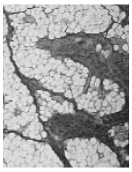
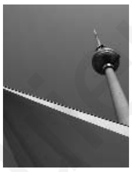



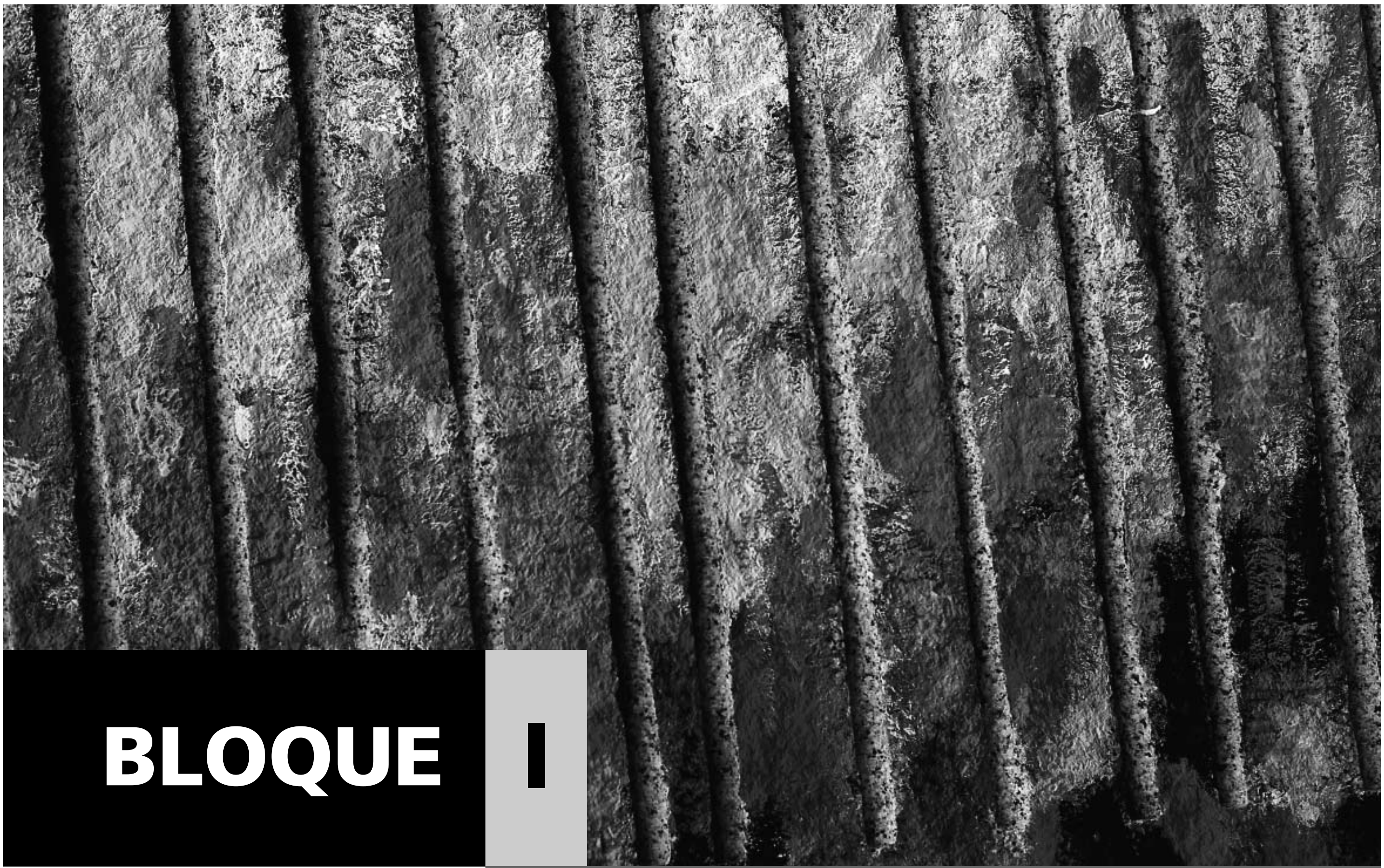






Soluciones a las actividades



BLOQUE I

Aritmética

1 Los números reales

1. Números racionales e irracionales

PIENSA Y CALCULA

a) Calcula mentalmente el área de un cuadrado de 2 cm de lado.

b) Expresa de forma exacta el lado, **x,** de un cuadrado de 2 cm^2 de área.

Solución:

$A = 2^2 = 4\ \text{cm}^2$

$x = \sqrt{2}\ \text{cm}$

APLICA LA TEORÍA

1 Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) 2/3 b) π c) $\sqrt{2}$ d) 1,455555…

Solución:

a) Racional. b) Irracional.

c) Irracional. d) Racional.

2 Escribe tres números racionales.

Solución:

$3/4, -5, -2/3$

3 Escribe tres números irracionales.

Solución:

$\sqrt{10}, \pi, -\sqrt{3}$

4 Escribe dos números racionales comprendidos entre 1/3 y 2/3

Solución:

$$\frac{1/3 + 2/3}{2} = \frac{1}{2}$$

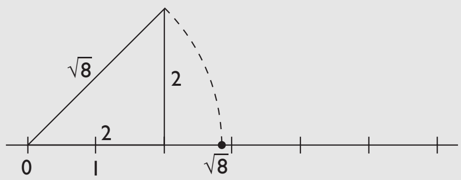
$$\frac{1/3 + 1/2}{2} = \frac{5}{12}$$

5 Representa gráficamente de forma exacta:

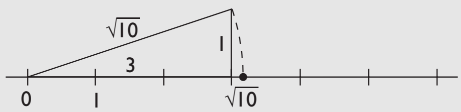
a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{10}$

Solución:

a)



b)



6 Representa gráficamente de forma aproximada:

a) $\sqrt{20}$

b) e

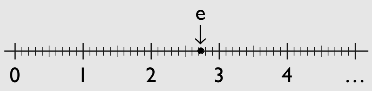
c) $\sqrt{12}$

d) $-\sqrt{15}$

Solución:

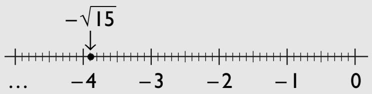
a)

b)



c)

d)



7 Halla de forma exacta la diagonal de un cubo de 1 cm de lado y escribe qué tipo de número es.

Solución:

$d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Es un número irracional.

Calcula:

8 $1 - \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$

Solución:

5/12

9 $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$

Solución:

1/6

10 $\frac{2}{3} : \left(\frac{2}{5} - 1\right)$

Solución:

–10/9

11 $\frac{4}{7}\left(\frac{5}{2} + 1\right)$

Solución:

2

12 $2\left(\frac{1}{3} + 1\right) - \frac{5}{2} : \left(\frac{1}{2} - 3\right)$

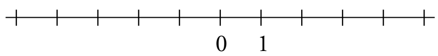
Solución:

11/3

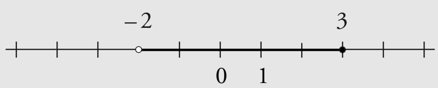
2. La recta real

PIENSA Y CALCULA

Representa en la recta real todos los números reales **x** que cumplen: $-2 < x \leq 3$



Solución:



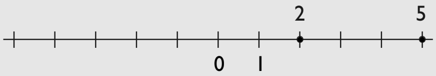
13 Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

a) 2 y 5 b) – 3 y 2

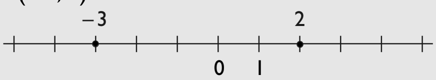
c) – 4 y – 1 d) – 3 y 0

Solución:

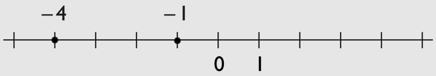
a) d(2, 5) = 3



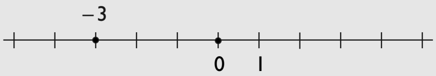
b) d(– 3, 2) = 5



c) d(– 4, – 1) = 3



d) d(0, – 3) = 3



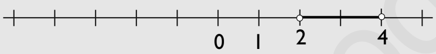
14 Escribe en forma de desigualdad los siguientes intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

a) (2, 4) b) [– 1, 3)

c) (– 2, + ∞) d) (– ∞, 1]

Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 4\}$

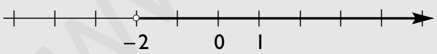


Abierto.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -1 \le x < 3\}$

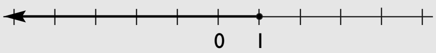
Semiabierto y semicerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < +\infty\}$



Abierto.

d) $\{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \le 1\}$



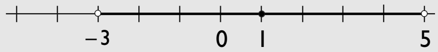
Semiabierto y semicerrado.

15 Representa gráficamente los siguientes entornos:

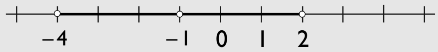
a) E(1, 4) b) E*(– 1, 3)

Solución:

a)

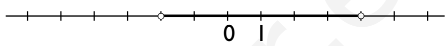


b)

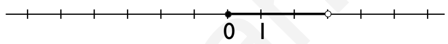


16 Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos, y clasifícalos:

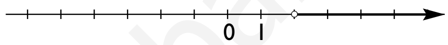
a)



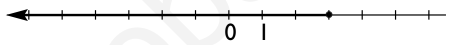
b)



c)



d)



Solución:

a) (– 2, 4) Abierto.

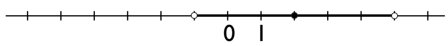
b) [0, 3) Semiabierto y semicerrado.

c) (2, + ∞) Abierto.

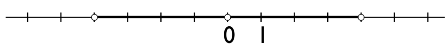
d) (– ∞, 3] Semiabierto y semicerrado.

17 Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:

a)



b)



Solución:

a) E(2, 3)

b) E*(0, 4)

3. Aproximaciones y errores

PIENSA Y CALCULA

Juan estima que la altura de un árbol es de 35 m. Si la altura real es de 35,5 m, ¿cuál es el error cometido en la estimación?

Solución:
35,5 – 35 = 0,5 m

APLICA LA TEORÍA

18 Calcula la parte entera y decimal de los siguientes números:

a) 2,49 b) –3,24

Solución:
a) Ent(2,49) = 2
Dec(2,49) = 0,49
b) Ent(–3,24) = –4
Dec(–3,14) = 0,86

19 Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

a) 25/7 b) 43,5978

Solución:
a) 3,5714… ≈ 3,57 Aproximación por defecto.
b) 43,60 Aproximación por exceso.

20 Trunca a dos cifras decimales los siguientes números:

a) 25/7 b) 43,5978

Solución:
a) 3,5714… ≈ 3,57
b) 43,5978 ≈ 43,59

21 Halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

a) 58/12 b) $\sqrt{6}$

Solución:
a) 4,83333… ≈ 4,83
Error absoluto = 0,00333
Error relativo = 0,00069
b) 2,4494… ≈ 2,45
Error absoluto = 0,00051
Error relativo = 0,0002

22 Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 372 000 000 b) 0,00000058

Solución:
a) $3,72 \cdot 10^8$ b) $5,8 \cdot 10^{-7}$

23 Expresa en notación decimal los siguientes números:

a) $7,48 \cdot 10^8$ b) $1,53 \cdot 10^{-9}$

Solución:
a) 748 000 000 b) 0,00000000153

24 Opera y expresa en notación científica:

a) $5,4 \cdot 10^{15} \cdot 8,12 \cdot 10^{-9}$
b) $2,7 \cdot 10^6 : (1,5 \cdot 10^{-4})$

Solución:
a) $4,3848 \cdot 10^7$
b) $1,8 \cdot 10^{10}$

4. Números combinatorios

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente los siguientes productos:

a) $3 \cdot 2 \cdot 1$ b) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ c) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Solución:

a) 6 b) 24 c) 120

APLICA LA TEORÍA

25 Calcula el factorial de los números siguientes:

a) 6

b) 8

Solución:

a) $6! = 720$

b) $8! = 40\,320$

26 Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{4}{2}$ b) $\binom{7}{2}$

c) $\binom{3}{3}$ d) $\binom{6}{1}$

Solución:

a) 6

b) 21

c) 1

d) 6

27 Comprueba que se cumple, en cada caso, la igualdad siguiente:

$$\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$$

a) $m = 6, p = 2$

b) $m = 8, p = 3$

Solución:

a) $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$

b) $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 15$

28 Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:

$$\binom{12}{x-2} = \binom{12}{x+2}$$

Solución:

Se tiene que:

$x - 2 + x + 2 = 12$

$x = 6$

Ejercicios y problemas

1. Números racionales e irracionales

29 Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $\sqrt{10}$ b) $2/5$

c) $\sqrt{64}$ d) $-\sqrt{50}$

Solución:

a) Irracional. b) Racional.

c) Racional. d) Irracional.

30 Escribe tres números racionales comprendidos entre 1/4 y 3/4

Solución:

$\frac{1/4 + 3/4}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1/4 + 1/2}{2} = \frac{3}{8}$

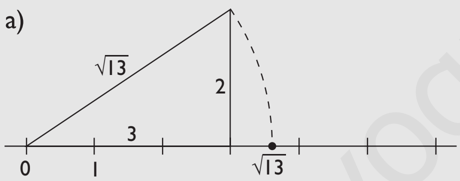
$\frac{1/4 + 3/8}{2} = \frac{5}{16}$

31 Representa gráficamente de forma exacta:

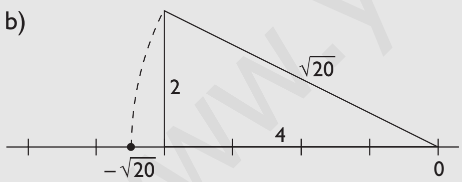
a) $\sqrt{13}$ b) $-\sqrt{20}$

Solución:

a)



b)



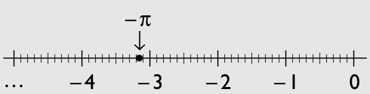
32 Represent gráficamente de forma aproximada:

a) $\sqrt{15}$ b) $-\pi$ c) $\sqrt{23}$ d) $-\sqrt{14}$

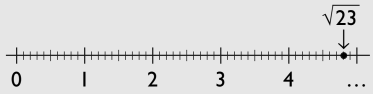
Solución:

a)

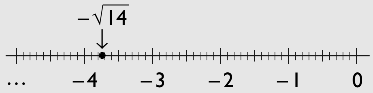
b)



c)



d)



33 Calcula:

a) $\frac{4}{5} + 3 - \frac{7}{15}$ b) $\frac{1}{6} - \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{5}{8}\right)$ d) $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3} - 2 + \frac{2}{5}\right)$

Solución:

a) $\frac{10}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{19}{25}$

34 Halla de forma exacta el lado de un cuadrado de 10 cm^2 de área y escribe qué tipo de número es.

Solución:

$\sqrt{10}$ cm

Es un número irracional.

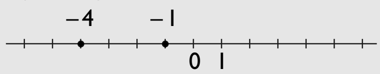
2. La recta real

35 Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos:

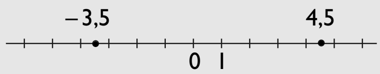
a) -4 y -1 b) $-3,5$ y $4,5$

Solución:

a) $d(-4, -1) = 3$



b) $d(-3,5; 4,5) = 8$



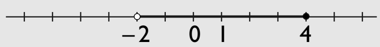
36 Escribe en forma de desigualdad los siguientes intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

a) $(-2, 4]$ b) $[-5, 1]$

c) $[3, +\infty)$ d) $(-\infty, -3)$

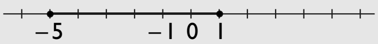
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x \leq 4\}$



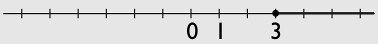
Semiabierto y semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -5 \le x \le 1\}$



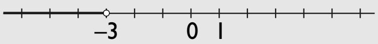
Cerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R}; 3 \le x < +\infty\}$



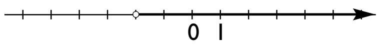
Semiabierto y semicerrado.

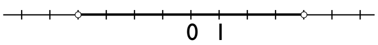
d) $\{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < -3\}$

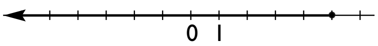


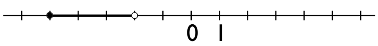
Abierto.

37 Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:

a) 

b) 

c) 

d) 

Solución:

a) $(-2, +\infty)$ Abierto.

b) $(-4, 4)$ Abierto.

c) $(-\infty, 5]$ Semiabierto y semicerrado.

d) $[-5, -2)$ Semiabierto y semicerrado.

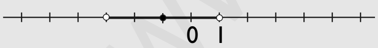
38 Representa gráficamente los siguientes entornos:

a) $E^*(1, 4)$ b) $E(-1, 2)$

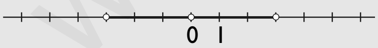
c) $E(-3, 1)$ d) $E^*(0, 3)$

Solución:

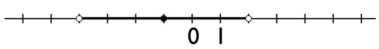
a) 

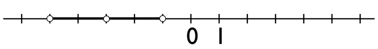
b) 

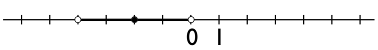
c) 

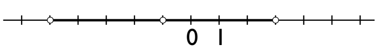
d) 

39 Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:

a) 

b) 

c) 

d) 

Solución:

a) $E(-1, 3)$

b) $E^*(-3, 2)$

c) $E(-2, 2)$

d) $E^*(-1, 4)$

3. Aproximaciones y errores

40 Calcula la parte entera y decimal de los siguientes números:

a) $-7{,}15$ b) $-3{,}14$ c) $4{,}25$ d) $2{,}72$

Solución:

a) $\text{Ent}(-7{,}15) = -8$
$\text{Dec}(-7{,}15) = 0{,}85$

b) $\text{Ent}(-3{,}14) = -4$
$\text{Dec}(-3{,}14) = 0{,}86$

c) $\text{Ent}(4{,}25) = 4$
$\text{Dec}(4{,}25) = 0{,}25$

d) $\text{Ent}(2{,}72) = 2$
$\text{Dec}(2{,}72) = 0{,}72$

41 Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

a) $35/8$ b) $13{,}4972$

c) $\sqrt{37}$ d) $2{,}6283$

Solución:

a) $4{,}375 \approx 4{,}38$ por exceso.

b) $13{,}50$ por exceso.

c) $6{,}082\ldots \approx 6{,}08$ por defecto.

d) $2{,}63$ por exceso.

42 Trunca a dos cifras decimales los siguientes números:

a) $35/8$ b) $13{,}4972$

c) $\sqrt{37}$ d) $2{,}6283$

Solución:

a) $4{,}375 \approx 4{,}37$

b) $13{,}49$

c) $6{,}082\ldots \approx 6{,}08$

d) $2{,}62$

43 Halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al redondear con dos cifras decimales los siguientes números:

a) 25/12 b) $\sqrt{8}$

c) 12,3402 d) $\sqrt{80}$

Solución:

a) 2,08

Error absoluto = 0,0033

Error relativo = 0,0016

b) 2,83

Error absoluto = 0,0016

Error relativo = 0,0006

c) 12,34

Error absoluto = 0,0002

Error relativo = 0,00002

d) 8,94

Error absoluto = 0,0042

Error relativo = 0,00048

44 Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 371 500 000 b) 435 900 000 000

c) 0,00000278 d) 0,000269

Solución:

a) $3{,}715 \cdot 10^8$ b) $4{,}359 \cdot 10^{11}$

c) $2{,}78 \cdot 10^{-6}$ d) $2{,}69 \cdot 10^{-4}$

45 Expresa en notación decimal los siguientes números:

a) $3{,}437 \cdot 10^9$ b) $2{,}33 \cdot 10^{-7}$

c) $1{,}2 \cdot 10^5$ d) $3{,}014 \cdot 10^{-9}$

Solución:

a) 3 437 000 000 b) 0,000000233

c) 120 000 d)0,000000003014

46 Opera y expresa el resultado en notación científica:

a) $7{,}5 \cdot 10^{12} - 3{,}4 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}8 \cdot 10^{15} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-6}$

c) $4{,}36 \cdot 10^{15} + 1{,}54 \cdot 10^{15}$

d) $5{,}74 \cdot 10^{20} : (1{,}64 \cdot 10^{-9})$

Solución:

a) $4{,}1 \cdot 10^{12}$ b) $2{,}56 \cdot 10^9$

c) $5{,}9 \cdot 10^{15}$ d) $3{,}5 \cdot 10^{29}$

4. Números combinatorios

47 Calcula el factorial de los números siguientes:

a) 7 b) 9

Solución:

a) 5 040

b) 362 880

48 Calcula los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{10}{9}$ c) $\binom{40}{40}$ d) $\binom{30}{1}$

Solución:

a) 15 b) 10

c) 1 d) 30

49 Comprueba que se cumple, en cada caso, la igualdad siguiente:

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$$

a) m = 7, p = 3

b) m = 10, p = 2

Solución:

a) $\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$

35 = 20 + 15

b) $\binom{10}{2} = \binom{9}{2} + \binom{9}{1}$

45 = 36 + 9

50 Calcula los términos de la fila 7ª del triángulo de Tartaglia.

Solución:

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

51 Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:

$$\binom{9}{x-1} = \binom{9}{x-2}$$

Solución:

x – 1 + x – 2 = 9

x = 6

Ejercicios y problemas

Para ampliar

52 Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $2 - \sqrt{5}$ b) $2/7 - 5/7$
c) π^2 d) $(0,2222\ldots)^2$

Solución:
a) Irracional. b) Racional.
c) Irracional. d) Racional.

53 Escribe tres números racionales entre 1,5 y 1,7

Solución:
$$\frac{1,5 + 1,7}{2} = 1,6$$
$$\frac{1,5 + 1,6}{2} = 1,55$$
$$\frac{1,5 + 1,55}{2} = 1,525$$

54 Escribe dos números irracionales entre 3,1 y 3,2

Solución:
$\pi = 3,14159\ldots$
$\sqrt{10} = 3,1622\ldots$

55 Expresa, mediante el número π, un número irracional que esté comprendido entre 0 y 1

Solución:
$\pi/4 = 0,7853\ldots$

56 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Solución:
$(1, 2)$

57 Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades:

a) $1 \le x \le 4$ b) $x > 2$
c) $-1 < x \le 5$ d) $x < 3$

Solución:
a) $[1, 4]$ b) $(2, +\infty)$
c) $(-1, 5]$ d) $(-\infty, 3)$

58 Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

a) $|x - 1| < 2$ b) $|x - 3| < 1$
c) $|x + 2| < 3$ d) $|x| < 4$

Solución:
a) $E(1, 2)$ b) $E(3, 1)$
c) $E(-2, 3)$ d) $E(0, 4)$

59 Redondea a dos decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

a) 25,4632 b) 74,0981
c) 32,7381 d) 91,9983

Solución:
a) 25,46 por defecto.
b) 74,10 por exceso.
c) 32,74 por exceso.
d) 92,00 por exceso.

Con calculadora

60 Halla con la calculadora el valor de los siguientes números con tres cifras decimales:

a) 2π b) $\pi + \sqrt{10}$
c) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ d) $\sqrt{30} + \sqrt{12}$

Solución:
a) 6,283 b) 6,304
c) 1,618 d) 8,941

61 Halla con la calculadora y expresa el resultado en notación científica:

a) $3,47 \cdot 10^{14} + 5,68 \cdot 10^{14}$
b) $2,898 \cdot 10^{20} : (8,4 \cdot 10^{8})$
c) $2,5 \cdot 10^{24} \cdot 3,25 \cdot 10^{6}$
d) $2,71 \cdot 10^{12} \cdot 3,21 \cdot 10^{-9} : (2,5 \cdot 10^{-10})$

Solución:
a) $9,15 \cdot 10^{14}$
b) $3,45 \cdot 10^{11}$
c) $8,125 \cdot 10^{30}$
d) $3,47964 \cdot 10^{13}$

Problemas

62 Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de 3 m de diámetro. ¿Qué clase de número es?

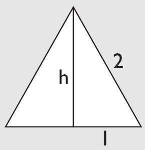
Solución:

$L = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi$ m

Es un número irracional.

63 Halla de forma exacta el área de un triángulo equilátero de 2 cm de lado. Clasifica el resultado como número racional o irracional.

Solución:

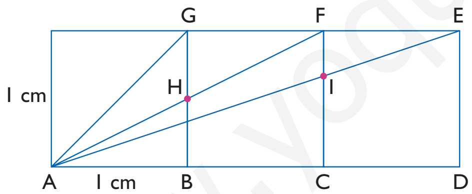


$h = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

$A = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2

Es un número irracional.

64 Halla de forma exacta las longitudes de los segmentos siguientes y clasifica los resultados como números racionales o irracionales:



a) BH b) CI c) AG

d) AF e) AE

Solución:

a) BH = 1/2. Número racional.

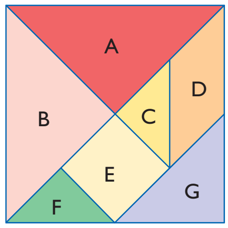
b) CI = 2/3. Número racional.

c) AG = $\sqrt{2}$. Número irracional.

d) AF = $\sqrt{5}$. Número irracional.

e) AE = $\sqrt{10}$. Número irracional.

65 La siguiente figura se conoce con el nombre de tangram chino. Si el lado del cuadrado mide 1 m, halla el área de cada una de las figuras que componen el tangram.



Solución:

A = B = 1/4 m^2

C = F = 1/16 m^2

D = E = G = 1/8 m^2

66 Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\sqrt{21}$

Solución:

[4, 5]

67 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número -2π

Solución:

$(-7, -6)$

68 La longitud de una varilla se aproxima a 1,34 m. ¿Entre qué valores se hallará la longitud real si la aproximación es por defecto? ¿Y si fuese por exceso?

Solución:

Entre 1,34 y 1,35

Entre 1,33 y 1,34

69 Las dimensiones de un cartón rectangular son 0,542 m y 0,354 m. Calcula su área y redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

0,19 m^2

70 Se construye un ortoedro de dimensiones 5,5 cm × 10,6 cm × 8,6 cm para almacenar medio litro de líquido. ¿Qué error relativo se está cometiendo?

Solución:

$V = 5{,}5 \cdot 10{,}6 \cdot 8{,}6 = 501{,}38 \text{ cm}^3$

$\text{Error relativo} = \dfrac{|500 - 501{,}38|}{500} = 0{,}00276$

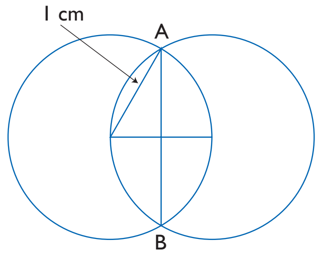
71 Se sabe que 4 g de hidrógeno contienen $1{,}2046 \cdot 10^{24}$ moléculas. Calcula la masa en gramos de una molécula de hidrógeno.

Solución:

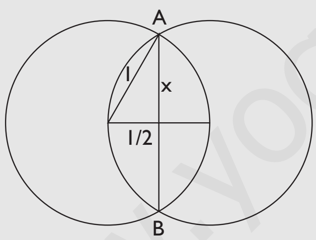
$4 : (1{,}2046 \cdot 10^{24}) = 3{,}321 \cdot 10^{-24}$ g

Para profundizar

72 Calcula la longitud del segmento AB en la figura siguiente y clasifica el resultado como número racional o irracional:



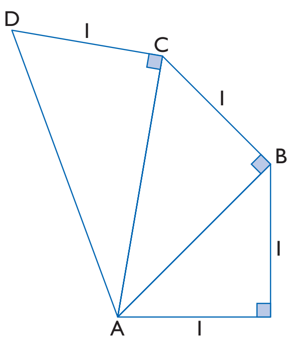
Solución:



$AB = 2\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm

Es un número irracional.

