x \leq 5 \rightarrow x \in (-\infty, 5]$

c) $-x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0]$

d) $x^2 + 1 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$

45 ■■□ **Comprueba que los números $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$.**

- $(3+\sqrt{2})^2 - 6(3+\sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$
- $(3-\sqrt{2})^2 - 6(3-\sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 - 6\sqrt{2} - 18 + 6\sqrt{2} + 7 = 0$

46 ■■□ **¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ es solución de la ecuación $2x^2 - 2x - 1 = 0$?**

- $2(1-\sqrt{3})^2 - 2(1-\sqrt{3}) - 1 = 2(1 + 3 - 2\sqrt{3}) - 2 + 2\sqrt{3} - 1 =$
  $= 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} - 1 \neq 0$

  El número $1 - \sqrt{3}$ no es solución de la ecuación.

- $2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right) - 1 - \sqrt{3} - 1 =$
  $= 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 = 0$

  El número $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sí es solución de la ecuación.

PÁGINA 39

47 ■■□ **Halla el valor exacto de las siguientes expresiones en el caso en que $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$:**

a) $\frac{(1-2m)^2}{2}$ **b)** $\sqrt{1-m^2}$ **c)** $\frac{1+m}{1-m}$

a) $\frac{\left(1-2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1+3-2\sqrt{3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3} = \frac{4+3+4\sqrt{3}}{1} = 7+4\sqrt{3}$

48 ■■□ **Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:**

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$ **b)** $\frac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00015 - 0{,}00003}$

c) $(0{,}0073)^{-2} \cdot (0{,}0003)^{-3}$ **d)** $(4{,}5 \cdot 10^{12}) : (0{,}000837)$

a) $(3{,}30 \cdot 10^{19}) : (1{,}44 \cdot 10^{8}) = 2{,}29 \cdot 10^{11}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{8}$

b) $\frac{2{,}70 \cdot 10^{6} - 1{,}30 \cdot 10^{7}}{1{,}50 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}} = -8{,}58 \cdot 10^{10}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{7}$

c) $(1{,}88 \cdot 10^{4}) \cdot (3{,}70 \cdot 10^{10}) = 6{,}96 \cdot 10^{14}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{11}$

d) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) : (8{,}37 \cdot 10^{-4}) = 5{,}38 \cdot 10^{15}$ Error absoluto $< 5 \cdot 10^{12}$

49 ■■□ **Simplifica las expresiones siguientes:**

a) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}-1} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}+1}$ **b)** $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$

c) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5}$

a) $\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \frac{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{10+6\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}-10}{2} =$

$= \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

b) $\left[\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}\right]\cdot(3+2\sqrt{2}) = \dfrac{9-2\sqrt{18}}{3}\cdot(3+2\sqrt{2}) =$

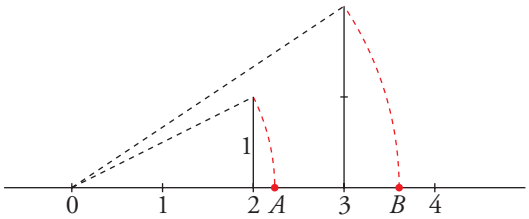
$= \dfrac{27+18\sqrt{2}-6\sqrt{18}-4\cdot 6}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

c) $\dfrac{5+1+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} = \dfrac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1} - 3\sqrt{5} = \dfrac{8\sqrt{5}+16}{4} - 3\sqrt{5} =$

$= 2\sqrt{5}+4-3\sqrt{5} = 4-\sqrt{5}$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

50 ■□□ **¿Qué números representan los puntos *A* y *B*?**

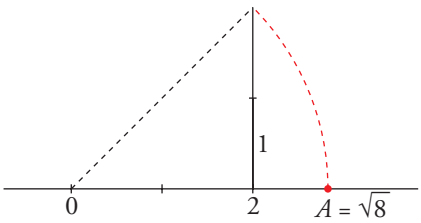


$A = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ $\qquad$ $B = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

51 ■■□ **Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente:**

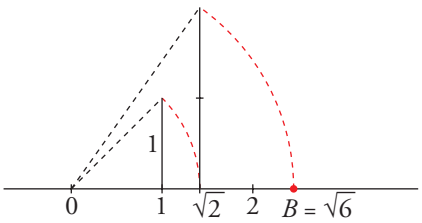
a) $\sqrt{8}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{6}$

a)



$A = \sqrt{8} = \sqrt{2^2+2^2}$

b)



$B = \sqrt{6} = \sqrt{\sqrt{2^2}+2^2}$

52 ■□□ **¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?**

$$\sqrt[3]{-20};\ \sqrt[6]{2^{-3}};\ \sqrt{-1};\ \sqrt[5]{0{,}001};\ \sqrt[4]{-81}$$

No existen ni $\sqrt{-1}$ ni $\sqrt[4]{-81}$.