73 Calcula la longitud de los segmentos AB, AC y AD de la figura adjunta, y representa de forma exacta en la recta real los números obtenidos:

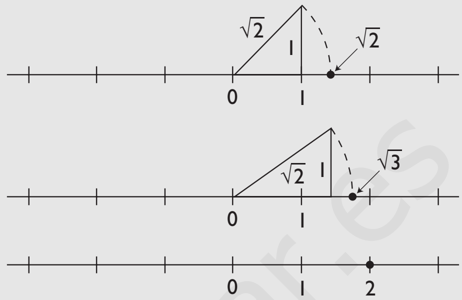


Solución:

$AB = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{3}$

$AD = \sqrt{3} = 2$



74 La distancia que hay del Sol a la Tierra es de $1{,}486 \cdot 10^8$ km. Si se toma la velocidad de la luz como 300 000 km/s, calcula el tiempo que tarda la luz del sol en llegar a la Tierra.

Solución:

$t = e/v$

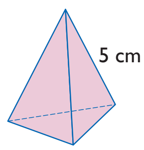
$t = 1{,}486 \cdot 10^8 : 300\,000 = 495{,}33 \text{ s} = 8 \text{ min } 15 \text{ s}$

75 Si el radio del Sol mide $6{,}96 \cdot 10^5$ km, calcula el volumen del Sol suponiendo que es una esfera.

Solución:

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (6{,}96 \cdot 10^5)^3 = 1{,}41 \cdot 10^{18} \text{ km}^3$

76 Halla el área y el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide 5 cm. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

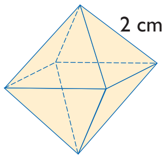
$A = a^2\sqrt{3}$

$A = 5^2\sqrt{3} = 43{,}30 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$V = \dfrac{5^3\sqrt{2}}{12} = 14{,}73 \text{ cm}^3$

77 Halla el área y el volumen de un octaedro regular cuya arista mide 2 cm. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

$A = 2a^2\sqrt{3}$

$A = 2 \cdot 2^2\sqrt{3} = 13{,}86\ \text{cm}^2$

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$V = \dfrac{2^3\sqrt{2}}{3} = 3{,}77\ \text{cm}^3$

Aplica tus competencias

78 Si se estima que la población de una ciudad es de 72 000 habitantes, da una cota de error absoluto y otra de error relativo.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

79 Da una cota de error absoluto y de error relativo para las siguientes estimaciones:

a) Los participantes de una manifestación contra la guerra han sido 132 000

b) La altura de un árbol es de 12 m

Solución:

a) Error absoluto < 500 habitantes.

Error relativo $\approx \dfrac{500}{132\,000} = 0{,}0038$

b) Error absoluto < 0,5 m

Error relativo $\approx \dfrac{0{,}5}{12} = 0{,}04$

Comprueba lo que sabes

1 Escribe la clasificación de los números reales y pon un ejemplo de cada uno de ellos.

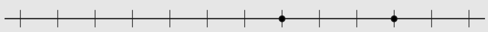
Solución:

$$\text{Reales } \mathbb{R} \begin{cases} \text{Racionales } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{Enteros } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{Naturales } \mathbb{N}\text{: } 0,\ 1 \\ \text{Negativos: } -3 \end{cases} \\ \text{Fraccionarios: } \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \text{Irracionales: } \sqrt{2} \end{cases}$$

2 Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos:

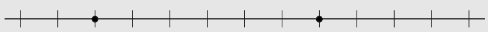
a) 1 y 4 b) –4 y 2

Solución:

a) 

0 1 4

d(1, 4) = 3

b) 

0 1 2

d(–4, 2) = 6

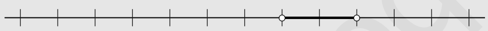
3 Escribe en forma de desigualdad los siguientes intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

a) (1, 3) b) [–2, 1)

c) (–∞, 2) d) [–1, +∞)

Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 3\}$



0 1 3

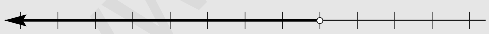
Abierto.

b) $\{x \in \mathbb{R};\ -2 \le x < 1\}$

–2 0 1

Semiabierto y semicerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R};\ -\infty < x < 2\}$



0 1 2

Abierto.

d) $\{x \in \mathbb{R};\ -1 \le x < +\infty\}$

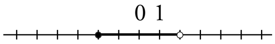
–1 0 1

Semiabierto y semicerrado.

4 Escribe los intervalos de los dibujos siguientes y clasifícalos:

a)

0 1

b) 

0 1

c)

0 1

d)

0 1

Solución:

a) (–4, 1) Abierto.

b) [–2, 2) Semicerrado y semiabierto.

c) (2, +∞) Abierto.

d) (–∞, –1] Semiabierto y semicerrado.

5 Halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

a) 38/15 b) $\sqrt{7}$

Solución:

a) $\dfrac{38}{15} = 2{,}53$

Error absoluto = 0,0033

Error relativo = 0,0013

b) $\sqrt{7} = 2{,}65$

Error absoluto = 0,0042

Error relativo = 0,0016

6 Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:

$$\binom{10}{x+1} = \binom{10}{x+3}$$

Solución:

$x + 1 + x + 3 = 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

7 Calcula el área de un triángulo equilátero de **x** cm de lado.

Solución:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$A = \frac{1}{2}x\,\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

8 La masa de la Tierra es $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, y la de la Luna es $7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg. Calcula cuántas veces es mayor la masa de la Tierra que la de la Luna.

Solución:

$5{,}974 \cdot 10^{24} : (7{,}348 \cdot 10^{22}) = 81{,}30$

Paso a paso

80 Calcula:

$$2\left(\frac{1}{3}+1\right)-\frac{5}{2}:\left(\frac{1}{2}-3\right)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

81 Halla la expresión decimal con 15 dígitos del siguiente número y clasifícalo como racional o irracional: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

82 Halla el error relativo que se comete al redondear el número $\sqrt{3}$ a dos decimales.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

83 Calcula: $3{,}5 \cdot 10^8 : (2{,}5 \cdot 10^{-5})$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

84 Calcula el factorial de 5

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

85 Calcula $\binom{8}{3}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

86 Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:

$$\binom{12}{x-2}=\binom{12}{x+2}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

87 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

88 Calcula:

a) $1-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3}:\left(\frac{2}{5}-1\right)$ d) $\frac{4}{7}\left(\frac{5}{2}+1\right)$

Solución:
a) 5/12 b) 1/6
c) – 10/9 d) 2

89 Halla la expresión decimal con 15 dígitos de los siguientes números y clasifícalos como racionales o irracionales:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{22}{15}$ c) π d) e

Solución:
a) 1,4142135623731
Número irracional.
b) 1,46666666666667
Número racional.
c) 3,14159265358979
Número irracional.
d) 2,71828182845905
Número irracional.

90 Halla el error absoluto y relativo que se comete al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

a) $\frac{58}{12}$ b) $\sqrt{6}$

Solución:
a) $58/12 = 4,83$
Error absoluto = 0,00333
Error relativo = 0,000689
b) $\sqrt{6} = 2,45$
Error absoluto = 0,00051
Error relativo = 0,000208

91 Opera y expresa en notación científica:
a) $5,4 \cdot 10^{15} \cdot 8,12 \cdot 10^{-9}$
b) $2,7 \cdot 10^{6} : (1,5 \cdot 10^{-4})$

Solución:
a) $4,3848 \cdot 10^{7}$
b) $1,8 \cdot 10^{10}$

92 Calcula el factorial de los números siguientes:
a) 6 b) 8

Solución:
a) 720 b) 40 320

93 Calcula los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{7}{5}$ b) $\binom{8}{3}$

c) $\binom{9}{7}$ d) $\binom{12}{6}$

Solución:
a) 21 b) 56 c) 36 d) 924

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

94 Aplica las propiedades de los números combinatorios y calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:

$$\binom{9}{x-1} = \binom{9}{x-2}$$

Solución:
x = 6

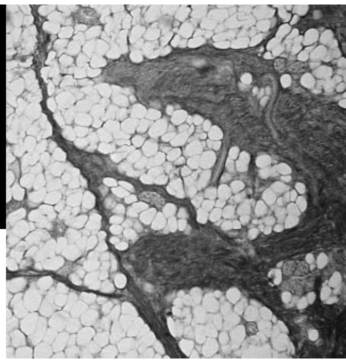
95 La distancia que separa el Sol de la Tierra es de $1,486 \cdot 10^{8}$ km. Si se toma la velocidad de la luz como 300 000 km/s, calcula el tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

Solución:
t = 495,33 s = 8,26 min

96 Si el radio del Sol mide $6,96 \cdot 10^{5}$ km, calcula el volumen del Sol suponiendo que es una esfera.

Solución:
$V = 1,4123 \cdot 10^{18}$ km^3

2 Potencias, radicales y logaritmos



1. Potencias de exponente natural y entero

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) 2^3 b) $(-2)^3$ c) -2^3 d) $-(-2)^3$

Solución:

a) 8 b) -8 c) -8 d) 8

APLICA LA TEORÍA

1 Calcula mentalmente los cinco primeros cuadrados perfectos.

Solución:

0, 1, 4, 9, 16

2 Calcula mentalmente:

a) 2^4 b) $(-2)^4$ c) -2^4 d) $-(-2)^4$

Solución:

a) 16 b) 16 c) -16 d) -16

3 Calcula mentalmente:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ c) $-\left(\frac{2}{3}\right)^3$ d) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

Solución:

a) $\frac{8}{27}$ b) $-\frac{8}{27}$ c) $-\frac{8}{27}$ d) $\frac{8}{27}$

4 Calcula mentalmente:

a) 0^7 b) $(-5)^0$ c) 1^6 d) $(-6)^1$

Solución:

a) 0 b) 1 c) 1 d) -6

5 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

a) $4,23^2$ b) $2,5^3$

c) $0,9^{12}$ d) $5,3 \cdot 10^7 \cdot 8,4 \cdot 10^3$

Solución:

a) 17,89 b) 15,63

c) 0,28 d) $4,45 \cdot 10^{11}$

6 Escribe en forma de potencia de base 2:

a) 32 b) 2 c) 1 d) 1/32

Solución:

a) 2^5 b) 2^1 c) 2^0 d) 2^{-5}

7 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

a) $(12,7^2 + 83) \cdot \sqrt{34,2}$

b) $(5,6^3 - 5,2 \cdot 47,5) : \sqrt{333,3}$

c) $(2,5^5 - 67,7 : 4,3) \cdot \sqrt{444,4}$

Solución:

a) 1 428,63

b) $-3,91$

c) 1 726,77

8 Calcula mentalmente:

a) $(3 + 4)^2$ b) $3^2 + 4^2$ c) $(5 - 3)^2$ d) $5^2 - 3^2$

Solución:

a) 49 b) 25 c) 4 d) 16

9 Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $x^3 \cdot x^4$ b) $x^7 : x^3$ c) $(x^3)^2$ d) $x^3 \cdot x^4 : x^5$

Solución:

a) x^7 b) x^4 c) x^6 d) x^2

10 Una pecera tiene forma cúbica y su arista mide 75 cm. Si está llena, ¿cuántos litros de agua contiene?

Solución:

$V = 75^3 = 421\,875$ cm^3 = 421,875 litros.

2. Radicales

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $\sqrt[3]{1\,000} = x$ b) $\sqrt[6]{x} = 10$ c) $\sqrt[x]{81} = 3$ d) $\sqrt[4]{16} = x$

Solución:

a) $x = 10$ b) $x = 1\,000\,000$ c) $x = 4$ d) $x = \pm 2$

APLICA LA TEORÍA

11 Calcula mentalmente el valor de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt{-36}$

Solución:

a) ± 5 b) -2 c) ± 2 d) No tiene raíces reales.

12 Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

a) $\sqrt{345{,}67}$ b) $\sqrt[3]{895{,}34}$

c) $\sqrt[4]{89{,}45}$ d) $\sqrt[5]{1\,000}$

Solución:

a) 18,59 b) 9,64

c) 3,08 d) 3,98

13 Escribe en forma de radical las potencias:

a) $5^{1/3}$ b) $x^{-1/2}$ c) $a^{2/3}$ d) $6^{-3/4}$

Solución:

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{6^3}}$

14 Escribe en forma de potencia los radicales:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{6^5}}$

Solución:

a) $7^{1/2}$ b) $a^{2/5}$ c) $a^{-1/3}$ d) $6^{-5/7}$

15 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{5^4}$ b) $\sqrt[6]{x^2}$ c) $\sqrt[8]{5^6}$ d) $\sqrt[12]{a^8}$

Solución:

a) 25 b) $\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$

16 Introduce dentro del radical el factor que está delante:

a) $3\sqrt{5}$ b) $a\sqrt[3]{4}$

c) $2^4 a\sqrt[5]{2a^2}$ d) $3^2x^3\sqrt[4]{5x}$

Solución:

a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt[3]{4a^3}$

c) $\sqrt[3]{2^{13}a^5}$ d) $\sqrt[4]{5 \cdot 3^8x^{13}}$

17 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{50}$　　b) $\sqrt[3]{32a^7}$

c) $\sqrt[4]{81a^{11}b^6}$　　d) $\sqrt[5]{64x^{17}y^{11}z}$

Solución:

a) $5\sqrt{2}$　　b) $2a^2\sqrt[3]{4a}$

c) $3a^2b\sqrt[4]{a^3b^2}$　　d) $2x^3y^2\sqrt[5]{2x^2yz}$

18 El volumen de un cubo es 2 m^3. ¿Cuánto mide la arista? Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$V = 2\ m^3$

$a = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$ m

3. Operaciones con radicales

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{9+16}$　　b) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$　　c) $\sqrt{25-9}$　　d) $\sqrt{25}-\sqrt{9}$

Solución:

a) 5　　b) 7　　c) 4　　d) 2

APLICA LA TEORÍA

19 Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $\sqrt{72}-\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{8}+\sqrt{200}$

b) $2\sqrt{75}-3\sqrt{12}+5\sqrt{27}-7\sqrt{48}+\sqrt{300}$

Solución:

a) $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+10\sqrt{2}=$
$=(6-5+3-2+10)\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{3}-6\sqrt{3}+15\sqrt{3}-28\sqrt{3}+10\sqrt{3}=$
$=(10-6+15-28+10)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

20 Utilizando la calculadora, halla la siguiente suma y resta de radicales. Redondea el resultado a dos decimales:

$4\sqrt{35}-7\sqrt{28}+2\sqrt{47}$

Solución:

0,34

21 Realiza los siguientes productos:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$　　b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{50}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$　　d) $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[8]{5}$

Solución:

a) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$　　b) $\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2}$

c) m.i.c.(2, 3) = 6

$\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{5^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{500}$

d) m.i.c.(6, 8) = 24

$\sqrt[24]{3^4}\cdot\sqrt[24]{5^3}=\sqrt[24]{3^4\cdot 5^3}=\sqrt[24]{10\,125}$

22 Realiza los siguientes cocientes:

a) $\sqrt{6}:\sqrt{2}$　　b) $\sqrt[3]{40}:\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{6}$　　d) $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{18}$

Solución:

a) $\sqrt{3}$　　b) $\sqrt[3]{8}=2$

c) m.i.c.(2, 3) = 6

$\sqrt[6]{4^2}:\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{4^2:6^3}=\sqrt[6]{16:216}=\sqrt[6]{2:27}=\sqrt[6]{\dfrac{2}{27}}$

d) m.i.c.(2, 3) = 6

$\sqrt[6]{9^2}:\sqrt[6]{18}=\sqrt[6]{9^2:18}=\sqrt[6]{81:18}=\sqrt[6]{9:2}=\sqrt[6]{\dfrac{9}{2}}$

23 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\sqrt[3]{5^2}$ … $(\sqrt[3]{5^2})^2$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ … $\sqrt[5]{7}$

Solución:

a) = b) ≠

24 Racionaliza:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

d) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{7}{\sqrt[3]{14}}$ f) $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\cdot\sqrt{3}}{3} = 2\cdot\sqrt{3}$

b) $\frac{10\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5} = 2\cdot\sqrt[3]{5^2}$

c) $\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} =$

$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

d) $\frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\sqrt{2}$

e) $\frac{7\cdot\sqrt[3]{14^2}}{\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[3]{14^2}} = \frac{7\cdot\sqrt[3]{14^2}}{14} = \frac{\sqrt[3]{14^2}}{2}$

f) $\frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3} =$

$= 5(2-\sqrt{3}) = 10-5\sqrt{3}$

4. Logaritmos

PIENSA Y CALCULA

Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $10^3 = x$ b) $10^x = 1\,000\,000$ c) $x^2 = 100$ d) $x^1 = 10$ e) $10^x = 1$

Solución:

a) x = 1 000 b) x = 6 c) x = ± 10 d) x = 10 e) x = 0

APLICA LA TEORÍA

25 Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $3^2 = x$ b) $x^3 = 27$ c) $3^x = 1/3$

Solución:

a) x = 9 b) x = 3 c) x = –1

26 Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $2^{-3} = x$ b) $x^3 = 8$ c) $2^x = 1/4$

Solución:

a) x = 1/8 b) x = 2 c) x = –2

27 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) log 100 b) log 10 c) log 0,001

Solución:

a) 2 b) 1 c) –3

28 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 1/8$

Solución:

a) 5 b) 0 c) –3

29 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) log 23,5 b) log 267 c) log 0,0456

Solución:

a) 1,3711 b) 2,4265 c) – 1,3410

30 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) L 3 b) L 23,7 c) L 0,5

Solución:

a) 1,0986 b) 3,1655 c) –0,6931

31 Utilizando las propiedades de los logaritmos y la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) $\log 3^{15}$ b) $\log \sqrt[7]{23}$ c) $\log (0{,}5^{30} \cdot 7^{23})$

Solución:

a) 15 log 3 = 7,1568

b) (log 23)/7 = 0,1945

c) 30 log 0,5 + 23 log 7 = 10,4064

32 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

a) log (7 + 5) … log 7 + log 5

b) $\log 5^2$ … 2 log 5

c) $\log \frac{6}{5}$ … log 6 – log 5

d) $\log \sqrt[3]{5}$ … $\log \frac{5}{3}$

Solución:

a) ≠ b) =

c) = d) ≠

33 Sabiendo que log 5 = 0,6990, halla:

a) log 2

b) log 20

Solución:

$\log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0{,}6990 =$

$= 0{,}3010$

$\log (2^2 \cdot 5) = 2 \log 2 + \log 5 =$

$= 2 \cdot 0{,}3010 + 0{,}6990 = 1{,}3010$

Ejercicios y problemas

1. Potencias de exponente natural y entero

34 Calcula mentalmente los cinco primeros cubos perfectos.

Solución:
0, 1, 8, 27, 64

35 Calcula mentalmente:

a) 3^4 b) $(-3)^4$ c) -3^4 d) $-(-3)^4$

Solución:
a) 81 b) 81 c) –81 d) –81

36 Calcula mentalmente:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$ c) $-\left(\frac{3}{2}\right)^3$ d) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

Solución:
a) $\frac{27}{8}$ b) $\frac{27}{8}$ c) $-\frac{27}{8}$ d) $-\frac{27}{8}$

37 Calcula mentalmente:

a) 0^{10} b) $\left(\frac{3}{4}\right)^0$ c) 1^{-5} d) $\left(\frac{3}{4}\right)^1$

Solución:
a) 0 b) 1 c) 1 d) $\frac{3}{4}$

38 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

a) $0,55^2$ b) $7,15^3$
c) $1,2^{10}$ d) $4,7 \cdot 10^{18} : 9,5 \cdot 10^5$

Solución:
a) 0,30 b) 365,53
c) 6,19 d) $4,95 \cdot 10^{22}$

39 Escribe en forma de potencia de base 3:

a) 81 b) 3 c) 1 d) $\frac{1}{27}$

Solución:
a) 3^4 b) 3^1 c) 3^0 d) 3^{-3}

40 Utilizando la calculadora, realiza las siguientes operaciones y redondea los resultados a dos decimales:

a) $(7,5^2 - 23,5) \cdot \sqrt{7,5}$
b) $(12,5^3 + 7,8 \cdot 12,76) : \sqrt{91}$
c) $(1,4^6 - 456,5 : 7,28) \cdot \sqrt{24,57}$

Solución:
a) 89,69
b) 215,18
c) –273,50

41 Calcula mentalmente:

a) $(5 + 6)^2$ b) $5^2 + 6^2$
c) $(10 - 8)^2$ d) $10^2 - 8^2$

Solución:
a) 121 b) 61
c) 4 d) 36

42 Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $x^{-2} \cdot x^5$ b) $x^3 : x^7$
c) $(x^{-4})^3$ d) $x^{-3} \cdot x^5 : x^{-4}$

Solución:
a) x^3 b) x^{-4}
c) x^{-12} d) x^6

2. Radicales

43 Calcula mentalmente el valor de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[4]{81}$ d) $\sqrt{-49}$

Solución:
a) ± 8
b) 4
c) ± 3
d) No tiene raíces reales.

44 Utilizando la calculadora, halla las siguientes raíces. Redondea los resultados a dos decimales.

a) $\sqrt{1\,000}$ b) $\sqrt[3]{100}$
c) $\sqrt[4]{1,25}$ d) $\sqrt[5]{524,5}$

Solución:
a) 31,62 b) 4,64
c) 1,06 d) 3,50

Ejercicios y problemas

45 Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

a) $x^{1/2}$ b) $5^{-1/3}$ c) $a^{3/4}$ d) $7^{-4/5}$

Solución:

a) $\sqrt{x}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\sqrt[4]{a^3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{7^4}}$

46 Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt[3]{5^2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{7^5}}$

Solución:

a) $a^{1/2}$ b) $5^{2/3}$ c) $a^{-1/4}$ d) $7^{-5/6}$

47 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2^6}$ b) $\sqrt[6]{x^3}$ c) $\sqrt[9]{a^6}$ d) $\sqrt[12]{5^9}$

Solución:

a) 8 b) $\sqrt{x}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $\sqrt[4]{5^3}$

48 Introduce dentro del radical el factor que está delante:

a) $5\sqrt{2}$ b) $a^2\sqrt[3]{5}$

c) $3^2a^4\sqrt[3]{3a}$ d) $5^2x^2y\sqrt[4]{5x^3y^2}$

Solución:

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{5a^6}$

c) $\sqrt[3]{3^7a^{13}}$ d) $\sqrt[4]{5^9x^{11}y^6}$

49 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{81x^{15}}$

c) $\sqrt[4]{64a^{17}b^9}$ d) $\sqrt[5]{128x^{19}y^{15}x^{10}}$

Solución:

a) $3\sqrt{2}$ b) $3x^5\sqrt[3]{3}$

c) $2a^4b^2\sqrt[4]{4ab}$ d) $2x^3y^3z^2\sqrt[5]{4x^4}$

3. Operaciones con radicales

50 Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{300}$

b) $3\sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + 2\sqrt{200}$

Solución:

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} =$
$= (5 - 2 + 3 - 4 + 10)\sqrt{3} = 12\sqrt{2}$

b) $15\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} =$
$= (15 + 12 - 10 + 20)\sqrt{2} = 37\sqrt{2}$

51 Utilizando la calculadora, halla la siguiente suma y resta de radicales. Redondea el resultado a dos decimales:

$5\sqrt{23} - 2\sqrt{47} + 7\sqrt{19}$

Solución:

40,78

52 Realiza los siguientes productos:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{10}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

Solución:

a) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$

c) m.i.c.(2, 3) = 6

$\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

d) m.i.c.(4, 6) = 12

$\sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

53 Realiza los siguientes cocientes:

a) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$ d) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

Solución:

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$

c) m.i.c.(2, 3) = 6

$\sqrt[6]{9^2} : \sqrt[6]{12^3} = \sqrt[6]{9^2 : 12^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2^6}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

d) m.i.c.(3, 5) = 15

$\sqrt[15]{2^5} : \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 : 3^3} = \sqrt[15]{32/27}$

54 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\sqrt[3]{7^2} \ \ldots \ (\sqrt{7})^3$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} \ \ldots \ \sqrt[6]{5}$

Solución:

a) ≠ b) =

55 Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{8}{\sqrt[3]{7^2}}$ c) $\frac{7}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Solución:

a) $\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\frac{8 \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{7}}{7}$

c) $\frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} =$

$= \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = 3(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

56 Racionaliza:

a) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{14}{3-\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{10 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{12}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{14(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{14(3+\sqrt{3})}{9-3} =$

$= \frac{14(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{7(3+\sqrt{3})}{3}$

4. Logaritmos

57 Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $2^5 = x$ b) $x^{-1} = 2$ c) $2^x = 1/4$

Solución:

a) $x = 32$ b) $x = 1/2$ c) $x = -2$

58 Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $5^{-3} = x$ b) $x^3 = 125$ c) $5^x = 1$

Solución:

a) $x = 1/125$ b) $x = 5$ c) $x = 0$

59 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log 1\,000$ b) $\log 1$ c) $\log 10^{-6}$

Solución:

a) 3 b) 0 c) –6

60 Halla mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$ b) $\log_3 1/27$ c) $\log_3 1$

Solución:

a) 2 b) –3 c) 0

61 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales:

a) log 405,75 b) log 1,9 c) log 0,0005

Solución:

a) 2,6083 b) 0,2788 c) –3,3010

62 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) L 5 b) L 25,8 c) L 0,034

Solución:

a) 1,6094 b) 3,2504 c) –3,3814

63 Utilizando las propiedades de los logaritmos y la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

a) $\log 2^{10}$ b) $\log \frac{867}{3}$ c) $\log (5^{23} : 3{,}4^{15})$

Solución:

a) $10 \log 2 = 3{,}0123$

b) $\log 867 - \log 3 = 2{,}4609$

c) $23 \log 5 - 15 \log 3{,}4 = 8{,}1041$

64 Sustituye los puntos suspensivos por igual, =, o distinto, ≠:

a) $\log (12 : 19) \cdots \log 12 - \log 19$

b) $\log \sqrt[3]{7} \cdots 3 \log 7$

c) $\log (22 + 8) \cdots \log 22 + \log 8$

d) $\log (22 + 8) \cdots \log 30$

Solución:

a) =

b) ≠

c) ≠

d) =

65 Sabiendo que log 2 = 0,3010, halla:

a) log 25 b) log 50

Solución:

$\log \frac{100}{4} = \log \frac{100}{2^2} = \log 100 - 2 \log 2 =$

$= 2 - 2 \cdot 0{,}3010 = 1{,}398$

$\log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0{,}3010 =$

$= 1{,}6990$

Para ampliar

66 Escribe en forma de radical las siguientes potencias y halla mentalmente el resultado:

a) $8^{1/3}$ b) $9^{-1/2}$ c) $25^{3/2}$ d) $8^{2/3}$

Solución:

a) $\sqrt[3]{8} = 2$

b) $\frac{1}{\sqrt{9}} = \pm \frac{1}{3}$

c) $(\sqrt{25})^3 = (\pm 5)^3 = \pm 125$

d) $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Efectúa las siguientes operaciones:

67 a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

Solución:

a) $3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

b) $3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

68 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Solución:

$3 - 2 = 1$

69 $3\sqrt{50} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{98}$

Solución:

$15\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 21\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

70 a) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$

Solución:

a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt{2}$

71 a) $\sqrt[3]{5}\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{7}$

Solución:

a) m.i.c.(3, 4) = 12

$\sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{5^7}$

b) m.i.c.(3, 4) = 12

$\sqrt[12]{7^4} : \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{7}$

72 Escribe con un solo radical:

a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

Solución:

a) $\sqrt[4]{a}$ b) $\sqrt[8]{x}$

Racionaliza:

73 a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

74 a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Solución:

a) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\frac{(1 - \sqrt{5})\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 5}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} - 1$

75 a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^2}}$

Solución:

a) $\frac{4\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2}}{2} = 2\sqrt[3]{2^2}$

b) $\frac{9\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}} = \frac{9\sqrt[3]{3}}{3} = 3\sqrt[3]{3}$

76 a) $\frac{21}{\sqrt[5]{7}}$ b) $\frac{35}{\sqrt[5]{7^3}}$

Solución:

a) $\frac{21\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[5]{7^4}} = \frac{21\sqrt[5]{7^4}}{7} = 3\sqrt[5]{7^4}$

b) $\frac{35\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3}\cdot\sqrt[5]{7^2}} = \frac{35\sqrt[5]{7^2}}{7} = 5\sqrt[5]{7^2}$

77 a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-\sqrt{6}}{3-2} = 3-\sqrt{6}$

b) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{6}+2}{3-2} = \sqrt{6}+2$

78 a) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5+2\sqrt{6}$

b) $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5-2\sqrt{6}$

Reduce al logaritmo de una sola expresión:

79 log 5 + log 6 – log 2

Solución:

$\log \frac{5\cdot 6}{2} = \log 15$

80 2 log 7 + 3 log 5

Solución:

$\log (7^2 \cdot 5^3) = \log 6\,125$

81 3 log a + 2 log b – 5 log c

Solución:

$\log \frac{a^3\cdot b^2}{c^5}$

82 2 log x – 5 log y + 3 log z

Solución:

$\log \frac{x^2\cdot z^3}{y^5}$

83 $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{3}\log y$

Solución:

$\log\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}\right) = \log \sqrt[6]{x^3y^2}$

Con calculadora

Utilizando la calculadora, halla el valor de la siguiente expresión. Redondea el resultado a dos decimales.

84 $(5{,}3^4 - 3{,}4\cdot 7{,}28)\sqrt[5]{12{,}2}$

Solución

1 260,47

85 a) $4\pi\cdot 7{,}5^2$ b) $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 7{,}5^3$

Solución

a) 706,86 b) 1 767,15

86 a) $5^{2,25}$ b) $7{,}5^{3,4}$

Solución

a) 37,38 b) 944,51

87 a) π^e b) e^π

Solución

a) 22,46 b) 23,14

Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos. Redondea el resultado a cuatro decimales.

88 a) $\log \pi$ b) $\log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ c) $\log e$

Solución
a) 0,4971 b) 0,2090 c) 0,4343

89 a) $L\ \pi$ b) $L\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ c) $L\ 10$

Solución
a) 1,1447 b) 0,4812 c) 2,3026

Problemas

90 Calcula el volumen de un cubo de área 5 m^2

Solución:

$6a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{5}{6}} = 0{,}91$ m

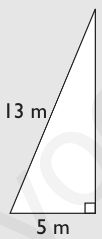
$V = a^3$

$V = 0{,}91^3 = 0{,}75\ m^3$

91 Una escalera está apoyada sobre la fachada de un edificio. Si la escalera mide 13 m de longitud y el pie de la escalera está a 5 m de la pared, ¿a qué altura de la pared llega la escalera?

Solución:

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m



92 Una población crece según la función dada por $P(t) = p \cdot 1{,}0025^t$, donde **t** es el tiempo en años. Si en el año 2000 tenía un millón de habitantes, siendo **p** la población inicial, ¿cuántos habitantes tendrá en el año 2050?

Solución:

$P(50) = 1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0025^{50} = 1\,132\,972$ habitantes.

93 Halla la arista de un cubo cuyo volumen es 7 m^3. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

$V = a^3$

$a^3 = 7 \Rightarrow a = \sqrt[3]{7} = 1{,}91$ m

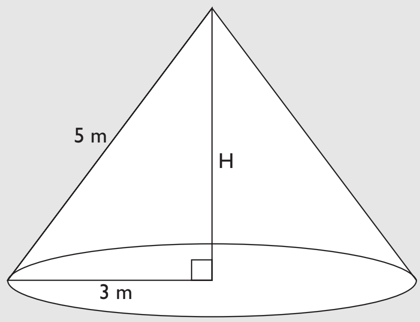
94 La cantidad de madera de un bosque crece según la función $y = x \cdot 1{,}025^t$, donde **t** es el tiempo en años y **x** es la cantidad de madera inicial. Si en el año 2000 el bosque tiene 1 000 km^3 de madera, ¿cuánta madera tendrá en el año 2100?

Solución:

$y = 1{,}025^{100} \cdot 1\,000 = 11\,813{,}72\ km^3$

95 Halla el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 3 m, y la generatriz, 5 m

Solución:



$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ m

$V = \dfrac{1}{3}\pi\, 3^2 \cdot 4 = 37{,}70\ m^3$

96 La fórmula del capital final en el interés compuesto es $C = c(1 + r)^t$, donde **C** es el capital final, **c** es el capital inicial, **r** es el tanto por uno y **t** es el tiempo en años. Calcula en cada caso la incógnita que falta:

a) c = 10 000 €, r = 0,05, t = 6 años

b) C = 15 000 €, r = 0,03, t = 8 años

c) C = 30 000 €, c = 15 000 €, t = 10 años

d) C = 50 000 €, c = 25 000 €, r = 0,07

Solución:

a) $C = 10\,000 \cdot 1{,}05^6 = 13\,401$ €

b) $c \cdot 1{,}03^8 = 15\,000 \Rightarrow c = 11\,841{,}14$ €

c) $15\,000 \cdot (1 + r)^{10} = 30\,000$

$(1 + r)^{10} = 2$

$10 \log (1 + r) = \log 2$

$\log (1 + r) = \dfrac{\log 2}{10}$

$\log (1 + r) = 0{,}0301$

$1 + r = 1{,}072$

$r = 0{,}072 = 7{,}2\%$

d) $25\,000 \cdot 1{,}07^t = 50\,000$

$1{,}07^t = 2$

$t \log 1{,}07 = \log 2$

$t = 10{,}24$ años.

97 Las medidas de las tarjetas de crédito están en proporción áurea, es decir, el cociente entre la medida del largo y la medida del ancho es $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Si miden 53 mm de ancho, ¿cuánto miden de largo?

Solución:

$\text{Longitud} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot 53 = 86$ mm

98 Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición. Si partimos de un cultivo de 2 000 amebas que se reproducen cada hora, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que tengamos $5 \cdot 10^{12}$ amebas?

Solución:

$2\,000 \cdot 2^t = 5 \cdot 10^{12}$

$2^t = 2{,}5 \cdot 10^9$

$t \log 2 = 9 + \log 2{,}5$

$t = 31{,}22$ horas.

99 Supongamos que, en cada uno de los 10 años siguientes, el IPC es de un 2%. Si un producto cuesta actualmente 100 €, ¿cuánto costará al cabo de los 10 años?

Solución:

$100 \cdot 1{,}02^{10} = 121{,}90$ €

Para profundizar

100 Racionaliza:

a) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Solución:

a) $\dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a - b} =$

$= \dfrac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$

b) $\dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a - b} =$

$= \dfrac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$

101 Una moto se devalúa un 15% cada año. Si nos ha costado 5 000 €, ¿qué valor tendrá al cabo de 10 años?

Solución:

$5\,000 \cdot 0{,}85^{10} = 984{,}37$ €

102 Halla el área y el volumen de una esfera de radio R = 3,5 m

Solución:

Área $= 4\pi \cdot R^2$

Área $= 4\pi \cdot 3{,}5^2 = 153{,}94\ m^2$

Volumen $= \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Volumen $= \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}5^3 = 179{,}59\ m^3$

103 Se ha obtenido experimentalmente que la presión atmosférica viene dada por la función $p(x) = 0{,}9^x$, donde **x** es la altura sobre el nivel del mar. La altura se mide en kilómetros, y la presión, en atmósferas.

a) Halla la presión en lo alto de una montaña de 3 500 m

b) Halla la altura a la que hay que subir para que la presión sea de 0,8 atmósferas.

Solución:

a) $P(3{,}5) = 0{,}9^{3,5} = 0{,}69$ atmósferas.

b) $0,9^x = 0,8$

$x \log 0,9 = \log 0,8$

$x = 2,118$ km = 2 128 m

104 La masa de un cuerpo radioactivo viene dada por la función $M = m(1/2)^t$, donde **t** es el número de períodos. Un período de semidesintegración es el tiempo necesario para que la masa se convierta en la mitad. Si tenemos 30 g de un cuerpo radioactivo que tiene un período de 25 años, ¿cuántos años tienen que transcurrir para que tengamos 5 g de dicho cuerpo?

Solución:

$30(1/2)^t = 5$

$(1/2)^t = 1/6$

$t \log 1/2 = \log 1/6$

$t = 2,58$

Nº de años = 2,58 · 25 = 64,5 años.

Aplica tus competencias

105 Una ciudad tiene 200 000 habitantes, y su población crece un 2,5% cada año. ¿Cuántos habitantes tendrá al cabo de 40 años?

Solución:
$P = 200\,000 \cdot 1{,}025^{40} = 537\,013$ habitantes.

106 Una población de algas en un lago cubren una superficie de 25 m^2. Si se reproducen a razón de 0,25 m^2 cada año, ¿cuántos metros cuadrados cubrirán al cabo de 30 años?

Solución:
$P = 25 \cdot 1{,}25^{30} = 20\,194{,}84\ m^2$

107 Tenemos una población inicial de 100 conejos en una gran llanura con comida abundante. Si se reproducen a razón de 20 conejos cada año, ¿cuántos conejos habrá al cabo de 5 años?

Solución:
$P = 100 \cdot 20^5 = 32\,000\,000$ conejos.

Comprueba lo que sabes

1 Define qué es un logaritmo decimal y pon un ejemplo.

Solución:
Los **logaritmos decimales** son los logaritmos en los que la base es 10. En este caso la base 10, que es el subíndice, no se escribe.

$$\log p = x \Leftrightarrow 10^x = p$$

Ejemplo
$\log 1\,000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

2 Escribe en forma de potencia de base 2:
a) 64
b) 1
c) 2
d) $\frac{1}{8}$

Solución:
a) 2^6 b) 2^0
c) 2^1 d) 2^{-3}

3 Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:
a) $\sqrt{98}$
b) $\sqrt[3]{81x^8}$
c) $\sqrt[4]{128a^{15}b^{10}}$
d) $\sqrt[5]{64x^{18}y^{12}z^{10}}$

Solución:
a) $7\sqrt{2}$
b) $3x^2\sqrt[3]{3x^2}$
c) $2a^3b^2\sqrt[4]{2^3a^3b^2}$
d) $2x^3y^2z^2\sqrt[5]{2x^3y^2}$

4 Racionaliza:
a) $\frac{12}{\sqrt{6}}$
b) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$
c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Solución:
a) $\frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$
b) $\frac{8\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}} = \frac{8\sqrt[3]{2^2}}{2} = 4\sqrt[3]{2^2}$
c) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3} =$
$= \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}$

5 Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:
a) $2^{-4} = x$
b) $x^3 = -8$
c) $2^x = 1/8$

Solución:
a) $x = \frac{1}{16}$
b) $x = -2$
c) $x = -3$

6 Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, halla:
a) log 5
b) log 50

Solución:
a) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$
b) $\log 50 = \log (5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 =$
$= 0{,}6990 + 1 = 1{,}6990$

7 Halla la diagonal de un cubo de forma exacta, es decir, da el resultado en forma de un radical, cuando el volumen mide 5 m^3

Solución:
$V = a^3$
$a^3 = 5 \Rightarrow a = \sqrt[3]{5}$
$d = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$
$d = \sqrt[3]{5}\sqrt{3} = \sqrt[6]{5^2}\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{5^2 3^3} = \sqrt[6]{675}$ m

8 Una célula se reproduce por bipartición cada 5 horas. Si se parte inicialmente de 400 células, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya 1 millón de células?

Solución:

$400 \cdot 2^t = 1\,000\,000$

$2^t = 2\,500$

$t \log 2 = \log 2\,500$

$t = \dfrac{\log 2\,500}{\log 2} = 11{,}29$

Nº de horas = $11{,}29 \cdot 5 = 56{,}45$ horas.

Paso a paso

108 Calcula: $2{,}5^3$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

109 Calcula: $(3^5 - 19) \cdot \sqrt{28{,}09}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

110 Calcula: $\sqrt[5]{47}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111 Calcula: $3\sqrt{50} - 4\sqrt{18}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112 Racionaliza: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

113 Racionaliza: $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

114 Calcula: log 25,43

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

115 Calcula: L 18,56

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

116 Un coche cuesta 30 000 € y se devalúa cada año un 17%. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 6 000 €.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

117 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

118 Calcula:

a) $(12{,}7^2 + 83) \cdot \sqrt{34{,}2}$

b) $(5{,}6^3 - 5{,}2 \cdot 47{,}5) : \sqrt{333{,}3}$

Solución:
a) 1 428,6
b) – 3,9101

119 Calcula:

a) $\sqrt{345{,}67}$ b) $\sqrt[3]{895{,}34}$

c) $\sqrt[4]{89{,}45}$ d) $\sqrt[5]{1000}$

Solución:
a) 18,592
b) 9,6382
c) 3,0754
d) 3,9811

120 Calcula:

a) $\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$

b) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27}$

Solución:
a) $4\sqrt{2}$
b) $19\sqrt{2}$

121 Racionaliza:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Solución:
a) $2 \cdot \sqrt{3}$
b) $2 \cdot \sqrt{5}$
c) $-\sqrt{3} + \sqrt{5}$

122 Calcula:

a) log 23,5 b) log 267 c) log 0,0456

Solución:
a) 1,3711
b) 2,4265
c) – 1,341

123 Calcula:
a) L 3 b) L 23,7 c) L 0,5

Solución:
a) 1,0986
b) 3,1655
c) – 0,69315

124 Calcula:
a) $\log 3^{15}$ b) $\log \sqrt[7]{23}$ c) $\log (0{,}5^{30} \cdot 7^{23})$

Solución:
a) 7,1568
b) 0,19453
c) 10,406

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

125 Una pecera tiene forma cúbica y la arista mide 75 cm. Si está llena, ¿cuántos litros de agua contiene?

Solución:
$V = 7{,}5^3 = 421{,}88\ dm^3 = 421{,}88$ litros.

126 Supongamos que en cada uno de los 10 años siguientes el IPC es de un 2%. Si un producto cuesta hoy 100 €, ¿cuánto costará al cabo de los 10 años?

Solución:
$100 \cdot 1{,}02^{10} = 121{,}9$ €

127 Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición. Si partimos de un cultivo de 2 000 amebas que se reproducen cada hora, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que tengamos $5 \cdot 10^{12}$ amebas?

Solución:
$2000 \cdot 2^t = 5 \cdot 10^{12}$
$t = 31{,}219$ años.

BLOQUE II

Álgebra

3 Polinomios y fracciones algebraicas

1. Binomio de Newton

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla mentalmente:

a) $(x + 1)^2$ b) $(x - 1)^2$ c) $(x + 1)(x - 1)$

Solución:

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 - 2x + 1$ c) $x^2 - 1$

APLICA LA TEORÍA

1 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x + 1)^3$$

Solución:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x - 2)^4$$

Solución:

$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

3 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x + y)^5$$

Solución:

$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

4 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(\frac{x}{2} - y\right)^6$$

Solución:

$$\frac{x^6}{64} - \frac{3x^5y}{16} + \frac{15x^4y^2}{16} - \frac{5x^3y^3}{2} + \frac{15x^2y^4}{4} - 3xy^5 + y^6$$

5 Halla el término séptimo en el desarrollo de:

$$(2x - y)^{10}$$

Solución:

Como se pide el término 7, r = 6

$$T_7 = T_{6+1} = (-1)^6 \binom{10}{6} (2x)^4y^6 = 3\,360x^4y^6$$

6 Calcula el término en el que el grado de **x** es 2 en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

Solución:

$$T_{r+1} = \binom{12}{r} x^{12-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{12}{r} x^{12-2r}$$

Luego

$12 - 2r = 2 \Rightarrow r = 5$

El término que se pide es:

$$T_6 = T_{5+1} = \binom{12}{5} x^2 = 792x^2$$

2. Teorema del resto y del factor

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 9$ para los valores siguientes:

a) $x = 0$ b) $x = 1$

Solución:

a) $P(0) = 9$ b) $P(1) = 11$

APLICA LA TEORÍA

7 Calcula P(x) : Q(x), siendo:

$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8$

$Q(x) = x^2 - 2x - 1$

Solución:

$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$

$R(x) = 48x + 28$

8 Halla P(x) : Q(x) por Ruffini, siendo:

$P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

$Q(x) = x + 3$

Solución:

$C(x) = 2x^2 - 3$

$R(x) = 8$

9 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$

a) Para $x = 2$ b) Para $x = -2$

Solución:

a) $P(2) = -2$

b) $P(-2) = 26$

10 ¿Cuál de estos números: 2 o –2 es raíz del polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x - 24$?

Solución:

$P(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ es raíz de P(x)

$P(-2) = -96 \neq 0 \Rightarrow x = -2$ no es raíz de P(x)

11 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir:

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ entre $x - 3$

Solución:

Resto = P(3) = 23

12 Comprueba mentalmente, y sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ es divisible entre $x - 1$

Solución:

Resto = P(1) = 0

13 Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 5

$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$

Solución:

Por el teorema del resto:

$P(-1) = 5 \Rightarrow k + 9 = 5 \Rightarrow k = -4$

14 Halla el valor de **k** para que el polinomio

$P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$

sea divisible entre $x - 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$P(2) = 0 \Rightarrow 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2$

3. Factorización de polinomios

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x + 9$ c) $x^2 - 4x + 4$ d) $x^2 - 4$

Solución:

a) $x(x + 2)$
Raíces:
$x = 0, x = -2$

b) $(x + 3)^2$
Raíces:
$x = -3$

c) $(x - 2)^2$
Raíces:
$x = 2$

d) $(x + 2)(x - 2)$
Raíces:
$x = -2, x = 2$

APLICA LA TEORÍA

15 Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 5x$ b) $x^2 - 9$
c) $x^2 + 2x + 1$ d) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

a) $x(x + 5)$ b) $(x + 3)(x - 3)$
c) $(x + 2)^2$ d) $(x - 3)^2$

16 Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 4x$ b) $x^3 - 2x^2 + x$
c) $x^4 - 25x^2$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x$

Solución:

a) $x(x + 2)(x - 2)$
Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$

b) $x(x - 1)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$

c) $x^2(x + 5)(x - 5)$
Las raíces son: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 5$

d) $x(x + 3)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = -3$

17 Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
c) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$
d) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

Solución:

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$

b) $(x - 1)^2(x - 3)$
$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$

c) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$
$x_1 = -1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$

d) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$
$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$

18 Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = -1, x_2 = 3$
b) $x_1 = 2, x_2 = 0$
c) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$
d) $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$

Solución:

a) $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$
b) $x(x - 2) = x^2 - 2x$
c) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
d) $x(x - 2)^2(x + 3) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x$

19 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
$Q(x) = x^2 - x$

b) $P(x) = x^2 - 4$
$Q(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

c) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$
$Q(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$

d) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Solución:

a) $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$
$Q(x) = x(x - 1)$
$M.C.D.(P(x), Q(x)) = x - 1$
$m.c.m. (P(x), Q(x)) = x(x - 1)^2(x - 2)$

b) $P(x) = (x - 2)(x + 2)$
$Q(x) = (x + 2)^2(x - 3)$
$M.C.D.(P(x), Q(x)) = x + 2$
$m.c.m. (P(x), Q(x)) = (x - 2)(x + 2)^2(x - 3)$

c) $P(x) = x^2(x + 1)(x - 2)$
$Q(x) = x(x + 1)^2(x - 3)$
$M.C.D.(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$
$m.c.m. (P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

d) $P(x) = (x - 2)^2(x + 3)$
$Q(x) = (x - 2)^2(x - 1)$
$M.C.D.(P(x), Q(x)) = (x - 2)^2$
$m.c.m. (P(x), Q(x)) = (x - 2)^2(x - 1)(x + 3)$

4. Fracciones algebraicas

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente el numerador y el denominador, y simplifica la siguiente fracción:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x(x + 1)}{x - 1}$$

APLICA LA TEORÍA

20 Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador, y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - x}{3x - 3}$ b) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

Solución:

a) $\dfrac{x(x - 1)}{3(x - 1)} = \dfrac{x}{3}$

b) $\dfrac{(x - 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

21 Completa para que se verifique la igualdad:

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{2x - 4}{\dots}$

b) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{\dots}{x - 4}$

Solución:

a) $2x^2 - 10x + 12$

b) $x + 1$

22 Calcula:

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x + 1}$

b) $\dfrac{3}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x - 2}$

Solución:

a) $\dfrac{3x + 2}{x(x - 1)}$

b) $\dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4}$

23 Efectúa:

a) $\dfrac{x+1}{x-2} \cdot \dfrac{x^2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x+2}{x+1} \cdot \dfrac{x^2+x}{x^2-4}$

Solución:

a) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

b) $\dfrac{x}{x-2}$

24 Calcula:

a) $\dfrac{x+3}{x+2} : \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

b) $\dfrac{2x^2+x}{x^2-1} : \dfrac{2x+1}{3x^2-4}$

Solución:

a) $\dfrac{x-2}{x-3}$

b) $\dfrac{3x^3-4x}{x^2-1}$

25 Opera y simplifica:

a) $\left(x + \dfrac{4x-1}{x-4}\right)\dfrac{2}{x-1}$

b) $\left(\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{1}{x-2}\right) : \left(1 + \dfrac{2}{x-2}\right)$

Solución:

a) $\dfrac{2(x+1)}{x-4}$

b) $\dfrac{x+3}{x(x+2)}$

1. Binomio de Newton

26 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$(2x - y)^3$

Solución:

$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

27 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^5$

Solución:

$\frac{5}{x} + \frac{10}{x^2} + \frac{10}{x^3} + \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x^5} + 1$

28 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$(x + 2y)^6$

Solución:

$x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 +$
$+ 192xy^5 + 64y^6$

29 Halla el término octavo en el desarrollo de:

$\left(x - \frac{y}{2}\right)^{12}$

Solución:

Como se pide el término 8, r = 7

$T_8 = T_{7+1} = (-1)^7 \binom{12}{7} x^5 \left(\frac{y}{2}\right)^7 = -\frac{99}{16}x^5y^7$

30 Halla el coeficiente de x^5 en el desarrollo de:

$\left(3x - \frac{1}{x}\right)^7$

Solución:

$T_{r+1} = (-1)^r \binom{7}{r} (3x)^{7-r} \frac{1}{x^r} = (-1)^r \binom{7}{r} 3^{7-r} x^{7-2r}$

Luego

$7 - 2r = 5 \Rightarrow r = 1$

El término que se pide es:

$T_2 = T_{1+1} = -\binom{7}{1} (3x)^6 = -5\,103x^5$

2. Teorema del resto y del factor

31 Calcula P(x) : Q(x), siendo:

$P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 20x - 25$

$Q(x) = 2x^3 - 4x + 1$

Solución:

$C(x) = 2x^2 + x - 2$

$R(x) = 12x^2 + 11x - 23$

32 Calcula P(x) : Q(x), siendo:

$P(x) = 2x^7 + x^6 - 8x^5 - 3x^4 + x^2 + 4$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

Solución:

$C(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x - 7$

$R(x) = -7x^2 + x - 3$

33 Calcula P(x) : Q(x) por Ruffini, siendo:

$P(x) = x^4 - 6x^3 + 2x - 6$

$Q(x) = x - 3$

Solución:

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 25$

$R(x) = -81$

34 Halla P(x) : Q(x) por Ruffini, siendo:

$P(x) = x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

$Q(x) = x + 2$

Solución:

$C(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x - 14$

$R(x) = 24$

35 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio, para los valores que se indican:

$P(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

a) Para x = 2 b) Para x = –2

Solución:

a) P(2) = 29

b) P(–2) = –3

36 Halla si los valores 5 y 3 son raíces del siguiente polinomio:

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

Solución:

$P(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ es raíz de P(x)

$P(3) = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 3$ no es raíz de P(x)

37 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 5$ entre $x + 3$

Solución:
Por el teorema del resto:
Resto $= P(-3) = 44$

38 Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea -3
$(x^4 + kx^3 - kx + 5) : (x - 2)$

Solución:
Por el teorema del resto:
$P(2) = -3 \Rightarrow 6k + 21 = -3 \Rightarrow k = -4$

39 Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 21$ es divisible entre $x + 3$

Solución:
Por el teorema del factor:
Resto $= P(-3) = 0$

40 Halla el valor de **k** para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + x - 6$ sea divisible entre $x + 2$

Solución:
Por el teorema del factor:
$P(-2) = 0 \Rightarrow -4k - 24 = 0 \Rightarrow k = -6$

3. Factorización de polinomios

41 Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:
a) $x^2 - 25$ b) $x^2 - 8x + 16$
c) $x^4 - 2x^2 + 1$ d) $x^2 + 10x + 25$

Solución:
a) $(x - 5)(x + 5)$
b) $(x - 4)^2$
c) $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$
d) $(x + 5)^2$

42 Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:
a) $16x^3 - 4x$ b) $x^4 + 2x^3 + x^2$
c) $2x^4 - 18x^2$ d) $2x^3 + 12x^2 + 18x$

Solución:
a) $4x(4x^2 - 1) = 4x(2x + 1)(2x - 1)$
Las raíces son:
$x_1 = 0, x_2 = -1/2, x_3 = 1/2$
b) $x^2(x + 1)^2$
Las raíces son:
$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = -1$
c) $2x^2(x + 3)(x - 3)$
Las raíces son:
$x_1 = x_2 = 0, x_3 = -3, x_4 = 3$
d) $2x(x + 3)^2$
Las raíces son:
$x_1 = 0, x_2 = x_3 = -3$

43 Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:
a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
b) $x^3 - 2x^2 - 3x$
c) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$
d) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2$

Solución:
a) $(x - 3)(x + 1)^2$
Las raíces son:
$x_1 = 3, x_2 = x_3 = -1$
b) $x(x + 1)(x - 3)$
Las raíces son:
$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$
c) $(x - 1)(x - 2)^2(x + 3)$
Las raíces son:
$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$
d) $x^2(x - 1)^2(x - 2)$
Las raíces son:
$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = 1, x_5 = 2$

44 Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:
a) $x_1 = 2, x_2 = -3$
b) $x_1 = -2, x_2 = 1$
c) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$
d) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 2$

Solución:
a) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$
b) $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

c) $(x + 1)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
d) $x(x - 1)(x - 2)^2 = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$

45 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x$
$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$
$Q(x) = x^2 - 3x + 2$

c) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$
$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Solución:

a) $P(x) = x(x - 2)^2$
$Q(x) = x(x + 2)(x - 2)$
M.C.D.$(P(x), Q(x)) = x(x - 2)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x(x - 2)^2(x + 2)$

b) $P(x) = (x - 1)(x + 3)$
$Q(x) = (x - 1)(x - 2)$
M.C.D.$(P(x), Q(x)) = x - 1$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

c) $P(x) = x^2(x - 1)(x - 3)$
$Q(x) = x(x - 1)^2$
M.C.D.$(P(x), Q(x)) = x(x - 1)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)^2(x - 3)$

d) $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$
$Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$
M.C.D.$(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x - 2)$
m.c.m. $(P(x), Q(x)) = (x - 1)^2(x - 2)^2$

4. Fracciones algebraicas

46 Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{(x + 2)^2}{x^2 - 4}$ b) $\dfrac{x^2}{x^2 - x}$

c) $\dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3}$ d) $\dfrac{9x^2 + 6x + 1}{3x + 1}$

Solución:

a) $\dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

b) $\dfrac{x^2}{x(x - 1)} = \dfrac{x}{x - 1}$

c) $\dfrac{(2x + 3)(2x - 3)}{2x - 3} = 2x + 3$

d) $\dfrac{(3x + 1)^2}{3x + 1} = 3x + 1$

47 Calcula:

a) $\dfrac{2}{x + 3} + \dfrac{2}{x - 3}$ b) $\dfrac{8}{x^2 + 2x} - \dfrac{4x}{2x + 4}$

c) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x + 1}{x^2 + x}$ d) $\dfrac{1}{2x - 1} - \dfrac{x + 1}{(2x - 1)^2}$

Solución:

a) $\dfrac{4x}{(x + 3)(x - 3)}$ b) $\dfrac{2(2 - x)}{x}$

c) $\dfrac{1 - x}{x^2}$ d) $\dfrac{x - 2}{(2x - 1)^2}$

48 Efectúa:

a) $\dfrac{2x}{x - 2} \cdot \dfrac{x^2 - 4}{2}$ b) $\dfrac{3x + 3}{3x} \cdot \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $x(x + 2)$

b) $\dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x^3 - 9x}$

49 Calcula:

a) $\dfrac{3x}{2x - 2} : \dfrac{2x}{x - 1}$ b) $\dfrac{x^2 - x}{x - 3} : \dfrac{4x - 4}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{x(x + 3)}{4}$

50 Opera y simplifica:

a) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)\dfrac{3x^2}{x + 2}$

b) $\left(x + \dfrac{x}{1 - x}\right) : \left(x - \dfrac{x}{1 - x}\right)$

Solución:

a) 3

b) $\dfrac{x - 2}{x}$

Para ampliar

51 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)^5$$

Solución:

$$x^5 + \frac{5x^4}{y} + \frac{10x^3}{y^2} + \frac{10x^2}{y^3} + \frac{5x}{y^4} + \frac{1}{y^5}$$

52 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^4$$

Solución:

$$\frac{x^8}{16} + \frac{x^7}{2} + \frac{3x^6}{2} - 2x^5 + x^4$$

53 Halla el término séptimo en el desarrollo de:

$$\left(\frac{x}{2} + y\right)^{11}$$

Solución:

Como se pide el término 7, r = 6

$$T_7 = T_{6+1} = \binom{11}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^5 y^6 = \frac{231}{16}x^5y^6$$

54 Halla el término decimosegundo en el desarrollo de:

$$\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^{15}$$

Solución:

Como se pide el término 12, r = 12

$$T_{12} = T_{11+1} = (-1)^{11}\binom{15}{11}(2x)^4\left(\frac{1}{2x}\right)^{11} = -\frac{1365}{128x^7}$$

55 Calcula el coeficiente del término que tiene grado 9 en el desarrollo de:

$$(x - 2x^2)^5$$

Solución:

$$T_{r+1} = (-1)^r\binom{5}{r}x^{5-r}(2x^2)^r = (-1)^r\binom{5}{r}2^r x^{5+r}$$

Luego

$5 + r = 9 \Rightarrow r = 4$

El término que se pide es:

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{5}{4}x(2x^2)^4 = 80x^9$$

56 Halla un polinomio que al ser dividido entre:

$x^3 - 4x + 2$

se obtenga de cociente

$x^2 + 2x - 3$

y de resto

$5x + 4$

Solución:

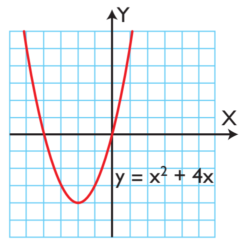
$(x^3 - 4x + 2)(x^2 + 2x - 3) + 5x + 4 =$

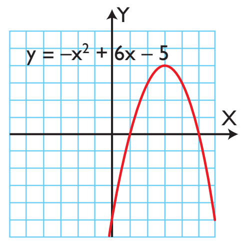
$= x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 21x - 2$

57 Observando las gráficas siguientes, halla las raíces de los polinomios:

$P(x) = x^2 + 4x$

$Q(x) = -x^2 + 6x - 5$





Solución:

Las raíces de P(x) son: $x_1 = -4, x_2 = 0$

Las raíces de Q(x) son: $x_1 = 1, x_2 = 5$

58 Halla el valor de k para que el polinomio

$P(x) = x^4 + 2x^2 + kx + 3$

sea divisible por x + 3

Solución:

Por el teorema del factor:

$P(-3) = 0 \Rightarrow 102 - 3k = 0 \Rightarrow k = 34$

59 Halla el valor de **k** para que el resto de la división del polinomio

$P(x) = 2x^3 - x + k$

entre $x - 2$ sea 3

Solución:

Por el teorema del resto:

Resto $= P(2) = 3 \Rightarrow k + 14 = 3 \Rightarrow k = -11$

60 Di si son exactas las siguientes divisiones sin hacer la división:

a) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 32) : (x + 2)$

Solución:

a) Resto $= (-1)^4 - 1 = 0 \Rightarrow$ Es exacta.

b) Resto $= (-2)^5 - 32 = -64 \Rightarrow$ No es exacta.

Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

61 $x^4 - 2x^3 - x + 2$

Solución:

$(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$

Las raíces reales son:

$x_1 = 1, x_2 = 2$

62 $x^4 - 2x^2 + 1$

Solución:

$(x + 1)^2(x - 1)^2$

Las raíces son:

$x_1 = x_2 = -1, x_3 = x_4 = 1$

63 $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$

Solución:

$(x - 2)(x + 3)(x^2 + 2x - 1)$

Las raíces reales son:

$x_1 = 2, x_2 = -3$

64 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Solución:

$(x - 1)(x + 2)(x - 4)$

Las raíces son:

$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4$

65 $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Solución:

$(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)$

Las raíces son:

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 3$

66 $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

Solución:

$(x + 2)(x - 1)^3$

Las raíces son:

$x_1 = -2, x_2 = x_3 = x_4 = 1$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

67 $\dfrac{2x - 1}{4x^2 - 2x}$

Solución:

$\dfrac{1}{2x}$

68 $\dfrac{x^2 - x}{x^4 - x^2}$

Solución:

$\dfrac{1}{x(x + 1)}$

69 $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 5}$

Solución:

$\dfrac{x + 2}{x + 5}$

70 $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + x + 10}$

Solución:

$\dfrac{x + 3}{x^2 - 2x + 5}$

71 $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - 4x}$

Solución:

$\dfrac{x + 5}{x(x + 2)}$

Efectúa las operaciones siguientes y simplifica los resultados:

72 $\frac{2x+1}{x+4} - \frac{2x-3}{x-2}$

Solución:
$\frac{-8x+10}{x^2+2x-8}$

73 $\frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{1}{x^3-x}$

Solución:
$\frac{2x+1}{x^2+x}$

74 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}$

Solución:
$\frac{2}{x^3-x}$

75 $1 + \frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+x}$

Solución:
$\frac{x^2-x+1}{x^2}$

76 $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$

Solución:
$\frac{-x^2+x+2}{2}$

77 $\frac{2x+2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2}$

Solución:
$\frac{2x}{x+2}$

78 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(2 - \frac{x}{x+1}\right) : (x+2)$

Solución:
$\frac{1}{x}$

79 $\left(\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x^2-4}\right) : \left(4 + \frac{12}{x-2}\right)$

Solución:
$\frac{2x-1}{4x^2+12x+8}$

80 $\left(\frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{2x}\right) : \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{2}{x^2+x}\right)$

Solución:
$\frac{x^2+x}{2}$

81 $\left(\frac{9-6x}{x^2} + 1\right) : \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right)$

Solución:
$\frac{-3x+9}{x^2+3x}$

82 $\frac{3x+9}{x+6}\left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x-3}\right)$

Solución:
$\frac{1}{x-1}$

Problemas

83 Calcula los valores de **m** y **n** para que el polinomio:

$P(x) = x^4 + x^3 + mx^2 - 3x + n$

sea divisible por $x + 1$ y $x - 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$P(-1) = 0 \Rightarrow m + n + 3 = 0$

$P(2) = 0 \Rightarrow 4m + n + 18 = 0$

Resolviendo el sistema:

$m = -5, n = 2$

84 Calcula los valores de **m** y **n** para que el polinomio:

$P(x) = x^4 + mx^3 + 2x^2 + nx - 24$

sea divisible por $x + 2$ y $x - 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$P(-2) = 0 \Rightarrow -8m - 2n = 0$

$P(3) = 0 \Rightarrow 27m + 3n + 75 = 0$

Resolviendo el sistema:

$m = -5, n = 20$

85 Escribe un polinomio cuyas raíces sean los valores $2, -1, 5$

Solución:

$(x - 2)(x + 1)(x - 5) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

86 Escribe dos polinomios P(x) y Q(x) tales que:

$M.C.D.(P(x), Q(x)) = x - 2$

Solución:

$P(x) = x - 2$

$Q(x) = x(x - 2)$

87 Escribe dos polinomios P(x) y Q(x) tales que:

$m.c.m.(P(x), Q(x)) = x(x^2 - 1)(x - 2)$

Solución:

$P(x) = x(x^2 - 1)$

$Q(x) = x - 2$

88 Escribe en forma de polinomio en una variable cada uno de los enunciados siguientes:

a) El cubo de un número menos el cuadrado del número, más 4 unidades.

b) El área de un rectángulo cuya base mide 5 unidades más que la altura **x**

c) El área de un triángulo cuya altura mide 2 unidades menos que la base **x**

Solución:

a) $P(x) = x^3 - x^2 + 4$

b) $A(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$

c) $A(x) = \dfrac{x(x - 2)}{2} = \dfrac{x^2 - 2x}{2}$

89 Dos números suman 8 unidades. Escribe el polinomio que expresa el producto de dichos números en función del número menor **x**

Solución:

$P(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$

90 Dados dos números enteros consecutivos, escribe el polinomio que expresa en función del número menor **x:**

a) la suma de los números.

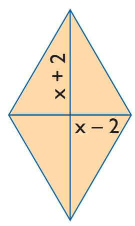
b) el producto de los números.

Solución:

a) $S(x) = x + x + 1 = 2x + 1$

b) $P(x) = x(x + 1) = x^2 + x$

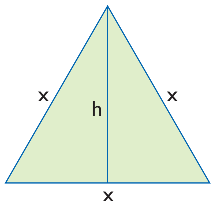
91 Dado el rombo siguiente, halla su área en función de **x**



Solución:

$A(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2} = \dfrac{x^2}{2} - 2$

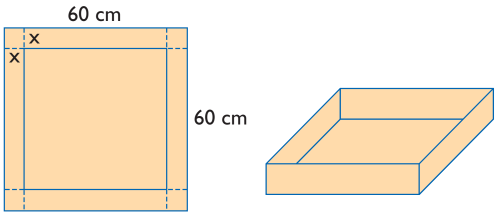
92 Escribe el polinomio que da el área de un triángulo equilátero en función del lado **x**



Solución:

$A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$

93 En una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se recorta un cuadrado de lado **x** en las esquinas, para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de **x**



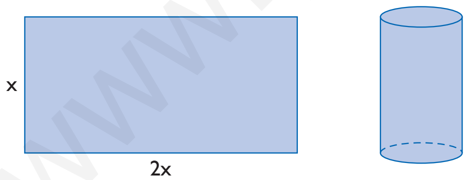
Solución:

$V(x) = (60 - 2x)^2x = 4x^3 - 240x^2 + 3\,600x$

94 Con una cartulina como la de la figura, se construye un cilindro sin tapas. Escribe:

a) el área lateral del cilindro en función de **x**

b) el volumen del cilindro en función de **x**

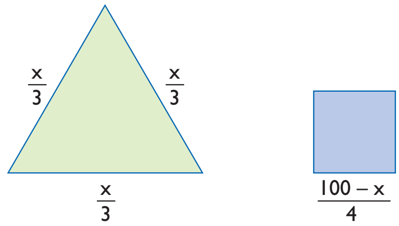


Solución:

a) $A(x) = x \cdot 2x = 2x^2$

b) $V(x) = \pi\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2 x = \dfrac{x^3}{\pi}$

95 Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos trozos, y se forman el triángulo equilátero y el cuadrado siguientes.



Escribe el polinomio que expresa la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función de **x**

Solución:

$A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \dfrac{(100 - x)^2}{4^2}$

Para profundizar

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

96 $\dfrac{4x^2y}{6xy^3}$

Solución:

$\dfrac{2x}{3y^2}$

97 $\dfrac{2x^2 - 4xy}{2x^4 - 8x^2y^2}$

Solución:

$\dfrac{1}{x(x + 2y)}$

98 $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{a^2b^2 - b^2}$

Solución:

$\dfrac{a - 1}{b^2(a + 1)}$

99 $\dfrac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^3 + 4x^2y + xy^2}$

Solución:

$\dfrac{1}{x}$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

100 $\dfrac{2x}{x - y} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{2}$

Solución:

$x(x + y)$

101 $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)\frac{x^2}{2x + y}$

Solución:

$\frac{x}{y}$

102 $\frac{x\,y}{2x + 2y} \cdot \frac{8y^3}{x} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2xy^3}$

Solución:

$\frac{2y(x - y)}{x}$

103 $\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y}$

Solución:

$\frac{4xy}{(x + y)(x - y)}$

104 $\frac{x}{x - y} - \frac{x}{x + y} - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$

Solución:

$\frac{2y}{x + y}$

Aplica tus competencias

105 Halla el polinomio que define un movimiento uniformemente acelerado en el que:

$$a = 4\ m/s^2,\ v_0 = 5\ m/s \text{ y } e_0 = 2\ m$$

Solución:

$e(t) = \frac{1}{2} \cdot 4t^2 + 5t + 2$

$e(t) = 2t^2 + 5t + 2$

106 Halla el monomio que define el movimiento de un cuerpo que se deja caer en el vacío en el que:

$$a = 9{,}8\ m/s^2,\ v_0 = 0\ m/s \text{ y } e_0 = 0\ m$$

Solución:

$e(t) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2$

$e(t) = 4{,}9t^2$

Comprueba lo que sabes

1 Enuncia el teorema del resto y pon un ejemplo.

Solución:

El **resto** que se obtiene al dividir el polinomio **P(x)** entre el binomio **x – a** es el valor numérico del polinomio para **x = a**

$$\mathbf{R = P(a)}$$

Ejemplo

Halla el resto de la siguiente división:

$P(x) = x^3 - 5x + 17$ entre $x + 3$

$\text{Resto} = P(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3) + 17 =$

$= -27 + 15 + 17 = 5$

2 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton: $(2x - 3)^4$

Solución:

$16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

3 Halla el coeficiente de x^{12} en el desarrollo de: $(x^2 + x)^8$

Solución:

$T_{r+1} = \binom{8}{r} (x^2)^{8-r} \cdot x^r$

Luego

$16 - 2r + r = 12 \Rightarrow 16 - r = 12 \Rightarrow r = 4$

El término que se pide es:

$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4} (x^2)^{8-4}\, x^4 = 70\, x^{12}$

4 Factoriza el siguiente polinomio y halla sus raíces: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Solución:

$x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

Raíces: $x = -1$; $x = 2$

5 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios siguientes:

$P(x) = x^3 - 4x$, $Q(x) = x^3 + 2x^2$

Solución:

$P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$

$\text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) = x(x + 2)$

$\text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 2)(x - 2)$

6 Efectúa la operación siguiente y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-9}\right) \frac{1}{x+1}$$

Solución:

$$\frac{x+1}{x^2-9}$$

7 Calcula el valor de **k** para que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 6$ sea divisible por $(x + 2)$

Solución:

Por el teorema del factor:

$P(-2) = 0$

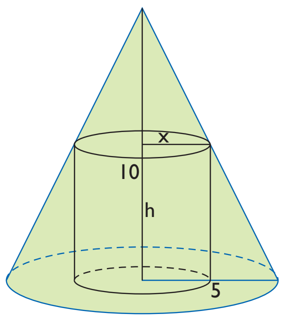
$(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2)k + 6 = 0$

$-8 - 12 - 2k + 6 = 0$

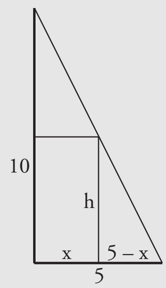
$-14 - 2k = 0$

$k = -7$

8 Dado el cilindro inscrito en el cono de la figura siguiente, halla el polinomio que expresa el volumen del cilindro en función del radio **x**



Solución:



Se tiene:

$$\frac{10}{5} = \frac{h}{5-x} \Rightarrow h = 2(5 - x)$$

El volumen es:

$V(x) = \pi x^2 \cdot 2(5 - x) = 10\pi x^2 - 2\pi x^3$

Paso a paso

107 Desarrolla:

$(x + 2)^4$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

108 Divide

$P(x) = 6x^4 + 5x^2 + 17x + 15$

entre

$Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

109 Halla el valor numérico del polinomio

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 9$

para $x = 2$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

110 Factoriza:

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111 Calcula:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{4x-5}{x^2-x} - \frac{x+2}{x}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

112 Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 3

$(x^3 + kx - 10) : (x - 2)$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

113 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

114 Desarrolla el siguiente binomio:

$(x + y)^5$

Solución:
$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

115 Calcula P(x) : Q(x), siendo:

$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8$

$Q(x) = x^2 - 2x - 1$

Solución:
$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$
$R(x) = 48x + 28$

116 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$

a) Para $x = 2$

b) Para $x = -2$

Solución:
a) $P(2) = -2$
b) $P(-2) = 26$

117 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

Solución:

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

b) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$

118 Halla las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

b) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

Solución:

a) $(x - 1)^2(x - 3)$

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$

b) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$

119 Calcula:

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1}$ b) $\frac{x}{x - 2} - \frac{3}{x^2 - 4}$

Solución:

a) $\frac{3x + 2}{x^2 + x}$

b) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4}$

120 Calcula:

a) $\frac{x + 1}{x - 2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x + 2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}$

Solución:

a) $\frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\frac{x}{x - 2}$

121 Calcula:

$\frac{x + 3}{x + 2} : \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

Solución:

$\frac{x - 2}{x - 3}$

122 Calcula:

$\frac{2x^2 + x}{x^2 - 1} : \frac{2x + 1}{3x^2 - 3}$

Solución:

$3x$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

123 Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 5

$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$

Solución:

$P(-1) = 5$

$k = -4$

124 Halla el valor de **k** para que el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$ sea divisible entre $x - 2$

Solución:

$P(2) = 0$

$k = 2$

4 Resolución de ecuaciones

1. Ecuaciones de 1er y 2º grado

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 8$ b) $5x = 20$ c) $x^2 = 81$ d) $x(x - 2) = 0$

Solución:

a) $x = 5$ b) $x = 4$ c) $x = \pm 9$ d) $x = 0, x = 2$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1 $\frac{x-2}{12} - \frac{x+1}{4} = x - \frac{11}{4}$

Solución:

$x = 2$

2 $\frac{x+1}{3} - \frac{3x-2}{9} = \frac{2x-1}{18} + \frac{5}{9}$

Solución:

$x = 1/2$

3 $\frac{x+1}{4} - 2\left(x - \frac{6}{5}\right) = \frac{3x-1}{5} + \frac{x}{2}$

Solución:

$x = 1$

4 $\frac{x}{3} - \frac{x-2}{12} - x = 3x - \frac{7}{3}$

Solución:

$x = 2/3$

5 $\frac{3x+7}{24} - \frac{1-4x}{6} = -4 - x - \frac{2x-5}{3}$

Solución:

$x = -1$

6 $2x^2 - 3x = 0$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 3/2$

7 $5x^2 - 14x - 3 = 0$

Solución:

$x_1 = -1/5, x_2 = 3$

8 $9x^2 = 4$

Solución:

$x_1 = -2/3, x_2 = 2/3$

9 $5x^2 - 24x - 5 = 0$

Solución:

$x_1 = -1/5, x_2 = 5$

10 $(x - 3)(x - 1) = 15$

Solución:

$x_1 = 6, x_2 = -2$

11 $\frac{3x}{2} + 1 + \frac{x^2 + 4}{4} = 0$

Solución:

$x_1 = -4, x_2 = -2$

12 Determina, sin resolverlas, cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $2x^2 - 3x + 7 = 0$

c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ d) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Solución:

a) $\Delta = 36 \Rightarrow$ tiene dos soluciones reales.

b) $\Delta = -47 \Rightarrow$ no tiene soluciones reales.

c) $\Delta = 0 \Rightarrow$ tiene una solución real.

d) $\Delta = 4 \Rightarrow$ tiene dos soluciones reales.

13 Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios de segundo grado:

a) $2x^2 - 5x - 3$ b) $x^2 - 4x + 4$

c) $3x^2 - x - 2$ d) $5x^2 - 3x$

Solución:

a) $2(x + 1/2)(x - 3)$

b) $(x - 2)^2$

c) $3(x + 2/3)(x - 1)$

d) $5x(x - 3/5)$

2. Ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x} = 5$ b) $\frac{2x - 1}{x} = 1$ c) $\sqrt{x + 1} = 2$

Solución:

a) $x = \frac{1}{5}$ b) $x = 1$ c) $x = 3$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

14 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Solución:

$x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = 1$

15 $x^4 - 625 = 0$

Solución:

$x_1 = -5, x_2 = 5$

16 $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

Solución:

$x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -1, x_4 = 1$

17 $x^4 - 4x^2 = 0$

Solución:

$x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = x_4 = 0$

18 $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$

Solución:
$x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -2\sqrt{2}, x_4 = 2\sqrt{2}$

19 $x^6 - 8x^3 = 0$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = 2$

20 $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 3$

21 $\frac{2}{x} + x = -3$

Solución:
$x_1 = -2, x_2 = -1$

22 $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}$

Solución:
$x_1 = -6, x_2 = 3$

23 $\frac{3x+2}{x+1} - 2 = \frac{3}{4}$

Solución:
$x = 3$

24 $\frac{4}{x+3} - \frac{1}{x-2} = 2$

Solución:
$x_1 = -1/2, x_2 = 1$

25 $\frac{2}{x-1} + \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{7}{3}$

Solución:
$x_1 = -2/7, x_2 = 2$

26 $\frac{x}{x+3} + \frac{x-2}{x-1} = 1$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 3$

27 $\frac{3x}{x+2} - \frac{x-1}{6} = x - \frac{2}{3}$

Solución:
$x_1 = -5/7, x_2 = 2$

28 $x = 2 + \sqrt{x}$

Solución:
$x = 4$

29 $\sqrt{x-1} - x + 7 = 0$

Solución:
$x = 10$

30 $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

Solución:
$x = 4$

31 $\sqrt{2x^2 - 4} - \sqrt{4x - 6} = 0$

Solución:
No tiene solución.

32 $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7$

Solución:
$x = 4$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $3^x = 9$ b) $3^x = \frac{1}{9}$

c) $3^x = 3$ d) $3^x = 1$

e) $\log_3 x = 0$ f) $\log_3 x = 1$

g) $\log_3 x = 2$ h) $\log_3 x = -2$

Solución:

a) $x = 2$ b) $x = -2$

c) $x = 1$ d) $x = 0$

e) $x = 1$ f) $x = 3$

d) $x = 9$ f) $x = 1/9$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

33 a) $3^x = 27$ b) $7^{x+1} = 1$

Solución:

a) $x = 3$ b) $x = -1$

34 a) $5^{x-1} = 25$ b) $2^x = 1/8$

Solución:

a) $x = 3$ b) $x = -3$

35 a) $\log x = 0$ b) $\log_2 x = 4$

Solución:

a) $x = 1$ b) $x = 16$

36 a) $\log_x 3 = 1$ b) $L\, x = 1$

Solución:

a) $x = 3$ b) $x = e$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

37 $2^{x^2-1} = 8$

Solución:

$x_1 = -2, x_2 = 2$

38 $2 \cdot 2^x + 4^x = 80$

Solución:

$x = 3$

39 $5^x + 5^{1-x} = 6$

Solución:

$x_1 = 0, x_2 = 1$

40 $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 14$

Solución:

$x = 2$

41 $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

Solución:

$x = 2$

42 $4^x = 6^{1-x}$

Solución:

$$x = \frac{\log 6}{\log 4 + \log 6} = 0{,}5638$$

43 $2^4 - 2^{5x} = 0$

Solución:
x = 4/5

44 $5^{x+1} = 3^{1-2x}$

Solución:
$x = \dfrac{\log 3 - \log 5}{\log 5 + 2\log 3} = -0{,}1342$

45 $\log_x 16 = 2$

Solución:
x = 4

46 log x + log 80 = 3

Solución:
x = 25/2

47 log (22 – x) = – 1 + log x

Solución:
x = 20

48 3 log x = 2 log x + log 3

Solución:
x = 3

4. Resolución de problemas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente:
a) el lado de un cuadrado cuya área es de 36 m^2
b) dos números enteros consecutivos cuya suma sea 15

Solución:
a) x = 6 m
b) x = 7, x = 8

APLICA LA TEORÍA

49 Halla dos números que sumen 8 y cuyo producto sea 15

Solución:
Número x
x(8 – x) = 15
x = 5
Un número es 5
El otro número es 3

50 Se ha mezclado aceite de girasol de 0,8 € el litro con aceite de oliva de 3,5 € el litro. Si se han obtenido 300 litros de mezcla a 2,6 € el litro, calcula cuántos litros se han utilizado de cada clase de aceite.

Solución:

	Girasol	Oliva	Oliva
Capacidad (l)	x	300 – x	300 – x
Precio (€/l)	0,8	3,5	3,5
Dinero (€)	0,8x + 3,5(300 – x) = 300 · 2,6		

$0{,}8x + 3{,}5(300 - x) = 300 \cdot 2{,}6 \Rightarrow x = 100$
Aceite de girasol: 100 litros.
Aceite de oliva: 200 litros.

51 Dos motos salen juntas de una ciudad para recorrer 560 km a velocidad constante. La segunda moto lleva una velocidad de 10 km/h más que la primera, y tarda una hora menos en hacer el recorrido. Calcula las velocidades de las dos motos.

Solución:

Tiempo de la 1ª moto = x

Tiempo de la 2ª moto = x – 1

$$\frac{560}{x} + 10 = \frac{560}{x-1} \Rightarrow x = 8, x = -7$$

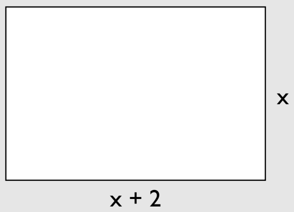
Velocidad primera moto = 560/8 = 70 km/h

Velocidad segunda moto = 80 km/h

La solución negativa no tiene sentido.

52 Halla las dimensiones de un rectángulo en el que la base es 2 cm mayor que la altura y cuya área sea de 24 cm^2

Solución:



$x(x + 2) = 24$

$x = 4, x = -6$

Las dimensiones son 4 cm y 6 cm

La solución negativa no tiene sentido.

53 Dos grifos, abiertos a la vez, llenan un depósito en 6 h. El segundo grifo tarda en llenar el depósito 5 h más que el primero, estando éste cerrado. Calcula el tiempo que tardan en llenar el depósito por separado.

Solución:

Tiempo del primer grifo = x

Tiempo del segundo grifo = x + 5

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

$x = 10, x = -3$

El primer grifo tarda 10 h

El segundo grifo tarda 15 h

La solución negativa no tiene sentido.

54 En una tienda se compraron unos adornos de porcelana por 629 €. Se rompieron 3 y los que quedaron se han vendido a 4 € más de lo que costaron. Si se ha obtenido un beneficio de 85 €, ¿cuántos adornos se compraron?

Solución:

N° de adornos = x

$$(x - 3)\left(\frac{629}{x} + 4\right) = 629 + 85$$

$x = 37, x = -51/4$

Se han comprado 37 adornos.

La solución negativa no tiene sentido.