53 ■□□ **¿Cuántos números racionales hay entre $0{,}\widehat{7}$ y $0{,}\widehat{8}$? ¿Y cuántos irracionales? Pon ejemplos.**

Hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

Racionales entre $0{,}\widehat{7}$ y $0{,}\widehat{8}$: 0,79; 0,78; 0,786;…

Irracionales: 0,791791179111…; 0,828228222…; $\dfrac{\sqrt{17}}{5}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;…

54 ■□□ **¿Cuáles son los números que pertenecen a $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$?**

Todos los números reales excepto el 3.

55 ■■□ **Escribe, en cada caso, un número racional y otro irracional comprendidos entre los dos que se dan:**

a) $\sqrt{2}$ **y 2** **b)** $1,\widehat{3}$ **y** $1,\widehat{4}$

c) $1,\widehat{23}$ **y** $1,\widehat{24}$ **d)** $\sqrt{2}$ **y** $\sqrt{3}$

a) Racional: $1,5 = \frac{3}{2}$ Irracional: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) Racional: 1,35 Irracional: $\sqrt{2}$

c) Racional: 1,235 Irracional: $\sqrt{1,54}$

d) Racional: 1,5 Irracional: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

56 ■□□ **Escribe dos números racionales uno mayor y otro menor que $\sqrt{2}$ que se diferencien de él en menos de una milésima.**

Menor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4141$ Mayor que $\sqrt{2} \rightarrow 1,4143$

57 ■□□ **¿Cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen soluciones irracionales?**

a) $x^2 - 2 = 0$ **b)** $9x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 + 4 = 0$ **d)** $x^2 - 18 = 0$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0$ **f)** $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2} = 0$

a) $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ son irracionales.

b) $x = \pm\frac{5}{3}$ son racionales.

c) No tiene solución.

d) $x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ son irracionales.

e) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$ son irracionales.

f) $x = \pm 2$ son racionales.

58 ■■□ **Justifica que $\frac{\sqrt{18}}{3}$, $\frac{8}{\sqrt{32}}$, $\sqrt[4]{4}$ y $2^{1/2}$ representan el mismo número irracional. ¿Es posible que $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$ represente ese mismo número?**

$$\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2};\ \frac{8}{\sqrt{32}} = \frac{8\sqrt{32}}{32} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{2}}{32} = \sqrt{2};\ \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2};\ 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{27-4} = \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} =$$

$$= \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$$

59 ■□□ **¿Cuáles de los siguientes números no están expresados en notación científica?**

$$3{,}14 \cdot 10^{-17};\ 1{,}32^{12};\ 437 \cdot 10^{7};\ 0{,}82 \cdot 10^{3}$$

No están en notación científica: $1{,}32^{12}$; $437 \cdot 10^{7}$; $0{,}82 \cdot 10^{3}$

PROFUNDIZA

60 ■■■ **Ordena de menor a mayor en el caso $a \in (0, 1)$ y en el caso $a \in (1, +\infty)$.**

$$\sqrt{a};\quad \frac{1}{a};\quad a^2;\quad a$$

Si $a \in (0, 1)$, $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

Si $a \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

61 ■■■ **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{(x-3)(x+3)}$

b) $\sqrt{x(4-x)}$

c) $\sqrt{x^2+x-6}$

d) $\sqrt{(x+1)(x-5)}$

a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $[0, 4]$

c) $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

d) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

62 ■■■ **Prueba que $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.**

Elevamos al cuadrado.

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

63 ■■■ **Justifica que $\sqrt{\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[3]{x}$.**

$$\sqrt{\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[8]{x^2 \cdot x^{2/3}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{x^6 \cdot x^2}} = \sqrt[24]{x^8} = \sqrt[3]{x}$$