1. Ecuaciones de 1er y 2º grado

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

55 $4x^2 - 25 = 0$

Solución:
$x_1 = -5/2, x_2 = 5/2$

56 $(x - 2)(x + 3) = 0$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = -3$

57 $x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = -1/2$

58 $6x^2 - 5x = 0$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = 5/6$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

59 $\frac{x - 2}{3} - \frac{x - 4}{5} = \frac{x + 3}{10}$

Solución:
$x = 5$

60 $x + \frac{1}{6} + \frac{1 - 4x}{5} = \frac{2x - 1}{3}$

Solución:
$x = 3/2$

61 $x(x - 3) = 18$

Solución:
$x_1 = 6, x_2 = -3$

62 $\frac{x - 6}{5} = \frac{x - 5}{4} + \frac{1 - x}{6} - \frac{7}{10}$

Solución:
$x = -5$

63 $\frac{x^2 + 3}{4} = 1 - \frac{x - 1}{8}$

Solución:
$x_1 = -3/2, x_2 = 1$

64 $3(x - 2) + (x - 2)x = 2x$

Solución:
$x_1 = 3, x_2 = -2$

65 $\frac{x - 2}{3} + x = \frac{x - 4}{5} + \frac{5x + 14}{10}$

Solución:
$x = 2$

66 $(x + 2)(x - 1) = x + 7$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 3$

67 $\frac{x + 1}{2} + x + \frac{1 - x}{5} = 2$

Solución:
$x = 1$

68 $\frac{5(1 - x)(x - 3)}{4} + 14 = 2(x - 3)$

Solución:
$x_1 = -13/5, x_2 = 5$

69 $\frac{3x + 2}{4} - \frac{2x - 1}{6} + x = \frac{3x - 1}{2} + \frac{3}{4}$

Solución:
$x = 5$

70 $\frac{2x + 3}{4} - (x - 3) = \frac{x - 1}{3} + \frac{2x - 5}{4}$

Solución:
$x = 4$

71 $(x + 2)(x - 2) = (x + 3)^2 - 7$

Solución:
$x = -1$

72 $\frac{x^2+1}{5} - \frac{x^2+x}{10} = \frac{5x-3}{10}$

Solución:
$x_1 = 1, x_2 = 5$

73 $4(x-2)(x-1) + 3(x^2-1) = 9$

Solución:
$x_1 = -2/7, x_2 = 2$

74 $2x(x+2) - (4-x)(x-1) = 7x(x-1)$

Solución:
$x_1 = -1/2, x_2 = 2$

2. Ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales

Resuelve las siguientes ecuaciones:

75 $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Solución:
$x_1 = 1, x_2 = 2$

76 $x + \frac{12}{x} = 7$

Solución:
$x_1 = 3, x_2 = 4$

77 $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 3$

78 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{2}$

Solución:
$x_1 = -5, x_2 = 2$

79 $x = -2 + \sqrt{16+x^2}$

Solución:
$x = 3$

80 $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

Solución:
$x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -3, x_4 = 3$

81 $\frac{1}{x-3} = \frac{11}{2} - x$

Solución:
$x_1 = 7/2, x_2 = 5$

82 $x + \sqrt{x} = 6$

Solución:
$x = 4$

83 $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$

Solución:
$x_1 = -2, x_2 = 2$

84 $\sqrt{9-x} = x - 3$

Solución:
$x = 5$

85 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{10}{3}$

Solución:
$x_1 = -8/5, x_2 = -1/2$

86 $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$

Solución:
$x = 1$

87 $11 + \sqrt{x^2-5x+1} = 2x$

Solución:
$x = 8$

88 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = -\frac{4}{3(x-3)}$

Solución:
$x_1 = -9/2, x_2 = 1$

89 $9x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 1$

90 $\sqrt{x+1} - \sqrt{7x+4} = -3$

Solución:
$x = 3$

91 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2}$

Solución:
$x_1 = 4/3, x_2 = 3$

92 $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 2$

93 $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

Solución:
$x_1 = 1, x_2 = 3$

94 $\frac{x+2}{x-1} - \frac{4-x}{2x} = \frac{3}{2}$

Solución:
$x = -2$

95 $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

Solución:
$x_1 = -1/3, x_2 = 1/3, x_3 = -1/2, x_4 = 1/2$

96 $\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x+1} = 7$

Solución:
$x = 4$

97 $2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 1/3$

98 $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{9} - \frac{x}{x+4}$

Solución:
$x_1 = -16/7, x_2 = 1/2$

99 $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = -2$

Solución:
$x = -1$

100 $\sqrt{5x^2 + 3x - 4} = 4x + 24$

Solución:
$x = -4$

101 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$

102 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{3x-2} = \frac{3}{4}$

Solución:
$x_1 = -2, x_2 = 4/9$

103 $6\sqrt{x} = x\sqrt{x+5}$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = 4$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones:

104 $4^x + 2^5 = 3 \cdot 2^{x+2}$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = 3$

105 $2^{5-x^2} = \frac{1}{16}$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 3$

106 $5^{2x-2} - 6 \cdot 5^x + 125 = 0$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = 3$

107 $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x-1}$

Solución:
$x = 2$

108 $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 1$

109 $2^x + \dfrac{1}{2^{x-2}} = 5$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = 2$

110 $6^{2x} = 1\,296$

Solución:
$x = 2$

111 $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = 1$

112 $5^{1-x} + 5^x = 6$

Solución:
$x_1 = 0, x_2 = 1$

113 $3^x \cdot 9^x = 9^3$

Solución:
$x = 2$

114 $2^{2x+5} - 5 \cdot 4^{2x-1} + 3\,125 = 53$

Solución:
$x = 3$

115 $2^{x-2} + 28 = 2^{x+2} - 2$

Solución:
$x = 3$

116 $3^{x-4} + 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 163$

Solución:
$x = 4$

117 $9^x = 3^x + 6$

Solución:
$x = 1$

118 $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$

Solución:
$x = 2$

119 $2^x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$

Solución:
$x = \dfrac{\log 3}{\log 6} = 0{,}6131$

120 $5^{x^2+2x} = 1$

Solución:
$x_1 = -2, x_2 = 0$

121 $e^{x-1} = 2^{x+1}$

Solución:
$x = \dfrac{1 + L\,2}{1 - L\,2} = 5{,}5178$

122 $3^{3x-2} = 9^{x^2-2}$

Solución:
$x_1 = -1/2, x_2 = 2$

123 $\log(x^2 + 3x + 40) = 1 + \log(3x - 1)$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = 25$

124 $\log x^2 - \log 3 = \log x + \log 5$

Solución:
$x = 15$

125 $\log x + \log(3x + 5) = 2$

Solución:
$x = 5$

126 $2 \log x - \log(x + 24) = 2$

Solución:
$x = 120$

127 $2 \text{ L } x + \text{L } (x^2 + 2) = \text{L } 3$

Solución:
$x = 1$

128 $\log x + \log 4 = \log(x + 1) + \log 3$

Solución:
$x = 3$

129 $2 \log x + \log x^4 = 6$

Solución:
$x = 10$

130 $2 \text{ L } x - \text{L } 5x = \text{L } 2$

Solución:
$x = 10$

131 $2 \log x = 4 + \log \frac{x}{10}$

Solución:
$x = 1\,000$

132 $3 \log 2x - 2 \log x = \log(4x + 1)$

Solución:
$x = 1/4$

133 $3 + \log \frac{3x}{2} = 2 \log x$

Solución:
$x = 1\,500$

134 $\log(x - 2) = 1 + \log 2 - \log(x - 3)$

Solución:
$x = 7$

135 $\log x = 1 - \log(7 - x)$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = 5$

136 $3 \log(6 - x) - \log(72 - x^3) = 0$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = 4$

137 $\log \sqrt{3x + 1} + \log 5 = 1 + \log \sqrt{2x - 3}$

Solución:
$x = 13/5$

138 $(x^2 - 5x + 5) \log 5 + \log 20 = \log 4$

Solución:
$x_1 = 2, x_2 = 3$

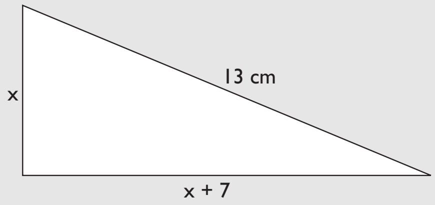
4. Resolución de problemas

139 Halla dos números tales que su suma sea 10 y la diferencia de sus cuadrados sea 60

Solución:
Número = x
$x^2 - (10 - x^2) = 60$
$x = 8$
Los números son 2 y 8

140 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm. Si el cateto mayor mide 7 cm más que el cateto menor, ¿cuál es la longitud de los catetos?

Solución:



$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$

$x = 5, x = -12$

Los catetos miden 5 cm y 12 cm

La solución negativa no es válida.

141 Se mezcla avena de 0,4 €/kg y centeno de 0,25 €/kg para hacer pienso para vacas. Si se hacen 5 000 kg de pienso a 0,31 €/kg, ¿cuántos kilos de avena y de centeno se han utilizado?

Solución:

	Avena	Centeno	Mezcla
Peso (kg)	x	5 000 – x	5 000
Precio (€/kg)	0,4	0,25	0,31
Dinero (€)	0,4x + 0,25(5 000 – x) = 5 000 · 0,31		

$0{,}4x + 0{,}25(5\,000 - x) = 5\,000 \cdot 0{,}31$

$x = 2\,000$

Avena: 2 000 kg

Centeno: 3 000 kg

142 Un coche y una moto salen a la vez de dos ciudades, A y B, el uno hacia el otro por la misma carretera. La velocidad del coche es de 100 km/h y la velocidad de la moto es de 70 km/h. Si la distancia entre las ciudades es de 340 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Solución:

Tiempo = x

$100x + 70x = 340$

$x = 2$

Tardan 2 h en encontrarse.

143 Dos obreros, trabajando juntos, tardan 12 días en realizar una obra. Se sabe que el segundo obrero, trabajando solo, tardaría 10 días más que el primero. Calcula el tiempo que emplean en realizar dicha obra por separado.

Solución:

Tiempo que tarda el primer obrero: x

Tiempo que tarda el segundo obrero: x + 10

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$$

$x = 20, x = -6$

El primer obrero tarda 20 días y el segundo 30 días.

La solución negativa no tiene sentido.

144 Varios amigos han preparado un viaje de vacaciones que cuesta 4 000 €. Un amigo tiene problemas y los demás deciden pagar 200 € más cada uno. Calcula el número de amigos que son.

Solución:

Nº de amigos = x

$$\frac{4\,000}{x} + 200 = \frac{4\,000}{x-1}$$

$x = 5, x = -4$

El número de amigos son 5

La solución negativa no tiene sentido.

145 La edad de un padre es seis veces la del hijo. Si dentro de dos años la edad del padre será cinco veces la del hijo, calcula la edad de cada uno.

Solución:

	Hoy	Dentro de 2 años
Edad del hijo	x	x + 2
Edad del padre	6x	6x + 2

$6x + 2 = 5(x + 2) \Rightarrow x = 8$

La edad del hijo: 8 años.

La edad del padre: 48 años.

Para ampliar

146 $\frac{9}{x+2} + \frac{9}{x^2+4x+4} = 10$

Solución:
$x_1 = -13/5, x_2 = -1/2$

147 $\sqrt[3]{4-x} = 2$

Solución:
$x = -4$

148 $3^{x^2-4} + 3^{x^2-5} = 162 \cdot 2^{x^2-8}$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 3$

149 $\frac{x}{x+3} = \frac{3}{2} - \frac{4}{x+1}$

Solución:
$x_1 = -5, x_2 = 3$

150 $\log \sqrt[4]{x^3} - \log \sqrt{10} = \frac{1}{4}$

Solución:
$x = 10$

151 $2^{x-1} + \frac{1}{2^{x-3}} = 5$

Solución:
$x_1 = 1, x_2 = 3$

152 $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{26}{5}$

Solución:
$x_1 = -2, x_2 = 4$

153 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5$

Solución:
$x = 7$

154 $3^{1-x} + 3^{2-x} = \frac{4}{27}$

Solución:
$x = 4$

155 $\frac{x+3}{x-5} + 2 = -\frac{2}{x-3}$

Solución:
$x_1 = 11/3, x_2 = 1$

156 $x^2 - \frac{4x^2}{x^2+4x+4} = 0$

Solución:
$x_1 = -4, x_2 = 0$

157 $4^x - 2^{x-1} - 14 = 0$

Solución:
$x = 2$

158 $\frac{x-3}{1-x^2} - \frac{x+2}{1+x} = \frac{1}{1-x}$

Solución:
$x_1 = -3, x_2 = 2$

159 $\frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1} = \frac{4x+5}{4x}$

Solución:
$x_1 = -5/3, x_2 = 1$

160 $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$

Solución:
$x = 2$

161 $\sqrt{x^2-3x} + \sqrt{x^2+x+4} = 4$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 3$

162 $\frac{x}{\sqrt{x}} = x - \sqrt{x}$

Solución:
$x = 4$

163 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = \dfrac{5}{\sqrt{x+2}}$

Solución:
$x = 7/9$

164 $4^x = 3 \cdot 2^{x+1} - 8$

Solución:
$x_1 = 1, x_2 = 2$

165 $\dfrac{2\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} = \dfrac{3 + \sqrt{x}}{3\sqrt{x}}$

Solución:
$x = 9/7$

166 $\sqrt{4 + \sqrt{3x^2 - 2}} = x$

Solución:
$x = 3$

167 $2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 504$

Solución:
$x = 5$

168 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2}$

Solución:
$x = \dfrac{\log 7 - \log 13 + \log 9}{\log 3 - \log 2} = 3{,}8923$

169 $\log \sqrt{7x+3} + \log \sqrt{4x+5} = \dfrac{1}{2} + \log 3$

Solución:
$x = 1$

170 $\log \sqrt[3]{x} - \log \sqrt[3]{4} = \dfrac{1}{3}$

Solución:
$x = 40$

171 $\dfrac{\log (10 - x^2)}{\log (5 - 2x)} = 2$

Solución:
$x = 1$

Problemas

172 Halla las raíces de una ecuación de segundo grado, sabiendo que su suma es 10 y su producto es 21

Solución:
Suma de las raíces: $S = 10$
Producto de las raíces: $P = 21$
$x^2 - 10x + 21 = 0$
$x_1 = 7, x_2 = 3$

173 Halla un número tal que al elevarlo al cuadrado sea 210 unidades mayor.

Solución:
Número $= x$
$x + 210 = x^2$
$x = 15, x = -14$
El número es 15 o – 14

174 Halla un número que exceda a su raíz cuadrada en 156 unidades.

Solución:

Número = x

$x = \sqrt{x} + 156$

x = 169

El número es 169

175 Halla dos números enteros sabiendo que el mayor excede en 6 unidades al menor, y la suma de sus inversos es 4/9

Solución:

Número menor = x

Número mayor = x + 6

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{4}{9}$

x = –9/2, x = 3

Los números son 3 y 9

La solución –9/2 no se acepta porque no es entera.

176 Halla dos números pares consecutivos cuyo producto exceda a su suma en 142 unidades.

Solución:

Primer número = 2x

Segundo número = 2x + 2

2x(2x + 2) = 2x + 2x + 2 + 142

x = –6, x = 6

Los números son 12, 14 y –12, –10

177 El dividendo de una división es 136 y el cociente y el resto son iguales. Si el divisor es el doble que el cociente, ¿cuál es el divisor?

Solución:

Cociente = x

Resto = x

Divisor = 2x

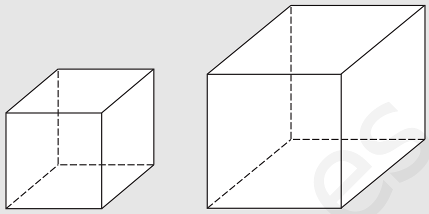
$2x \cdot x + x = 136$

x = –17/2, x = 8

El divisor es 16

178 Si se aumenta 2 cm la longitud de cada una de las aristas de un cubo, el volumen del mismo aumenta 218 cm^3. Calcula la longitud de la arista.

Solución:



Arista = x

$(x + 2)^3 = x^3 + 218$

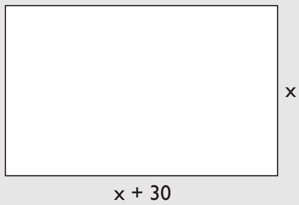
x = 5 , x = –7

La arista mide 5 cm

La solución negativa no tiene sentido.

179 Una finca rectangular tiene una superficie de 4000 m^2. Si un lado de la finca tiene 30 m más que el otro, calcula las dimensiones de la finca.

Solución:



x(x + 30) = 4000

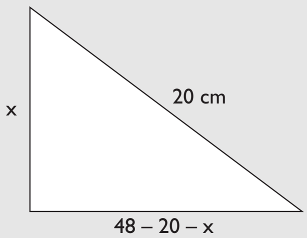
x = 50, x = –80

Las dimensiones son 50 m por 80 m

La solución negativa no tiene sentido.

180 El perímetro de un triángulo rectángulo mide 48 cm, y su hipotenusa mide 20 cm. Calcula la longitud de los catetos.

Solución:



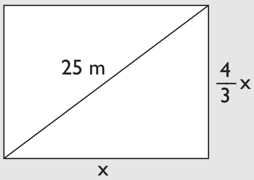
$x^2 + (48 - 20 - x)^2 = 20^2$

$x = 12, x = 16$

Los catetos miden 12 cm y 16 cm

181 La diagonal de un rectángulo mide 25 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo, sabiendo que la altura es 4/3 de la base.

Solución:



$x^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 = 25^2$

$x = 15, x = -15$

Las dimensiones son 15 cm y 20 cm

La solución negativa no tiene sentido.

182 Se tiene un cuadrado cuyo lado es 5 cm mayor que el lado de otro cuadrado. Si entre los dos cuadrados se tienen 233 cm², calcula el área de cada uno de ellos.

Solución:

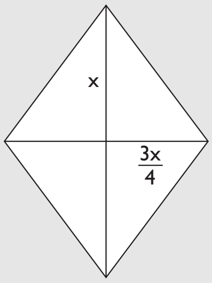
$x^2 + (x + 5)^2 = 233$

$x = 8, x = -13$

El área es de 64 cm² y de 169 cm²

183 Calcula la longitud de las diagonales de un rombo de 96 cm² de área, sabiendo que la diagonal menor es 3/4 de la diagonal mayor.

Solución:



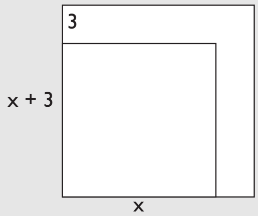
$$\frac{x \cdot \frac{3x}{4}}{2} = 96$$

$x = -16, x = 16$

Las diagonales miden 12 cm y 16 cm

184 Si se aumenta en tres centímetros el lado de un cuadrado, el área aumenta en 81 cm². Calcula la longitud del lado del cuadrado inicial.

Solución:



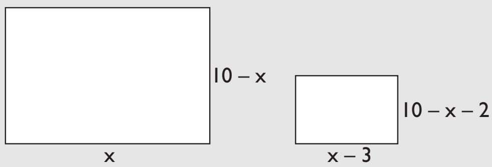
$(x + 3)^2 = x^2 + 81$

$x = 12$

La longitud del cuadrado inicial es 12 cm

185 Se tiene un rectángulo de 20 cm de perímetro. Si se reduce en 3 cm la base y en 2 cm la altura, el área disminuye en 18 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución:



$x(10 - x) = (x - 3)(10 - x - 2) + 18$

$x = 6$

Las dimensiones del rectángulo son 6 cm y 4 cm

186 Se funde plata de ley 0,7 con plata de ley 0,9 para conseguir una aleación de 100 g de una ley 0,74. Calcula la cantidad de cada tipo de plata que se ha usado.

Solución:

	Plata	Plata	Aleación
Peso (g)	x	100 – x	100
Ley	0,7	0,9	0,74
	$0{,}7x + 0{,}9(100 - x) = 100 \cdot 0{,}74$		

$0{,}7x + 0{,}9(100 - x) = 100 \cdot 0{,}74$

$x = 80$

Plata de ley 0,7 pesa 80 gramos.

Plata de ley 0,9 pesa 20 gramos.

187 Se mezcla leche del tipo A, con un 4% de grasa, con otra leche del tipo B, con un 8% de materia grasa. Si se obtienen 40 litros de mezcla con un 6% de materia grasa, ¿cuántos litros de cada tipo de leche se han utilizado?

Solución:

	Leche A	Leche B	Mezcla
Capacidad (l)	x	40 – x	40
Grasa	0,04	0,08	0,06
	$0{,}04x + 0{,}08(40 - x) = 40 \cdot 0{,}06$		

$0{,}04x + 0{,}08(40 - x) = 40 \cdot 0{,}06$

$x = 20$

Leche A: 20 litros.

Leche B: 20 litros.

188 A las nueve de la mañana, Alba sale en bicicleta de una población A, a una velocidad de 12 km/h. Dos horas después, sale en su búsqueda Pablo con una motocicleta a 32 km/h. ¿A qué hora alcanzará Pablo a Alba?

Solución:

Tiempo que emplea Alba = x

Tiempo que emplea Pablo = x – 2

$12x = 32(x - 2)$

$x = 16/5 = 3{,}2$

Se emplea 3 horas y 12 minutos, luego Pablo alcanza a Alba a las 12h 12 min

189 Dos autobuses de línea salen a la misma hora de dos ciudades, A y B, separadas por 400 km. Los dos autobuses salen por la misma carretera el uno hacia el otro. Si el autobús que sale de A lleva una velocidad de 90 km/h y el que sale de B lleva una velocidad de 110 km/h, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Solución:

Tiempo que tardan en encontrarse = x

$90x + 110x = 400$

$x = 2$

Tardan 2 horas en encontrarse.

190 Un grifo B tarda en llenar un depósito 4 h más que otro grifo A. Si a la vez llenan el depósito en 1 h 30 min, ¿cuánto tardarán en llenar el depósito por separado?

Solución:

Tiempo que tarda en llenar el depósito el grifo A = x

Tiempo que tarda en llenar el depósito el grifo B = x

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$x = -3, x = 2$

El grifo A tarda 2 horas, y el B, 6 horas.

La solución negativa no tiene sentido.

191 Dos desagües abiertos a la vez vacían un depósito en 15 h. Si se abre solo uno de ellos, tardaría en vaciar el depósito 16 h menos que el otro. Calcula el tiempo que tardan en vaciar el depósito los dos desagües por separado.

Solución:

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el primer desagüe = x

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el segundo desagüe = x – 16

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 16} = \frac{1}{15}$$

x = 40, x = 6

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el primer desagüe = 40 h

Tiempo que tarda en vaciar el depósito el segundo desagüe = 24 h

La solución x = 6 no tiene sentido.

192 Se han comprado por 37 € unas zapatillas de deporte y un balón que costaban 50 €. Si en las zapatillas han rebajado el 20%, y en el balón, el 30%, ¿cuál era el precio inicial de cada producto?

Solución:

Precio de las zapatillas = x

Precio del balón = 50 – x

0,8x + 0,7(50 – x) = 37

x = 20

El precio de las zapatillas es 20 €, y el del balón, 30 €

193 Se han pagado 450 € por un lector de DVD y una tarjeta de red que ahora se deben cambiar. Si en la venta se pierde el 30% en el lector de DVD, y el 60% en la tarjeta, y se han obtenido 288 €, ¿cuál era el precio inicial de los dos artículos?

Solución:

Precio del DVD = x

Precio de la tarjeta = 450 – x

0,7x + 0,4(450 – x) = 288

x = 360

El precio del DVD es 360 € y el de la tarjeta 90 €

194 Un grupo de estudiantes alquila un piso por 500 € al mes. Si aumentase el grupo en uno más, se ahorrarían 25 € cada uno. ¿Cuántos estudiantes son?

Solución:

Número de estudiantes = x

$$\frac{500}{x} = \frac{500}{x + 1} + 25$$

x = –5, x = 4

Son 4 estudiantes.

La solución negativa no tiene sentido.

195 Pablo tiene 15 años, y su madre, 40. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el doble que la de Pablo?

Solución:

	Hoy	Dentro de x años
Pablo	15	15 + x
Madre	40	40 + x

40 + x = 2(15 + x)

x = 10

Dentro de 10 años.

196 Un padre tiene el quíntuplo de la edad de su hijo. Si el padre tuviera 20 años menos y el hijo 8 años más, la edad del padre sería el doble que la del hijo. Calcula la edad actual de cada uno.

Solución:

	Hoy	
Edad del hijo	x	x + 8
Edad del padre	5x	5x – 20

2(x + 8) = 5x – 20

x = 12

El hijo tiene 12 años, y su padre, 60

197 La edad de una madre y un hijo suman 60 años, y dentro de dos años la edad de la madre será el triple de la del hijo. Calcula la edad actual de cada uno.

Solución:

	Hoy	Dentro de 2 años
Edad del hijo	x	x + 2
Edad de la madre	60 – x	60 – x + 2

3(x + 2) = 60 – x + 2

x = 14

El hijo tiene 14 años, y su madre, 46

198 Se tiene un cultivo con células que se reproducen por bipartición cada hora. Si se tienen inicialmente 5 células, ¿cuántas horas han de transcurrir para que en el cultivo haya 5 120 células?

Solución:

Tiempo = x

$5 \cdot 2^x = 5\,120$

$x = 10$

Deben transcurrir 10 horas.

199 Una población de peces se reproduce según la fórmula $N = 40 \cdot 3^t$, donde N es el número de peces y **t** es el número de años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que haya más de 500 000 peces?

Solución:

Tiempo = t

$40 \cdot 3^t = 500\,000$

t = 8,59 años.

Para que haya más de 500 000 deberán pasar 8,59 años.

Para profundizar

200 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{5}{2}$$

Solución:

$x_1 = 3, x_2 = -2$ (no es válida)

201 Resuelve la siguiente ecuación:

$$5\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 6$$

$\left(\text{Haz el cambio de variable } z = \sqrt[3]{x}\right)$

Solución:

$x_1 = 8, x_2 = 27$

202 Halla un número tal que al sumarle 6 unidades sea un cuadrado perfecto, y al restarle 6 unidades su resultado sea la raíz del cuadrado perfecto anterior.

Solución:

Número = x

$x - 6 = \sqrt{x+6}$

$x = 10$

203 Halla dos números enteros consecutivos tales que la diferencia de sus cubos sea 61

Solución:

Primer número = x

Segundo número = x + 1

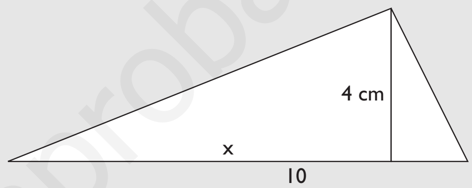
$(x+1)^3 - x^3 = 61$

$x = -5, x = 4$

Los números son 4 y 5, o bien –4 y –5

204 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm, y su altura correspondiente mide 4 cm. ¿Cuánto miden los segmentos que el pie de dicha altura determina sobre la hipotenusa?

Solución:



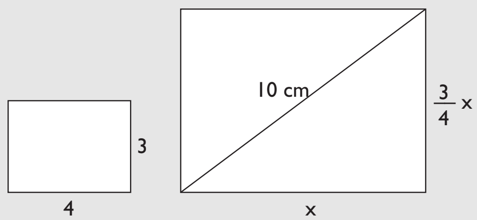
$x(10 - x) = 4^2$

$x = 8, x = 2$

Los segmentos miden 8 cm y 2 cm

205 La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 4 cm

Solución:



$x^2 + (3x/4)^2 = 10^2$

$x = -8, x = 8$

Las dimensiones son 8 cm y 6 cm, respectivamente.

206 Se alean dos lingotes de oro. Uno de ellos con una ley 0,75, y otro con una ley 0,6. Si se han conseguido 500 gramos de aleación con una ley 0,69, ¿cuántos gramos pesaba cada lingote de oro?

Solución:

	Oro	Oro	Aleación
Peso (g)	x	500 – x	500
Ley	0,75	0,6	0,69
	$0,75x + (500 - x)0,6 = 500 \cdot 0,69$		

$0,75x + (500 - x)0,6 = 500 \cdot 0,69$

$x = 300$

Oro de ley 0,75 pesa 300 gramos.

Oro de ley 0,6 pesa 200 gramos.

207 Una moto y un coche salen a la misma hora de la ciudad A en dirección a la ciudad B, que dista 80 km. La velocidad de la moto es 4/5 de la velocidad del coche, y llega 12 minutos más tarde que éste. Calcula las velocidades de los dos vehículos.

Solución:

Tiempo que tarda el coche = x

Tiempo que tarda la moto = x + 0,2

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{80}{x} = \frac{80}{x + 0,2}$$

$x = 4/5 = 0,8$ h = 48 min

El coche lleva una velocidad de 100 km/h, y la moto, de 80 km/h

208 Un alumno ha obtenido una nota final de 6,4 puntos en matemáticas. Los exámenes valen el 80% de la nota, y los trabajos, el 20%. Sabiendo que entre exámenes y trabajos suma 14 puntos, ¿qué nota sacó en cada apartado?

Solución:

Nota de exámenes = x

Nota de trabajos = 14 – x

$0,8x + 0,2(14 - x) = 6,4$

$x = 6$

En los exámenes sacó un 6 y en los trabajos un 8

209 Un padre tiene 45 años, y sus hijos, 10 y 8 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea igual a la suma de las edades de los hijos?

Solución:

	Hoy	Dentro de x años
Edad del padre	45	45 + x
Edad del 1er hijo	10	10 + x
Edad del 2º hijo	8	8 + x

$45 + x = 10 + x + 8 + x$

$x = 27$

Deben transcurrir 27 años.

210 Una sustancia radiactiva tiene un período de semidesintegración de 10 años, es decir, que cada 10 años la masa de la sustancia se reduce a la mitad. Si se tienen 400 g de dicha sustancia, ¿en cuánto tiempo se trasformarán en 25 g?

Solución:

Período = x

$400(1/2)^x = 25$

$x = 4$

Tienen que transcurrir $4 \cdot 10 = 40$ años.

211 Se ha comprado un ordenador por 1 200 €, y se sabe que su valor se deprecia un 20% cada año. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el ordenador valga menos de 400 €?

Solución:

Tiempo = x

$1\,200 \cdot 0,8^x = 400$

$x = 4,92$

Tienen que transcurrir 4,92 años.

212 Unos solares cuestan 60 000 € y hay una inflación constante del 10%. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el terreno valga 87 846 €?

Solución:

Nº de años = x

$60\,000 \cdot 1{,}1^x = 87\,846$

x = 4

Transcurrirán 4 años.

Comprueba lo que sabes

1 Descomposición factorial del trinomio de 2º grado. Pon un ejemplo.

Solución:

La descomposición factorial del trinomio de 2º grado es:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación

$ax^2 + bx + c = 0$

Ejemplo

Halla la descomposición factorial de

$x^2 - 2x - 15$

En primer lugar, se hallan las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

La descomposición factorial es:

$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{4} - \frac{3x-2}{12} = \frac{x-1}{3} - \frac{1}{4}$

b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Solución:

a) $x = 3$

b) Haciendo $z = x^2$

$z^2 - 10z + 9 = 0 \Rightarrow z = 1, z = 9$

Si $z = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Si $z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, x = 3$

Las soluciones son:

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 3$

3 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x-1}{x+2} = -\frac{5}{2}$$

Solución:

m.c.m.$(x + 3, x + 2, 2) = 2(x + 3)(x + 2)$

$x \cdot 2(x + 2) + (x - 1) \cdot 2(x + 3) =$

$= -5(x + 3)(x + 2)$

$4x^2 + 8x - 6 = -5x^2 - 25x - 30$

$9x^2 + 33x + 24 = 0$

$x = -8/3, x = -1$

4 Resuelve la siguiente ecuación:

$4 + \sqrt{x + 2} = x$

Solución:

$4 + \sqrt{x + 2} = x$

$\sqrt{x + 2} = x - 4$

$x + 2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$x = 7, x = 2$

Comprobación:

$$\text{Si } x = 7 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 + \sqrt{7 + 2} = 4 + 3 = 7 \\ x = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 7 = 7$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 + \sqrt{2 + 2} = 4 + 2 = 6 \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \neq 2$$

La solución es $x = 7$

5 Resuelve la siguiente ecuación:

$9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Solución:

$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Haciendo $z = 3^x$

$z^2 - 6z - 27 = 0$

$z = 9, z = -3$

Si $z = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

Si $z = -3 \Rightarrow 3^x \neq -3$ (3^x no puede ser negativo)

La solución es: $x = 2$

6 Resuelve la siguiente ecuación:

$\log (33 - x) = \log x - 1$

Solución:

$$\log (33 - x) - \log x = \log \frac{1}{10}$$

$$\log \frac{33 - x}{x} = \log \frac{1}{10}$$

$$\frac{33 - x}{x} = \frac{1}{10}$$

$330 - 10x = x \Rightarrow x = 30$

Comprueba lo que sabes

7 María tiene 12 años, y su madre, 40 años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el triple que la de María?

Solución:

	Hoy	Dentro de x años
Edad de María	12	12 + x
Edad de la madre	40	40 + x

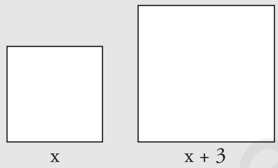
$3(12 + x) = 40 + x$

$x = 2$

Tienen que transcurrir 2 años.

8 Se tiene un cuadrado cuyo lado es 3 cm mayor que el lado de otro cuadrado. Si entre los dos cuadrados tienen 149 cm^2 de área, ¿cuál es el área de cada uno de ellos?

Solución:



$x^2 + (x + 3)^2 = 149$

$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 149$

$2x^2 + 6x – 140 = 0$

$x = 7, x = – 10$

Las áreas son 49 cm^2 y 100 cm^2

Paso a paso

213 Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Haz la interpretación gráfica para comprobarlo.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

214 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{2x - 3}{x - 1} - \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{5}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

215 Resuelve la siguiente ecuación:

$$9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

216 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\log (5x + 3) - \log x = 1$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

217 Halla dos números enteros consecutivos tales que su suma dividida entre su producto sea 5/6

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

218 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

219 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x-2}{2} - \frac{x+1}{6} + \frac{7}{3} = x + \frac{3}{4}$$

Solución:
$x = 5/8$

220 Resuelve la siguiente ecuación:

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

Haz la interpretación gráfica para comprobarlo.

Solución:
$x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -1, x_4 = 1$

221 Resuelve la siguiente ecuación:

$x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

Haz la interpretación gráfica para comprobarlo.

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 3$

222 Resuelve la ecuación:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x-2}{x-1} = 1$$

Solución:
$x_1 = -1, x_2 = 3$

223 Resuelve la ecuación:

$3 + \sqrt{2x-5} = x - 1$

Solución:
$x = 7$

224 Resuelve la ecuación:

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7$

Solución:
$x = 4$

225 Resuelve la ecuación:

$2^{x+3} + 2^x = 72$

Solución:
$x = 3$

226 Resuelve la ecuación:

$5^{x-2} - 3^x = 0$

Solución:
$x = 6{,}3013$

227 Resuelve la ecuación:

$\log(22 - x) = \log x - 1$

Solución:
$x = 20$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

228 Halla un número que exceda a su raíz cuadrada en 156 unidades.

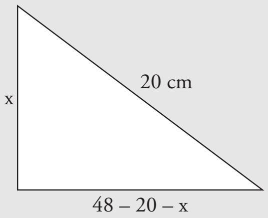
Solución:
Número = x
$x = \sqrt{x} + 156$
$x = 169$
El número es 169

229 En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide 3 cm más que el otro, y la hipotenusa mide 3 cm más que el cateto mayor. Calcula la longitud de los tres lados.

Solución:
Longitud del cateto menor: x
Longitud del cateto mayor: x + 3
Longitud de la hipotenusa: x + 3 + 3 = x + 6
$x^2 + (x+3)^2 = (x+6)^2$
$x_1 = 9, x_2 = -3$
Si la longitud del cateto menor es 9 cm, la del cateto mayor es 9 + 3 = 12 cm y la de la hipotenusa es 12 + 3 = 15 cm
La solución $x = -3$ no es válida porque no tiene sentido.

230 El perímetro de un triángulo rectángulo mide 48 cm, y su hipotenusa mide 20 cm. Calcula la longitud de los catetos.

Solución:



$x^2 + (48 - 20 - x)^2 = 202$

$x = 12, x = 16$

Los catetos miden 12 cm y 16 cm

231 Se han pagado 450 € por un lector de DVD y una tarjeta de red que ahora se deben cambiar. Si en la venta se pierde el 30% en el lector de DVD, y el 60% en la tarjeta, y se han obtenido 288 €, ¿cuál era el precio inicial de los dos artículos?

Solución:

Precio del DVD = x

Precio de la tarjeta = $450 - x$

$0{,}7x + 0{,}4(450 - x) = 288$

$x = 360$

El precio del DVD es 360 €, y el de la tarjeta, 90 €

232 Una población de peces se reproduce según la fórmula $N = 40 \cdot 3^t$, donde N es el número de peces y **t** es el número de años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que haya más de 500 000 peces?

Solución:

Tiempo = t

$40 \cdot 3^t = 500\,000$

$t = 8{,}5867$

Para que haya más de 500 000 deberán pasar de 8,59 años.

5 Sistemas de ecuaciones

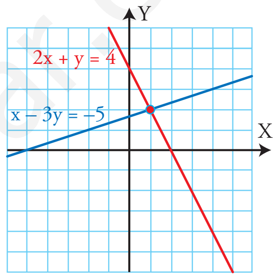
1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

PIENSA Y CALCULA

Dado el sistema lineal formado por las ecuaciones del gráfico de la parte derecha:

a) ¿cuántas soluciones tiene?

b) halla la solución o las soluciones.



Solución:

a) Solo tiene una solución

b) La solución es $x = 1$, $y = 2$

APLICA LA TEORÍA

1 Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal y clasifícalo según el número de soluciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Primera ecuación:

$2x + y = 3$

$y = 3 - 2x$

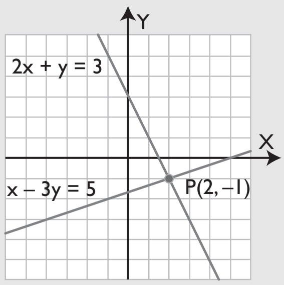
x	y	
0	3	⇒ A(0, 3)
1	1	⇒ B(1, 1)

Segunda ecuación:

$x - 3y = 5$

$x = 3y + 5$

x	y	
5	0	⇒ C(5, 0)
–4	–3	⇒ D(–4, –3)



Solución $x = 2$, $y = -1$

Como tiene una solución, el sistema es compatible determinado

2 Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y &= 3 \\ -x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es incompatible. Las rectas son paralelas.

$\frac{2}{-1} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{3}$

Representación gráfica:

Primera ecuación:

$2x - 2y = 3$

$y = x - \frac{3}{2}$

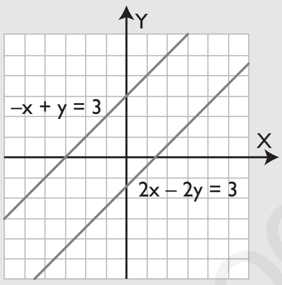
x	y	
0	$-3/2$	$\Rightarrow A(0, -3/2)$
5	$7/2$	$\Rightarrow B(5, 7/2)$

Segunda ecuación:

$-x + y = 3$

$y = x + 3$

x	y	
0	3	$\Rightarrow C(0, 3)$
2	5	$\Rightarrow D(2, 5)$



3 Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -4x + 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas son la misma. Multiplicando la 1ª ecuación por -2 se obtiene la 2ª ecuación.

$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$

Representación gráfica:

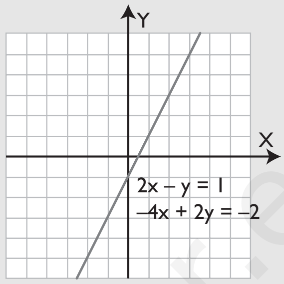
Solo representaremos la 1ª recta, ya que ambas rectas son la misma.

Primera ecuación:

$2x - y = 1$

$y = 2x - 1$

x	y	
0	-1	$\Rightarrow A(0, -1)$
2	3	$\Rightarrow B(2, 3)$



4 Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Los coeficientes de las variables no son proporcionales, por tanto, el sistema es compatible determinado. Las rectas son secantes.

$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-1}$

Representación gráfica:

Primera ecuación:

$3x + 2y = 6$

$y = 3 - \frac{3x}{2}$

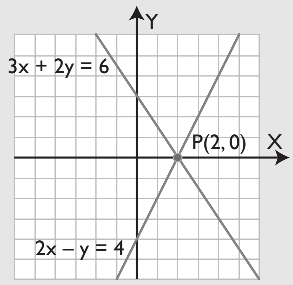
x	y	
0	3	$\Rightarrow A(0, 3)$
2	0	$\Rightarrow B(2, 0)$

Segunda ecuación:

$2x - y = 4$

$y = 2x - 4$

x	y	
0	-4	$\Rightarrow C(0, -4)$
3	2	$\Rightarrow D(3, 2)$



2. Resolución algebraica de sistemas lineales

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente, sumando y restando, la solución del sistema $\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Sumando se obtiene: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Restando se obtiene: $2y = 4 \Rightarrow y = 2$

APLICA LA TEORÍA

5 Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 5x + y &= 16 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución despejando la incógnita **y** de la 2ª ecuación y sustituyendo en la 1ª ecuación.

Se obtiene: $x = 3, y = 1$

6 Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= -1 \\ 5x - 3y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción; sumando las dos ecuaciones se elimina la incógnita **y**

Se obtiene: $x = 2, y = -3$

7 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{x+y}{6} &= \frac{11}{6} \\ \frac{2x-3y}{5} - \frac{1}{10} &= \frac{33}{10} \end{aligned}$$

Solución:

Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = 4, y = -3$

8 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y &= 7 \\ \frac{x}{3} - \frac{2x-5y}{6} &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

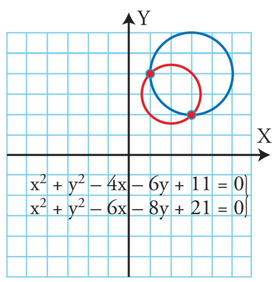
Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

3. Sistemas de ecuaciones no lineales

PIENSA Y CALCULA

Observando el dibujo de la parte derecha, halla mentalmente la solución del sistema formado por las ecuaciones de las dos circunferencias.



Solución:

Los puntos de corte son: A(3, 2) y B(1, 4). Por tanto, las soluciones son:

$x_1 = 3, y_1 = 2$

$x_2 = 1, y_2 = 4$

9 Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 1 \\ y &= 2x + 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

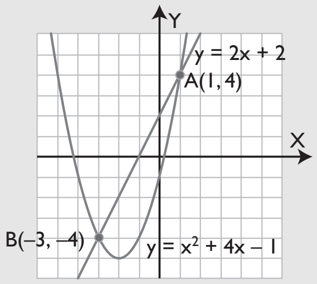
Se resuelve por igualación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 1, y_1 = 4$

$x_2 = -3, y_2 = -4$

Interpretación gráfica:



Son una parábola y una recta.

La parábola y la recta son secantes, se cortan en dos puntos:

A(1, 4) y B(–3, –4)

10 Resuelve el siguiente sistema formado por dos circunferencias e interpreta gráficamente el resultado:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y &= 20 \\ x^2 + y^2 - 12x + 2y &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se restan las dos ecuaciones y se obtiene una ecuación de 1er grado. Se despeja en esta ecuación una incógnita y se sustituye en la ecuación de una de las circunferencias.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 6, y_1 = 4$

$x_2 = 2, y_2 = -4$

La interpretación gráfica es que las dos circunferencias son secantes. Se cortan en dos puntos: A(6, 4) y B(2, –4)

11 Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución, se despeja **y** de la 2ª ecuación y se sustituye en la 1ª ecuación.

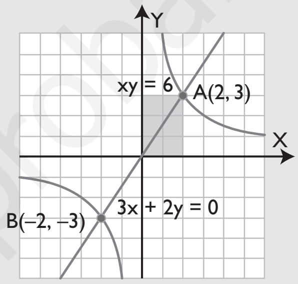
Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 2, y_1 = 3$

$x_2 = -2, y_2 = -3$

Interpretación gráfica:

Son una hipérbola y una recta.



La hipérbola y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos:

A(2, 3) y B(–2, –3)

12 Resuelve el siguiente sistema formado por una hipérbola y una circunferencia e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución, se despeja de la 1ª ecuación la incógnita **y**, y se sustituye en la 2ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 4, y_1 = 1$

$x_2 = -4, y_2 = -1$

$x_3 = 1, y_3 = 4$

$x_4 = -1, y_4 = -4$

La interpretación gráfica es que la hipérbola y la circunferencia son secantes. Se cortan en cuatro puntos: A(4, 1), B(–4, –1), C(1, 4) y D(–1, –4)

4. Sistemas exponenciales y logarítmicos

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $2^x = 2$ b) $2^x = 1$ c) $2^x = 1/2$ d) $\log x = 1$ e) $\log x = 0$ f) $\log x = -1$

Solución:

a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = -1$

d) $x = 10$ e) $x = 1$ f) $x = 0{,}1$

APLICA LA TEORÍA

13 Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{l}2^x + 3^y = 7\\ 2^x - 3^y = 1\end{array}\right\}$$

Solución:

Se hace el cambio de variables:

$2^x = u, 3^y = v$

Se obtiene el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l}u + v = 7\\ u - v = 1\end{array}\right\} \Rightarrow u = 4, v = 3$$

Deshaciendo el cambio:

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

$3^y = 3 \Rightarrow y = 1$

14 Halla dos números sabiendo que suman 12 y que su producto es 35

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}x + y = 12\\ xy = 35\end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 1ª ecuación.

La soluciones del sistema son:

$x_1 = 7, y_1 = 5$

$x_2 = 5, y_2 = 7$

Por tanto, los números son 5 y 7

15 Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{l}\log x + \log y = \log 12\\ \log x - \log y = \log 3\end{array}\right\}$$

Solución:

Sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$2 \log x = \log 12 + \log 3$

$\log x^2 = \log 36$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$

La solución negativa no sirve.

Restando las dos ecuaciones se obtiene:

$2 \log y = \log 12 - \log 3$

$\log y^2 = \log 4$

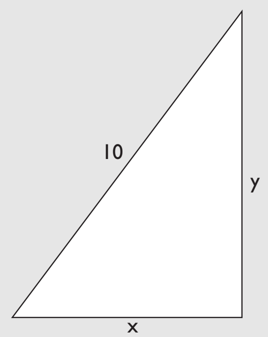
$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

La solución negativa no sirve.

Solución: $x = 6, y = 2$

16 Halla los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 10 m y que los catetos son proporcionales a 3 y 4

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10^2 \\ \frac{x}{y} &= \frac{3}{4} \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 2ª ecuación.

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 6, y_1 = 8$

$x_2 = -6, y_2 = -8$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Por tanto, los catetos miden 6 m y 8 m

1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

17 Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal y clasifícalo por el número de soluciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Primera ecuación:

$3x + y = 6$

$y = 6 - 3x$

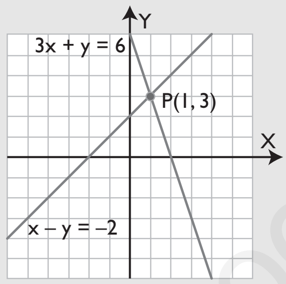
x	y	
0	6	$\Rightarrow$ A(0, 6)
2	0	$\Rightarrow$ B(2, 0)

Segunda ecuación:

$x - y = -2$

$y = x + 2$

x	y	
0	2	$\Rightarrow$ C(0, 2)
–2	0	$\Rightarrow$ D(–2, 0)



Solución $x = 1, y = 3$

Como tiene una solución, el sistema es compatible determinado.

18 Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -3x + 6y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas son la misma. Multiplicando la 1ª ecuación por –3 se obtiene la 2ª ecuación.

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{1}{-3}$$

Representación gráfica:

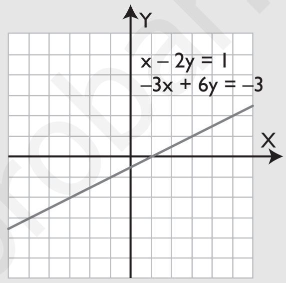
Solo representaremos la 1ª recta, ya que ambas rectas son la misma.

Primera ecuación:

$x - 2y = 1$

$x = 2y + 1$

x	y	
1	0	$\Rightarrow$ A(1, 0)
5	2	$\Rightarrow$ B(5, 2)



19 Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -13 \\ x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Los coeficientes de las variables no son proporcionales; por tanto, el sistema es compatible determinado. Las rectas son secantes.

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-4}{3}$$

Representación gráfica:

Primera ecuación:

$3x - 4y = -13$

$$y = \frac{3x + 13}{4}$$

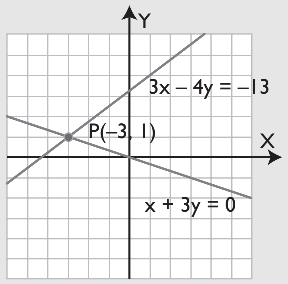
x	y	
1	4	$\Rightarrow$ A(1, 4)
–3	1	$\Rightarrow$ B(–3, 1)

Segunda ecuación:

$x + 3y = 0$

$x = -3y$

x	y	
0	0	$\Rightarrow$ O(0, 0)
3	–1	$\Rightarrow$ D(3, –1)



20 Clasifica mentalmente el siguiente sistema lineal y resuélvelo gráficamente para comprobarlo:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ -2x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes; por tanto, el sistema es incompatible. Las rectas son paralelas.

$$\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} \neq \frac{5}{5}$$

Representación gráfica:

Primera ecuación:

$2x - 3y = 5$

$y = \dfrac{2x - 5}{3}$

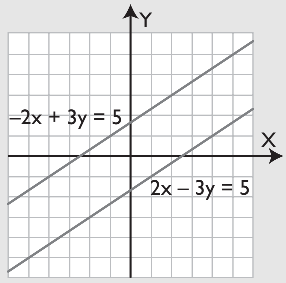
x	y	
4	1	$\Rightarrow$ A(4, 1)
–2	–3	$\Rightarrow$ B(–2, –3)

Segunda ecuación:

$-2x + 3y = 5$

$y = \dfrac{2x + 5}{3}$

x	y	
5	5	$\Rightarrow$ C(5, 5)
2	3	$\Rightarrow$ D(2, 3)



2. Resolución algebraica de sistemas lineales

21 Resuelve el siguiente sistema por el método más adecuado y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 10 \\ y &= x + 7 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación, ya que la incógnita **y** está despejada en las dos ecuaciones.

Se obtiene: $x = -3, y = 4$

22 Resuelve el siguiente sistema por el método más adecuado y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 23 \\ 2x + 5y &= -21 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por reducción, multiplicando la 2ª ecuación por 2 y restándosela a la 1ª

Se obtiene: $x = 2, y = -5$

23 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - \frac{3x - y}{5} &= \frac{22}{5} \\ \frac{y}{3} + \frac{4x - 3y}{4} &= \frac{31}{12} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = 3, y = 1$

24 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{4} + y - \dfrac{2x-5y}{6} = \dfrac{19}{12}\end{array}\right\}$$

Solución:

Primero se eliminan los denominadores.

Se obtiene: $x = -\dfrac{1}{3}, y = \dfrac{2}{3}$

3. Sistemas de ecuaciones no lineales

25 Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

$$\left.\begin{array}{l}y = -x^2 + 4x + 1 \\ x + y = 5\end{array}\right\}$$

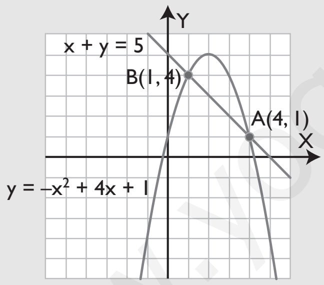
Solución:

Se resuelve por igualación despejando **y** de la 2ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 4, y_1 = 1$

$x_2 = 1, y_2 = 4$



Interpretación gráfica:

Son una parábola y una recta.

La parábola y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos: A(4, 1) y B(1, 4)

26 Resuelve el siguiente sistema formado por dos circunferencias e interpreta el resultado:

$$\left.\begin{array}{l}x^2 + y^2 = 18 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0\end{array}\right\}$$

Solución:

Se restan las dos ecuaciones y se obtiene una ecuación de 1er grado. Se despeja en esta ecuación una incógnita y se sustituye en la ecuación de una de las circunferencias.

Se obtiene la solución:

$x = 3, y = 3$

La interpretación gráfica es que las dos circunferencias son tangentes. Se cortan en un punto, A(3, 3)

27 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}x - 3y = -5 \\ xy - 2x - y = 1\end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución, se despeja **x** de la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 4, y_1 = 3$

$x_2 = -2, y_2 = 1$

28 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0\end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución, se despeja la incógnita **y** de la 1ª ecuación, y se sustituye en la 2ª ecuación.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 3, y_1 = 1$

$x_2 = 1, y_2 = 3$

4. Sistemas exponenciales y logarítmicos

29 Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{l}3^x + 5^y = 28 \\ 8 \cdot 3^x - 5^y = -1\end{array}\right\}$$

Solución:

Se hace el cambio de variables:

$3^x = u, 5^y = v$

Se obtiene el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l}u + v = 28 \\ 8u - v = -1\end{array}\right\} \Rightarrow u = 3, v = 25$$

Deshaciendo el cambio:

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$5^y = 25 \Rightarrow y = 2$

30 Halla dos números sabiendo que el doble del primero más el segundo es igual a 13, y que la suma de sus cuadrados es 34

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 1ª ecuación.

La soluciones del sistema son:

$x_1 = 5, y_1 = 3$

$x_2 = \dfrac{27}{5}, y_2 = \dfrac{11}{5}$

Como el problema decía dos números, ambas soluciones son válidas.

31 Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{l} \log (x - 1) - \log (y + 3) = 0 \\ 2 \log x + \log (y + 1) = 4 \log 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x - 1}{y + 3} = \log 1 \\ \log x^2(y + 1) = \log 2^4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - 1}{y + 3} = 1 \\ x^2(y + 1) = 2^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 1 = y + 3 \\ x^2(y + 1) = 16 \end{array}\right\}$$

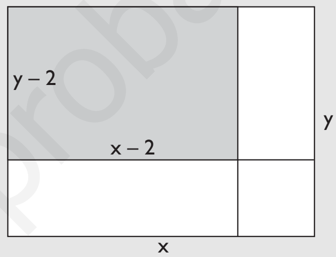
Se resuelve por sustitución, se despeja la incógnita **y** de la 1ª ecuación y se sustituye en la segunda.

Se obtiene solo la solución real.

$x = 4, y = 0$

32 Una chapa tiene 28 m de perímetro. Si le cortamos 2 m de largo y otros 2 m de ancho, el área de la nueva chapa es de 24 m^2. Halla las dimensiones de la chapa inicial.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 28 \\ (x - 2)(y - 2) = 24 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ xy - 2x - 2y = 20 \end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 1ª ecuación.

La soluciones del sistema son:

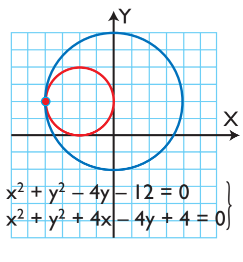
$x_1 = 8, y_1 = 6$

$x_2 = 6, y_2 = 8$

Por tanto, los lados de la plancha inicial miden 8 m y 6 m

Para ampliar

33 Resuelve gráficamente el sistema planteado en el siguiente gráfico:



Haz la interpretación gráfica.

Solución:

$x = -4, y = 2$

Las dos circunferencias se cortan en un punto A(–4, 2) y, por tanto, son tangentes.

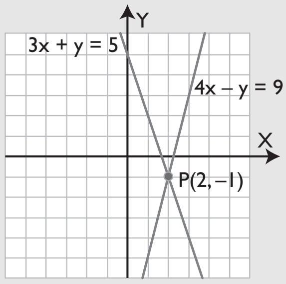
Ejercicios y problemas

34 Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 4x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.

Solución:



La solución es: $x = 2, y = -1$

Las dos rectas son secantes.

El sistema es compatible determinado.

35 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

m.c.m.$(x, y, 6) = 6xy$

$$\left.\begin{aligned} 6y + 6x &= 5xy \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Ahora se resuelve por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 2ª ecuación.

Las soluciones son:

$x_1 = 3, y_1 = 2$

$x_2 = \dfrac{8}{5}, y_2 = \dfrac{24}{5}$

36 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= x^2 - 4 \end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

Solución:

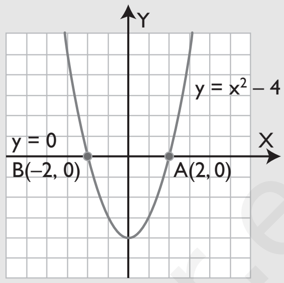
Se sustituye $y = 0$ en la 2ª ecuación y se resuelve.

Las soluciones son:

$x_1 = 2, y_1 = 0$

$x_2 = -2, y_2 = 0$

Interpretación gráfica:



Las soluciones corresponden a los puntos de corte de la parábola con el eje X

37 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x^2 + y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

Solución:

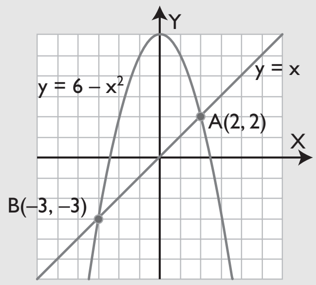
Se despeja la incógnita **y** de la 1ª ecuación.

Las soluciones son:

$x_1 = 2, y_1 = 2$

$x_2 = -3, y_2 = -3$

Interpretación gráfica:



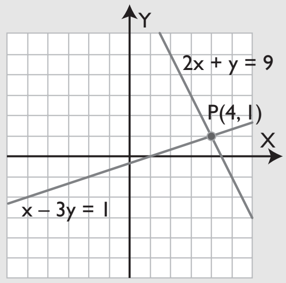
La recta y la parábola se cortan en dos puntos.

38 Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 9 \\ x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.

Solución:



La solución es:

$x = 4, y = 1$

Las dos rectas son secantes.

El sistema es compatible determinado.

39 Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{l} 2^x + 3^y = 17 \\ 5 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se hacen los cambios de variable:

$2^x = u, 3^y = v$

$$\left.\begin{array}{l} u + v = 17 \\ 5u - 4v = 4 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución; se obtiene:

$u = 8, v = 9$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$3^y = 9 \Rightarrow y = 2$

40 Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{l} \log (x + 1) + \log y = 2 \log 2 \\ 2 \log x + \log y = \log 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se le resta la 2ª ecuación a la 1ª:

$\log (x + 1) - 2 \log x = \log 2$

$\log \dfrac{x + 1}{x^2} = \log 2$

$\dfrac{x + 1}{x^2} = 2$

$x_1 = 1, x_2 = -\dfrac{1}{2}$

El valor negativo no tiene sentido.

Se sustituye el valor $x = 1$ en la primera ecuación:

$\log 2 + \log y = 2 \log 2$

$\log y = \log 2$

$y = 2$

La solución es:

$x = 1, y = 2$

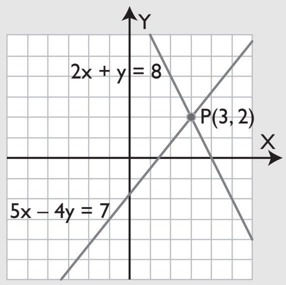
Problemas

41 Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 5x - 4y = 7 \end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.

Solución:



La solución es:

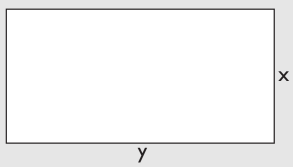
$x = 3, y = 2$

Las dos rectas son secantes.

El sistema es compatible determinado.

42 Un campo de fútbol tiene forma rectangular. El perímetro mide 300 m, y el largo es el doble del ancho. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 300 \\ y = 2x \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 150 \\ y = 2x \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución.

La solución es:

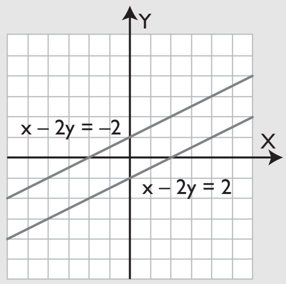
$x = 50$ m, $y = 100$ m

43 Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = \ \ 2 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas y clasifica el sistema.

Solución:



Las rectas son paralelas; no tiene solución.

El sistema es incompatible.

44 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 2 \\[2ex] \dfrac{x+y}{5} + \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Solución:

m.c.m.$(x, 3) = 3x$

La 1ª ecuación se convierte en:

$6 + xy = 6x$

m.c.m.$(5, 2) = 10$

La 2ª ecuación se convierte en:

$7x - 3y = 5$

Se despeja **y** de esta ecuación y se sustituye en la otra.

Las soluciones son:

$x_1 = 2, y_1 = 3$

$x_2 = \dfrac{9}{7}, y_2 = \dfrac{4}{3}$

45 Meli compra 3 DVD y 4 CD, y paga 100 €; y Ana compra 4 DVD y 3 CD en la misma tienda, y paga 110 €. ¿Cuánto cuesta cada DVD y CD?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 100 \\ 4x + 3y = 110 \end{array}\right\}$$

La solución es:

un DVD cuesta 20 €

un CD cuesta 10 €

46 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y - 2x = 1 \\ x^2 + y = 4 \end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

Solución:

Se resuelve por igualación, despejando la incógnita **y** de las dos ecuaciones.

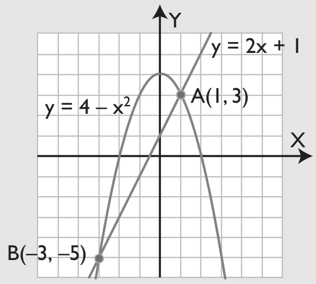
Las soluciones son:

$x_1 = 1, y_1 = 3$

$x_2 = -3, y_2 = -5$

Interpretación gráfica:

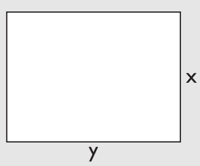
Son una recta y una parábola.



La recta y la parábola son secantes, se cortan en dos puntos.

47 Un piso tiene forma rectangular y su área es de 108 m². Si el largo mide 3 m más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del piso?

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} xy = 108 \\ y = x + 3 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución.

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 9, y_1 = 12$

$x_2 = -12, y_2 = -9$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

El piso mide de largo 12 m y de ancho 9 m

48 Halla los puntos de corte de las siguientes funciones: $y = x^2, y = x^3$

Solución:

Hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones; se resuelve por igualación.

$x^3 = x^2$

$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 0, y_1 = 0$

$x_2 = 1, y_2 = 1$

Luego los puntos comunes de las dos funciones son:

O(0, 0), A(1, 1)

49 La suma de dos números es 5, y la suma de sus inversos es 5/6. Halla ambos números.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \end{array}\right\}$$

m.c.m.(x, y, 6) = 6xy

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 6x + 6y = 5xy \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución:

Se obtienen las soluciones:

$x_1 = 2, y_1 = 3$

$x_2 = 3, y_2 = 2$

Luego los números son 2 y 3

50 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = \sqrt{x} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación.

$x = \sqrt{x}$

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

$x_1 = 0, y_1 = 0$

$x_2 = 1, y_2 = 1$

51 La suma de las edades de un padre y su hija es de 70 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el doble de la edad de su hija. ¿Qué edad tiene ahora cada uno?

Solución:

	Padre	Hija
Edad hoy	x	y
Edad dentro de 10 años	x + 10	y + 10

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 70 \\ x + 10 = 2(y + 10) \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

La solución es

Edad del padre: x = 50 años.

Edad de la hija: y = 20 años.

52 Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{l} 3^x + 5^y = 4 \\ 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 5^y = 19 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se hacen los cambios de variable:

$3^x = u, 5^y = v$

$$\left.\begin{array}{l} u + v = 4 \\ 7u - 2v = 19 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución; se obtiene:

u = 3, v = 1

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$5^y = 1 \Rightarrow y = 0$

53 Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \log 2 \\ \log x - \log y = \log 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$2 \log x = 4 \log 2$

$\log x^2 = \log 2^4$

$x^2 = 2^4$

$x = 4$

Se sustituye el valor $x = 4$ en la 1ª ecuación:

$\log 4 + \log y = 3 \log 2$

$\log y = 3 \log 2 - \log 4$

$\log y = \log \dfrac{2^3}{4}$

$y = \dfrac{2^3}{4}$

$y = 2$

La solución es:

$x = 4, y = 2$

54 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2y &= 0 \\ y + yx^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se despeja la incógnita **y** de la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª

Las soluciones son:

$x_1 = 1, y_1 = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = -1, y_1 = \dfrac{1}{2}$

55 Halla los puntos de corte de las siguientes funciones: $y = x^2 + 2x - 3, y = -x^2 + 1$

Haz la representación gráfica para comprobarlo.

Solución:

Son las soluciones del sistema correspondiente, que se resuelve por igualación:

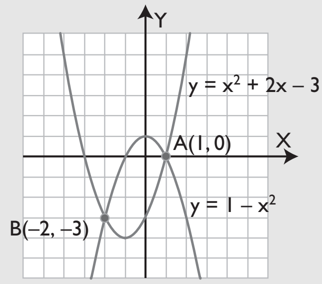
$x_1 = 1, y_1 = 0$

$x_2 = -2, y_2 = -3$

Los puntos de corte son:

A(1, 0) y

B(–2, –3)



56 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2^x \\ y &= 2^{-x} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación:

$2^x = 2^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2^0 = 1$

La solución es

$x = 0, y = 1$

57 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^3 - x \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación.

Se obtiene una ecuación de 3er grado

$x^3 - 3x + 2 = 0$

Hay que resolverla aplicando el teorema del factor.

Tiene las raíces: $x_1 = 1, x_2 = -2$

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 1, y_1 = 0$

$x_2 = -2, y_2 = -6$

Para profundizar

58 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3 - 2x \\ y &= 2x - x^2 \end{aligned}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

Solución:

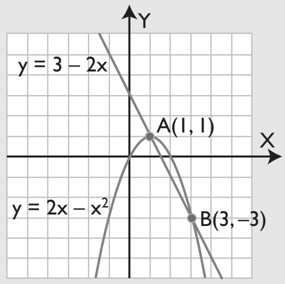
Se resuelve por igualación.

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 1, y_1 = 1$

$x_2 = 3, y_2 = -3$

Interpretación gráfica:



La recta y la parábola se cortan en dos puntos.

59 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\[2mm] \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{x}{2}\end{array}\right\}$$

Solución:

m.c.m.(x, y) = xy

La 1ª ecuación se convierte en:

$2y + x = 2xy$

m.c.m.(2, 3) = 6

La 2ª ecuación se convierte en:

$x - 2y = 0$

Se despeja **x** de esta ecuación y se sustituye en la otra.

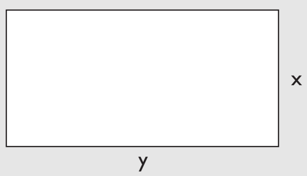
Las soluciones son:

$x_1 = 0, y_1 = 0$

$x_2 = 2, y_2 = 1$

60 Un campo de baloncesto tiene forma rectangular. El largo más el ancho mide 60 m, y el área es de 800 m^2. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:



$$\left.\begin{array}{l}x + y = 60 \\ xy = 800\end{array}\right\}$$

Las soluciones son:

$x_1 = 20, y_1 = 40$

$x_2 = 40, y_2 = 20$

Por tanto, el campo mide de largo 40 m, y de ancho, 20 m

61 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}x + 2y = 8 \\ xy = 6\end{array}\right\}$$

Interpreta gráficamente las soluciones obtenidas.

Solución:

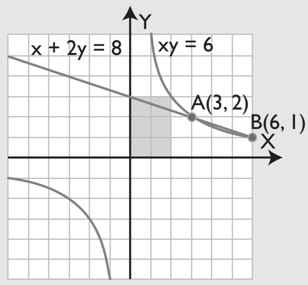
Se resuelve por igualación, despejando **x** de ambas ecuaciones:

Las soluciones son:

$x_1 = 2, y_1 = 3$

$x_2 = 6, y_2 = 1$

Son una recta y una hipérbola.



Se cortan en dos puntos.

62 La suma de dos números es 15, y la diferencia de sus cuadrados también es 15. Halla ambos números.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}x + y = 15 \\ x^2 - y^2 = 15\end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, despejando **y** de la 1ª ecuación.

Las soluciones son:

$x = 8, y = 7$

63 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x^4 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación:

$x^4 = x^2$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

Las soluciones son:

$x_1 = 0, y_1 = 0$

$x_2 = 1, y_2 = 1$

$x_3 = -1, y_3 = 1$

64 Halla los puntos de corte de las siguientes funciones:

$y = 3x^2 - 6x$ $\qquad$ $y = -x^2 + 6x - 8$

Representa ambas funciones para comprobarlo.

Solución:

Consiste en resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$x_1 = 2, y_1 = 0$

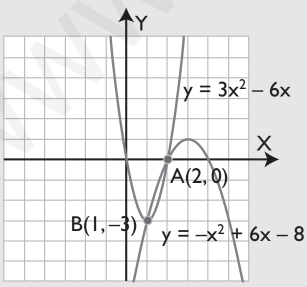
$x_2 = 1, y_2 = -3$

Los puntos de corte son:

A(2, 0) y B(1, –3)

Representación gráfica:

Son dos parábolas.



65 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x - y = -3 \\ 2y - x^2 = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación despejando la incógnita **y** de las dos ecuaciones.

La única solución es:

$x = 2, y = 3$

66 Resuelve el siguiente sistema exponencial:

$$\left.\begin{array}{l} 7^x - 5^y = 338 \\ 2 \cdot 7^x - 3 \cdot 5^y = 671 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se hacen los cambios de variable:

$7^x = u, 5^y = v$

$$\left.\begin{array}{r} u - v = 338 \\ 2u - 3v = 671 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución; se obtiene:

$u = 343, v = 5$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$7^x = 343 \Rightarrow x = 3$

$5^y = 5 \Rightarrow y = 1$

67 Resuelve el siguiente sistema logarítmico:

$$\left.\begin{array}{l} \log x - \log y = \log 3 \\ 2 \log x - 3 \log y = \log 3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 3 y se resta la 2ª; se obtiene:

$\log x = 2 \log 3$

$\log x = \log 3^2$

$x = 3^2$

$x = 9$

Se sustituye el valor x = 9 en la 1ª ecuación:

$\log 9 - \log y = \log 3$

$\log y = \log 9 - \log 3$

$\log y = \log \frac{9}{3}$

$y = 3$

La solución es:

$x = 9, y = 3$

68 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación:

$e^{x+2} = e^{-x}$

$x + 2 = -x$

$2x = -2$

$x = -1$

Para $x = -1 \Rightarrow y = e$

Solución del sistema:

$x = -1, y = e$

Aplica tus competencias

69 Un móvil A lleva un movimiento uniforme de ecuación $e = 2t$. Otro móvil B lleva un movimiento uniformemente acelerado de ecuación $e = t^2$. El tiempo se expresa en segundos, y el espacio, en metros. Halla en qué instantes se encuentran. Haz la representación gráfica.

Solución:

Hay que resolver el sistema:

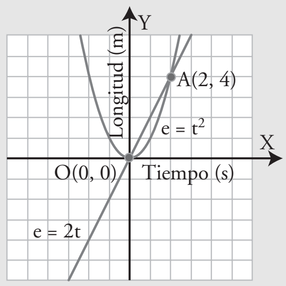
$$\left.\begin{array}{l} e = 2t \\ e = t^2 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$t_1 = 0$ s, $e_1 = 0$ m

$t_2 = 2$ s, $e_2 = 4$ m



70 Un móvil A lleva un movimiento uniforme de ecuación $e = \frac{5t}{4} - \frac{1}{2}$. Otro móvil B lleva un movimiento uniformemente acelerado de ecuación $e = \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} + 1$. El tiempo se expresa en segundos, y el espacio, en metros. Halla en qué instantes se encuentran.

Solución:

Hay que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} e = \dfrac{5t}{4} - \dfrac{1}{2} \\ e = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t}{4} + 1 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$t_1 = 2$ s, $e_1 = 2$ m

$t_2 = 6$ s, $e_2 = 7$ m

Comprueba lo que sabes

1 Define qué es un sistema de ecuaciones no lineales y pon un ejemplo. No es necesario que lo resuelvas.

Solución:

Un sistema de **ecuaciones no lineales** es un sistema de ecuaciones en el que, por lo menos, hay una ecuación que no es lineal.

Ejemplo

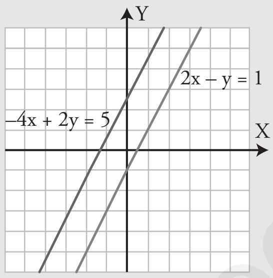
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 7 \\ y = x - 3 \end{array}\right\}$$

2 Resuelve gráficamente el siguiente sistema lineal y clasifícalo por el número de soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - \ \ y = 1 \\ -4x + 2y = 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

Son dos rectas paralelas; por tanto, el sistema no tiene solución.



El sistema es lineal e incompatible.

3 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{4x - y}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 1ª ecuación.

La solución es $x = 1$, $y = 3$

4 Resuelve el siguiente sistema e interpreta la solución gráficamente:

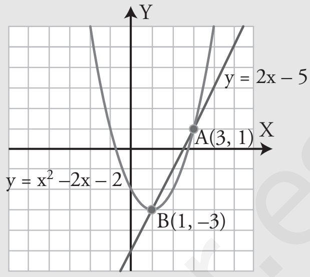
$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 5 \\ y = x^2 - 2x - 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se resuelve por igualación.

Las soluciones son:

$x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = -3$



La recta y la parábola se cortan en dos puntos.

5 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^x + 3^y = 9 \\ 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 26 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se hacen los cambios de variable:

$2^x = u$, $3^y = v$

$$\left.\begin{array}{l} u + v = 9 \\ 3u + 2v = 26 \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución y se obtiene:

$u = 8$, $v = 1$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$3^y = 1 \Rightarrow y = 0$

6 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \log x + \log y = 1 \\ 3 \log x - \log y = -1 + 4 \log 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se suman las dos ecuaciones y se obtiene:

$4 \log x = 4 \log 2$

$\log x = \log 2$

$x = 2$

Se sustituye el valor $x = 2$ en la 1ª ecuación:

$\log 2 + \log y = 1 \Rightarrow \log y = 1 - \log 2$

$\log y = \log 10 - \log 2$

$\log y = \log 5$

$y = 5$

La solución es $x = 2$, $y = 5$

Comprueba lo que sabes

7 Halla dos números sabiendo que su producto es 6 y la suma de sus cuadrados es 13

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 1ª ecuación: aparece una ecuación bicuadrada.

Las soluciones son:

$x_1 = 2, y_1 = 3$

$x_2 = -2, y_2 = -3$

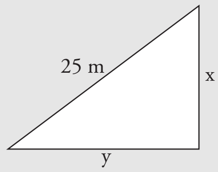
$x_3 = 3, y_3 = 2$

$x_4 = -3, y_4 = -2$

Los números pueden ser 2 y 3, y también –2 y –3

8 Los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a 3 y 4, y la hipotenusa mide 25 m. Calcula cuánto mide cada cateto.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \\ x^2 + y^2 = 25^2 \end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema por sustitución, despejando la incógnita **y** de la 1ª ecuación.

Las soluciones son:

$x_1 = 15, y_1 = 20; x_2 = -15, y_2 = -20$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Los catetos miden 15 m y 20 m

Paso a paso

71 Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ -3x + 2y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

72 Resuelve algebraicamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 17 \\ 4x - 5y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

73 Calcula los lados de un rectángulo sabiendo que el perímetro mide 22 m, y el área, 28 m^2

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

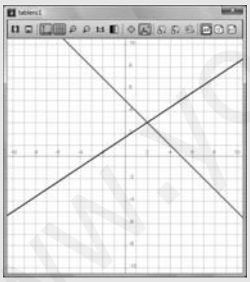
74 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

75 Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - 3y &= -5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

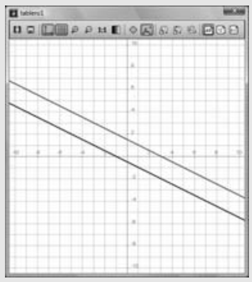


El sistema es compatible determinado.
Solución: $x = 2$, $y = 3$

76 Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x + 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

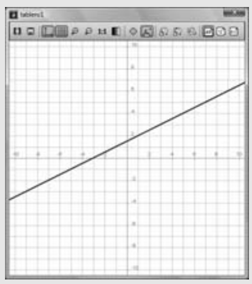


El sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

77 Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible, halla la solución:

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Solución:



Solución:
El sistema es compatible indeterminado.

Tiene infinitas soluciones: todos los puntos de dicha recta.

Por ejemplo:

$x = 1, y = 2$

$x = 3, y = 3$

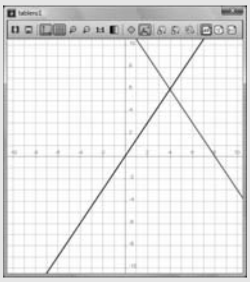
…………..

78 Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar la solución obtenida:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 4 \\ 3x &= 2y \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x = 4, y = 6$

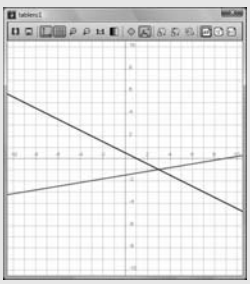


79 Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar la solución obtenida:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{x + 3y}{3} &= \frac{3}{2} \\ \frac{2x + y}{6} - \frac{x}{4} &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x = 3, y = -1$



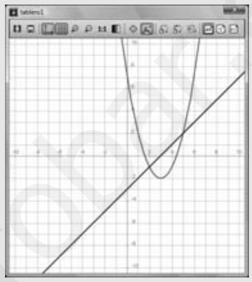
80 Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar las soluciones obtenidas:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 7 \\ y &= x - 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x_1 = 2, y_1 = -1$

$x_2 = 5, y_2 = 2$



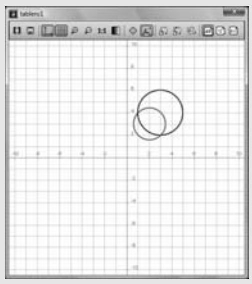
81 Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y luego haz la representación gráfica para comprobar las soluciones obtenidas:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Se introduce una ecuación en cada cuadro de texto.

$x_1 = 1, y_1 = 4$

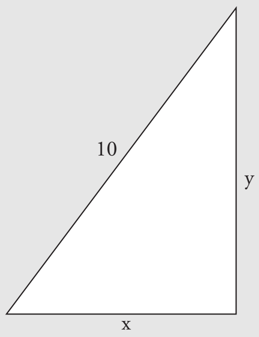
$x_2 = 3, y_2 = 2$



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

82 Halla los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 10 m y que los catetos son proporcionales a 3 y 4

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10^2 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \end{array}\right\}$$

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 6, y_1 = 8$

$x_2 = -6, y_2 = -8$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Por tanto, los catetos miden 6 m y 8 m

83 Halla dos números sabiendo que suman 12 y que el producto es 35

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{array}\right\}$$

La soluciones del sistema son:

$x_1 = 7, y_1 = 5$

$x_2 = 5, y_2 = 7$

Los números son 5 y 7

84 Meli compra 3 DVD y 4 CD, y paga 100 €; y Ana compra 4 DVD y 3 CD en la misma tienda, y paga 110 €. ¿Cuánto cuesta cada DVD y CD?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 100 \\ 4x + 3y = 110 \end{array}\right\}$$

Un DVD cuesta 20 €

Un CD cuesta 10 €

6 Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

1. Inecuaciones de 1er grado

PIENSA Y CALCULA

Escribe todos los números enteros que verifiquen a la vez: $-5 < x \le 6$

Solución:
$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

APLICA LA TEORÍA

1 Cambia mentalmente de signo las siguientes inecuaciones:

a) $2x \le -7$ b) $-3x > 4$

Solución:
a) $-2x \ge 7$
b) $3x < -4$

2 Multiplica o divide mentalmente las siguientes inecuaciones por el número que se indica:

a) $-x/2 < 5$ Multiplica por -2
b) $-3x \ge -6$ Divide entre -3

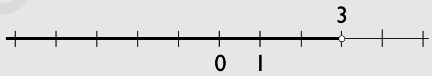
Solución:
a) $x > -10$
b) $x \le 2$

3 Resuelve las siguientes inecuaciones y haz la interpretación gráfica:

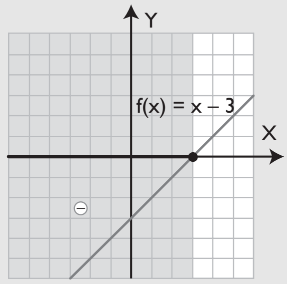
a) $3x + 3 > 5x - 3$ b) $x + 1 \ge \frac{x-2}{3}$

Solución:
a) $3x - 5x > -3 - 3$
$-2x > -6$
$x < 3$

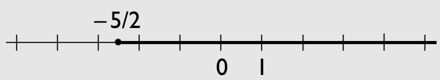
$(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R}, x < 3\}$



Interpretación gráfica:
Son los valores de **x** para los que:
$f(x) = x - 3$ es negativa.



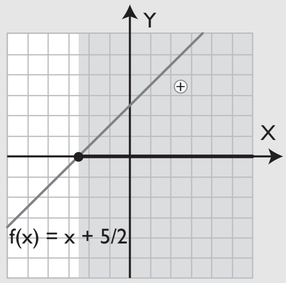
b) $3(x + 1) \ge x - 2$
$3x + 3 \ge x - 2$
$3x - x \ge -2 - 3$
$2x \ge -5$
$x \ge -5/2$
$[-5/2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \ge -5/2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

f(x) = x + 5/2 es positiva.

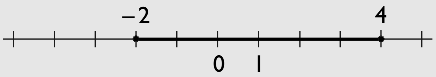


4 Resuelve la siguiente inecuación: $|x - 1| \le 3$

Solución:

Es el entorno cerrado de centro 1 y radio 3, E(1, 3), es decir, el intervalo cerrado:

$[-2, 4] = \{x \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 4\}$



5 Resuelve la siguiente inecuación y haz la interpretación gráfica:

$$\frac{x-3}{4} \le \frac{x-5}{6} + \frac{4x-3}{20}$$

Solución:

$$\frac{x-3}{4} \le \frac{x-5}{6} + \frac{4x-3}{20}$$

m.c.m.(4, 6, 20) = 60

$15(x - 3) \le 10(x - 5) + 3(4x - 3)$

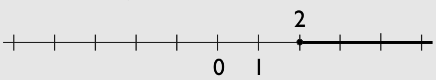
$15x - 45 \le 10x - 50 + 12x - 9$

$15x - 10x - 12x \le -50 - 9 + 45$

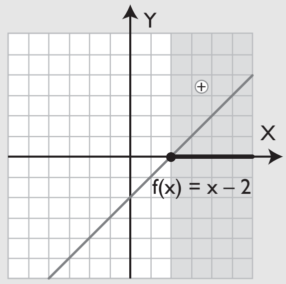
$-7x \le -14$

$x \ge 2$

$[2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \ge 2\}$



Interpretación gráfica:



Son los valores de **x** para los que:

f(x) = x – 2 es positiva o nula.

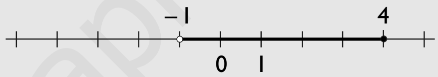
6 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - 4 \le 0 \\ x + 1 > 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x \le 4, x > -1$

$(-1, 4] = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \le 4\}$



7 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 \ge 0 \\ 2x - 5 \le 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x \ge -3, x \le 5/2$

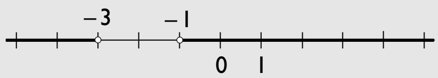
$[-3, 5/2] = \{x \in \mathbb{R}, -3 \le x \le 5/2\}$

8 Resuelve la siguiente inecuación: $|x + 2| > 1$

Solución:

Es el exterior del entorno de centro –2 y radio 1, es decir, dos intervalos. No contiene a los extremos:

$(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

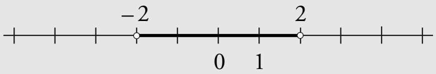


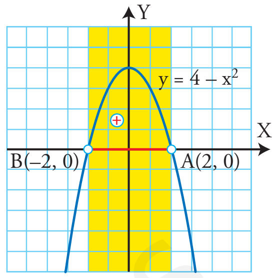
2. Inecuaciones polinómicas y racionales

PIENSA Y CALCULA

Halla el intervalo donde es positiva la función representada en el margen.

Solución:
$(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2\}$



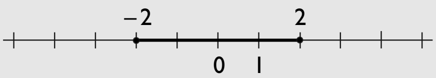


APLICA LA TEORÍA

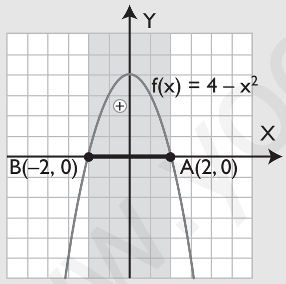
9 Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica:

$$4 - x^2 \geq 0$$

Solución:
$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 2\}$



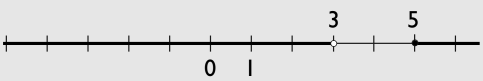
Interpretación gráfica:
Es el intervalo donde la parábola:
$y = 4 - x^2$ es positiva o cero.



10 Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica:

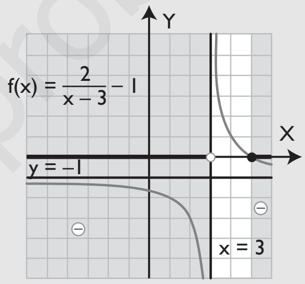
$$\frac{x - 5}{3 - x} \leq 0$$

Solución:
$(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$



Interpretación gráfica:
Es el intervalo donde la hipérbola:

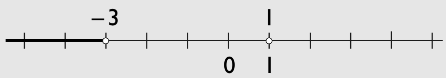
$y = \dfrac{x - 5}{3 - x}$ es negativa o nula.



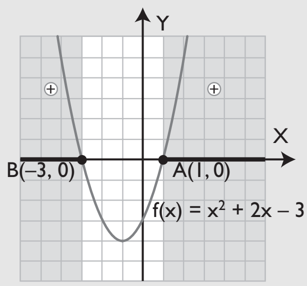
11 Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica:

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

Solución:
$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



Interpretación gráfica:
Es el intervalo donde la parábola:
$y = x^2 + 2x - 3$ es positiva.

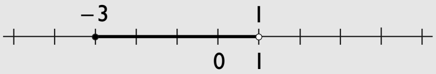


12 Resuelve la siguiente inecuación y haz su interpretación gráfica:

$$\frac{x+3}{x-1} \le 0$$

Solución:

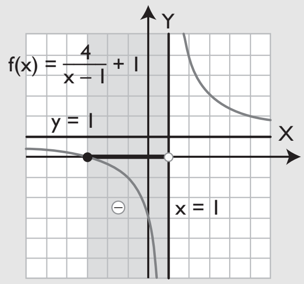
$[-3, 1) = \{x \in \mathbb{R}, -3 \le x < 1\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la hipérbola:

$y = \frac{x+3}{x-1}$ es negativa o nula.

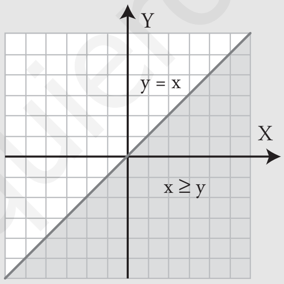


3. Inecuaciones lineales con dos variables

PIENSA Y CALCULA

Representa en unos ejes de coordenadas todos los puntos del plano en los que la abscisa, **x,** sea mayor o igual que la ordenada, **y**

Solución:

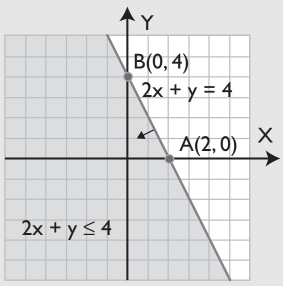


APLICA LA TEORÍA

13 Resuelve la siguiente inecuación:

$$2x + y \le 4$$

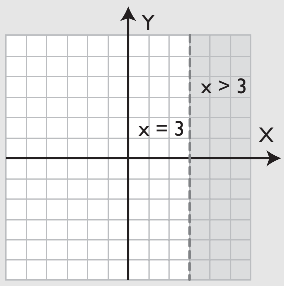
Solución:



14 Resuelve la siguiente inecuación:

$$x > 3$$

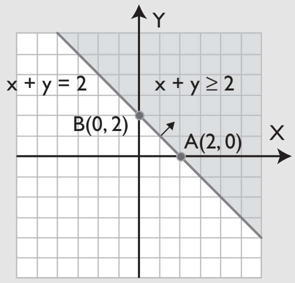
Solución:



15 Resuelve la siguiente inecuación:

$$x + y \geq 2$$

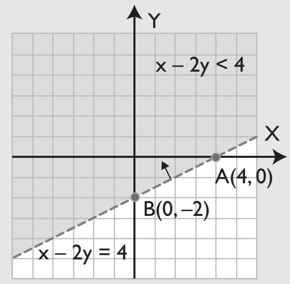
Solución:



16 Resuelve la siguiente inecuación:

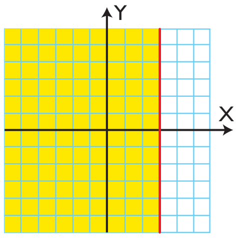
$$x - 2y < 4$$

Solución:

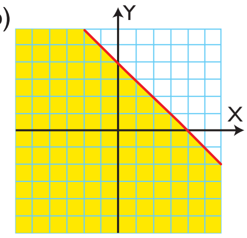


17 Escribe la inecuación correspondiente a la zona rellena de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



Solución:

a) $x \leq 3$

b) $x + y \leq 4$

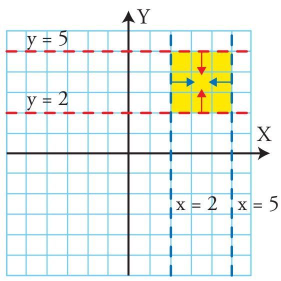
4. Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables

PIENSA Y CALCULA

Observando la representación gráfica de la parte derecha, escribe las coordenadas enteras de todos los puntos que verifiquen al mismo tiempo que $x > 2$, $y > 2$, $x < 5$, $y < 5$

Solución:

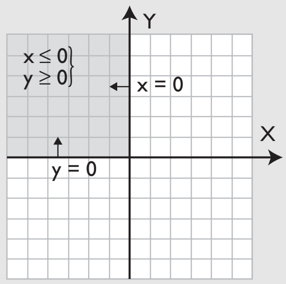
A(3, 3); B(3, 4); C(4, 3) y D(4, 4)



18 Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

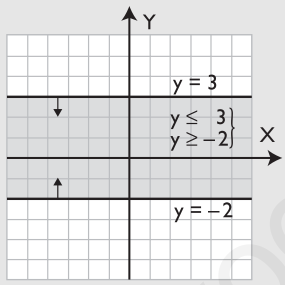
Solución:



19 Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y \leq 3 \\ y \geq -2 \end{array}\right\}$$

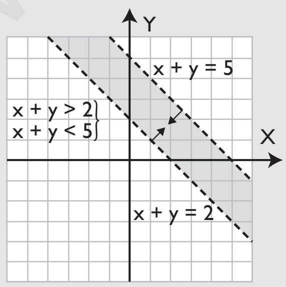
Solución:



20 Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y > 2 \\ x + y < 5 \end{array}\right\}$$

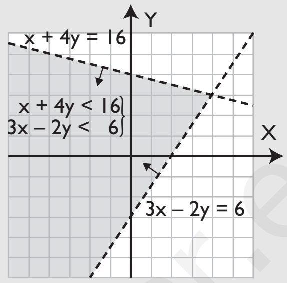
Solución:



21 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

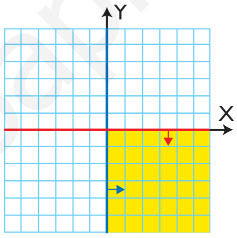
$$\left.\begin{array}{l} x + 4y < 16 \\ 3x - 2y < 6 \end{array}\right\}$$

Solución:

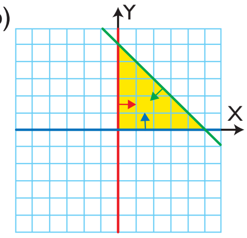


22 Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{array}\right\}$

Ejercicios y problemas

1. Inecuaciones de 1er grado

23 Cambia mentalmente de signo las siguientes inecuaciones:

a) $-3x \leq 2$ b) $-2x > -5$

Solución:

a) $3x \geq -2$ b) $2x < 5$

24 Multiplica o divide mentalmente las siguientes inecuaciones por el número que se indica:

a) $-x/3 < 1$ Multiplica por -3

b) $-2x \geq -6$ Divide entre -2

Solución:

a) $x > -3$ b) $x \leq 3$

Resuelve las siguientes inecuaciones y haz la interpretación gráfica:

25 $3x - 3 \geq 2x - 1$

Solución:

$3x - 2x \geq -1 + 3$

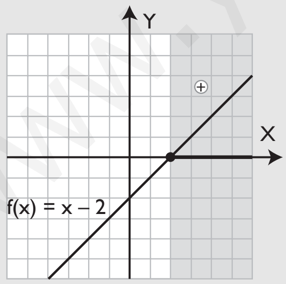
$x \geq 2$

$[2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$

Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x - 2$ es positiva.



26 $5x - 4 < 3x - 1$

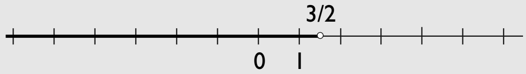
Solución:

$5x - 3x < -1 + 4$

$2x < 3$

$x < 3/2$

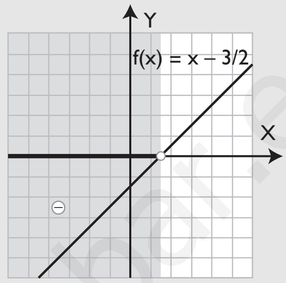
$(-\infty, 3/2) = \{x \in \mathbb{R}, x < 3/2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x - 3/2$ es negativa.



27 $2x - 3(x + 2) \leq 2(x - 1) - 1$

Solución:

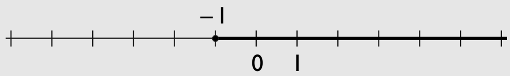
$2x - 3x - 6 \leq 2x - 2 - 1$

$2x - 3x - 2x \leq -2 - 1 + 6$

$-3x \leq 3$

$x \geq -1$

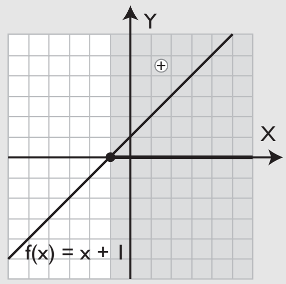
$[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x + 1$ es positiva o nula.



28 $x - 2(x - 1) > 10 - 2(x + 3)$

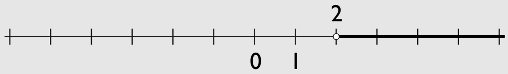
Solución:

$x - 2x + 2 > 10 - 2x - 6$

$x - 2x + 2x > 10 - 6 - 2$

$x > 2$

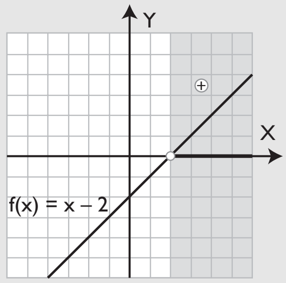
$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > 2\}$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x - 2$ es positiva.



29 $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3x}{2} \le \dfrac{2x}{3}$

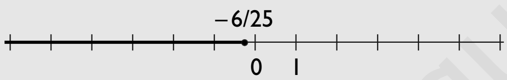
Solución:

m.c.m.(2, 3, 5) = 30

$6 + 45x \le 20x$

$45x - 20x \le -6$

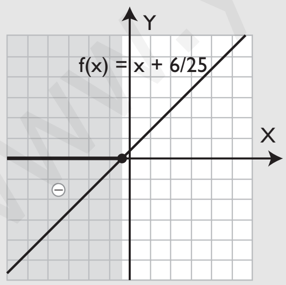
$x \le -6/25$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x + 6/25$ es negativa o nula.



30 $x + \dfrac{x+2}{6} > \dfrac{4x}{3}$

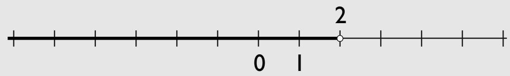
Solución

$x + \dfrac{x+2}{6} > \dfrac{4x}{3}$

m.c.m.(6, 3) = 6

$-x > -2$

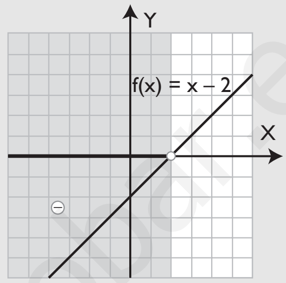
$x < 2$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x - 2$ es negativa.



31 $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{x+2}{6} < \dfrac{3x}{2} + 1$

Solución:

$\dfrac{2x}{3} + \dfrac{x+2}{6} < \dfrac{3x}{2} + 1$

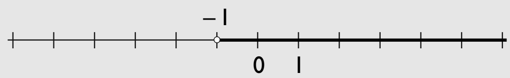
m.c.m.(3, 6, 2) = 6

$4x + x + 2 < 9x + 6$

$4x + x - 9x < 6 - 2$

$-4x < 4$

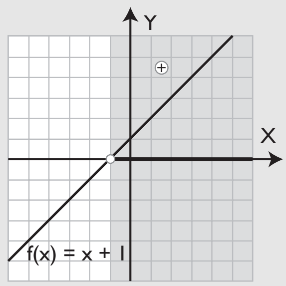
$x > -1$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x + 1$ es positiva.



32 $\dfrac{4x+1}{3} - \dfrac{2x+1}{2} \le \dfrac{x}{12} + \dfrac{5}{6}$

Solución:

m.c.m.(3, 2, 12, 6) = 12

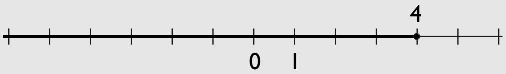
$4(4x + 1) - 6(2x + 1) \le x + 10$

$16x + 4 - 12x - 6 \le x + 10$

$16x - 12x - x \le 10 - 4 + 6$

$3x \le 12$

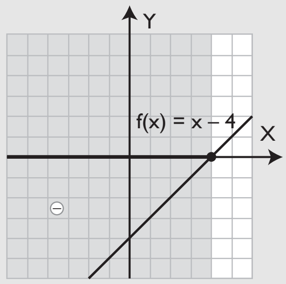
$x \le 4$



Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x - 4$ es negativa o nula.



33 $\dfrac{x-1}{2} \le \dfrac{3x+10}{5} + \dfrac{5x+3}{15}$

Solución:

m.c.m.(2, 5, 15) = 30

$15(x - 1) \le 6(3x + 10) + 2(5x + 3)$

$15x - 15 \le 18x + 60 + 10x + 6$

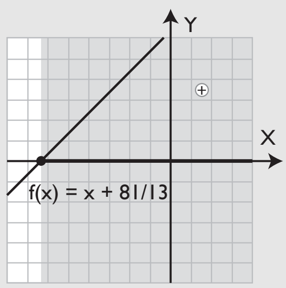
$15x - 18x - 10x \le 60 + 6 + 15$

$-13x \le 81 \Rightarrow x \ge -81/13$

Interpretación gráfica:

Son los valores de **x** para los que:

$f(x) = x + 81/13$ es positiva o nula.

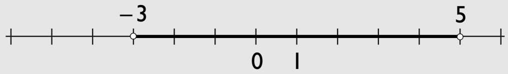


34 $|x - 1| < 4$

Solución:

Es el entorno abierto de centro 1 y radio 4, E(1, 4), es decir, el intervalo abierto:

$(-3, 5) = \{x \in \mathbb{R}, -3 < x < 5\}$

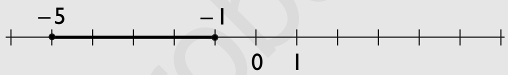


35 $|x + 3| \le 2$

Solución:

Es el entorno cerrado de centro –3 y radio 2, E(–3, 2), es decir, el intervalo cerrado:

$[-5, -1] = \{x \in \mathbb{R}, -5 \le x \le -1\}$

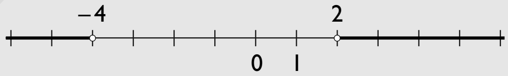


36 $|x + 1| > 3$

Solución:

Es lo que queda fuera del entorno de centro –1 y radio 3, es decir, los intervalos:

$(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

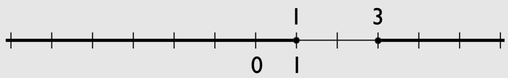


37 $|x - 2| \ge 1$

Solución:

Es lo que queda fuera del entorno de centro 2 y radio 1, es decir, los intervalos:

$(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$



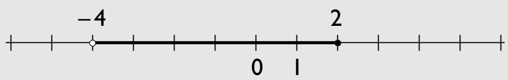
Resuelve los siguientes sistemas:

38 $\left.\begin{array}{r} x + 4 > 0 \\ 2x - 3 \le 1 \end{array}\right\}$

Solución:

$x > -4, x \le 2$

$(-4, 2] = \{x \in \mathbb{R}, -4 < x \le 2\}$



39 $\left.\begin{array}{l} x - 1 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{array}\right\}$

Solución:

$x \geq 1, x < -2$

No hay solución; la intersección de los dos es el conjunto vacío, $\varnothing$

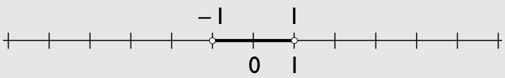
2. Inecuaciones polinómicas y racionales

Resuelve las siguientes inecuaciones y haz la interpretación gráfica:

40 $x^2 - 1 < 0$

Solución:

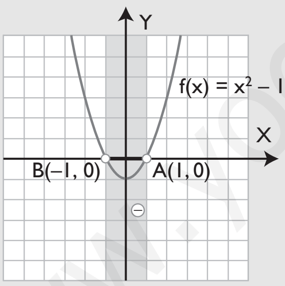
$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

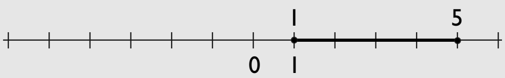
$f(x) = x^2 - 1$ es negativa.



41 $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$

Solución:

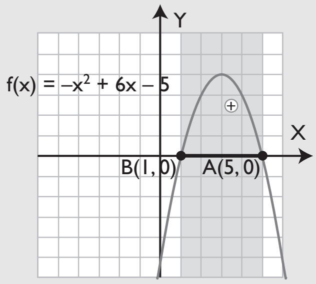
$[1, 5] = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 5\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

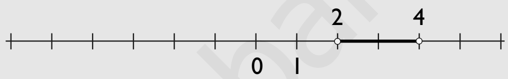
$y = -x^2 + 6x - 5$ es positiva o nula.



42 $x^2 - 6x + 8 < 0$

Solución:

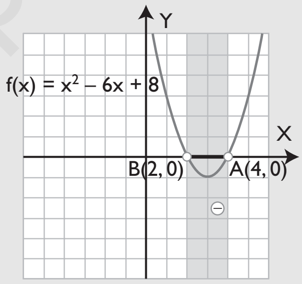
$(2, 4) = \{x \in \mathbb{R}, 2 < x < 4\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

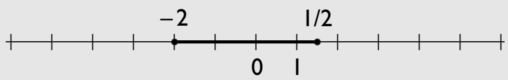
$y = x^2 - 6x + 8$ es negativa.



43 $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

Solución:

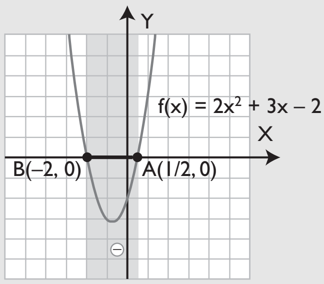
$[-2, 1/2] = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 1/2\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ es negativa o nula.

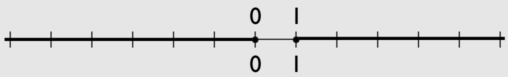


44 $x^2 \geq x$

Solución:

$x^2 - x \geq 0$

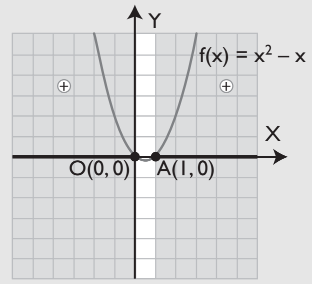
$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

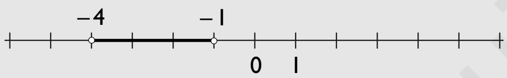
$f(x) = x^2 - x$ es positiva o nula.



45 $x^2 + 5x + 4 < 0$

Solución:

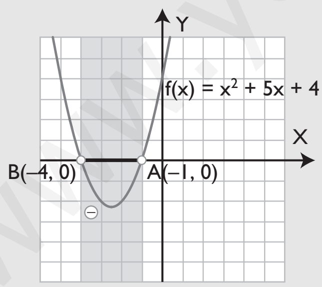
$(-4, -1) = \{x \in \mathbb{R}, -4 < x < -1\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

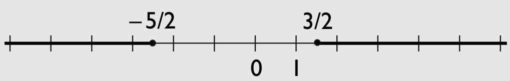
$f(x) = x^2 + 5x + 4$ es negativa o nula.



46 $x^2 + x \geq \frac{15}{4}$

Solución:

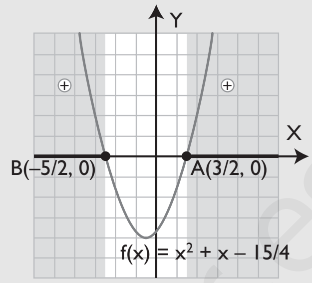
$(-\infty, -5/2] \cup [3/2, +\infty)$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la parábola:

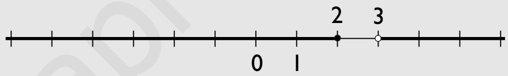
$f(x) = x^2 + x - \frac{15}{4}$ es positiva o nula.



47 $\frac{x-2}{x-3} \geq 0$

Solución:

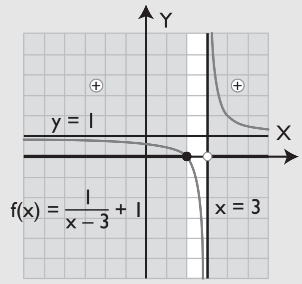
$(-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la hipérbola:

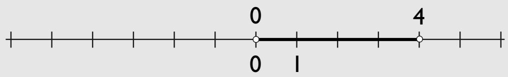
$y = \frac{x-2}{x-3}$ es positiva o nula.



48 $\frac{x-4}{x} < 0$

Solución:

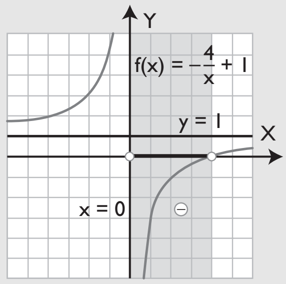
$(0, 4) = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 4\}$



Interpretación gráfica:

Es el intervalo donde la hipérbola:

$y = \frac{x-4}{x}$ es negativa.

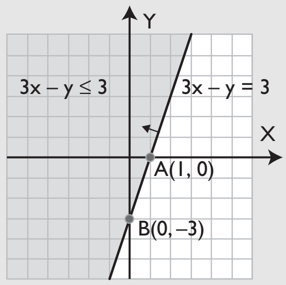


3. Inecuaciones lineales con dos variables

Resuelve las siguientes inecuaciones:

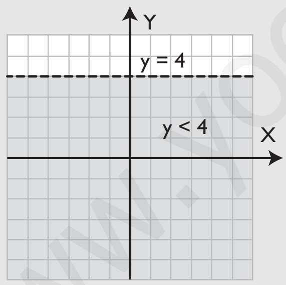
49 $3x - y \le 3$

Solución



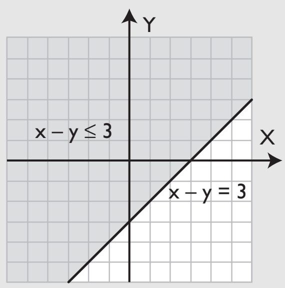
50 $y < 4$

Solución



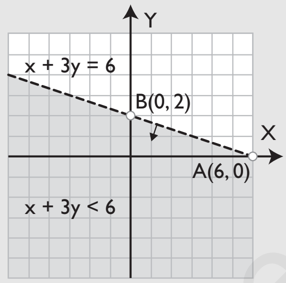
51 $x - y \le 3$

Solución

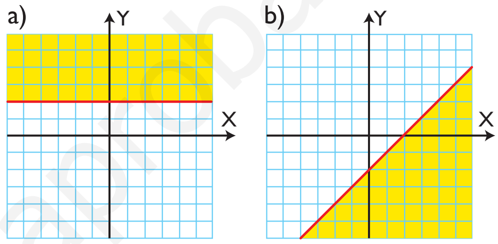


52 $x + 3y < 6$

Solución



53 Escribe la inecuación correspondiente a la zona coloreada de las siguientes figuras:



Solución:

a) $y \ge 2$

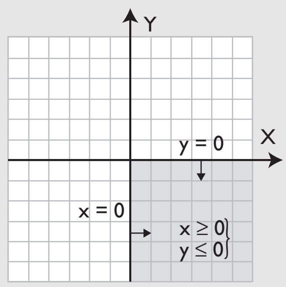
b) $x - y \ge 2$

4. Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables

Resuelve mentalmente los siguientes sistemas de inecuaciones:

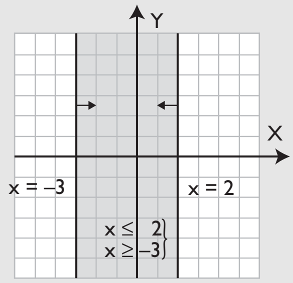
54 $\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{array}\right\}$

Solución



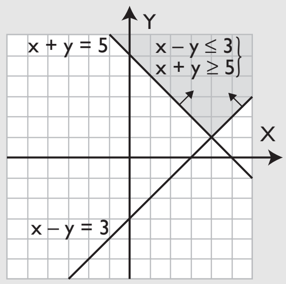
55 $\left.\begin{array}{l} x \le 2 \\ x \ge -3 \end{array}\right\}$

Solución



56 $\left.\begin{array}{l} x - y \le 3 \\ x + y \ge 5 \end{array}\right\}$

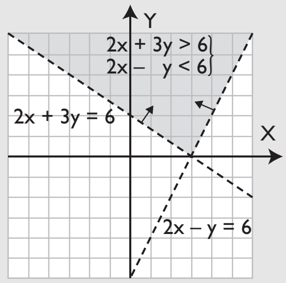
Solución



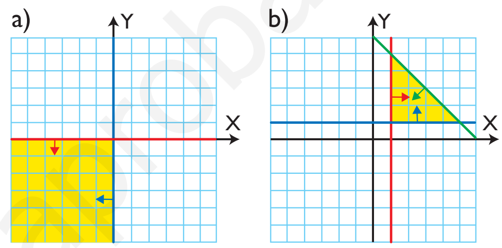
57 Resuelve mentalmente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y > 6 \\ 2x - y < 6 \end{array}\right\}$$

Solución



58 Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:



Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} x \le 0 \\ y \le 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x \ge 1 \\ y \ge 1 \\ x + y \le 6 \end{array}\right\}$

Para ampliar

Resuelve las siguientes inecuaciones:

59 $x - 3(x - 2) < 11 - 4x$

Solución:

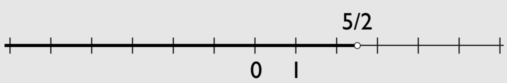
$x - 3x + 6 < 11 - 4x$

$x - 3x + 4x < 11 - 6$

$2x < 5$

$x < 5/2$

$(-\infty, 5/2) = \{x \in \mathbb{R}, x < 5/2\}$



60 $3(2x - 1) > 2x + 6x + 1$

Solución:

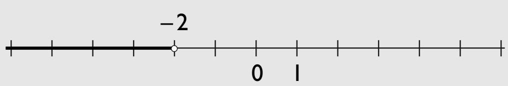
$6x - 3 > 2x + 6x + 1$

$6x - 2x - 6x > 1 + 3$

$-2x > 4$

$x < -2$

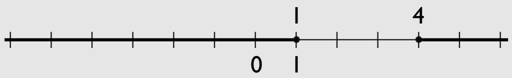
$(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R}, x < -2\}$



61 $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

Solución:

$(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$



62 $x^2 + 4x + 5 < 0$

Solución:

La ecuación:

$x^2 + 4x + 5 = 0$

No tiene soluciones reales; por tanto, la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$, o toda la recta real, $\mathbb{R}$

Si se prueba un punto, $x = 0$, quedaría:

$5 < 0$

Esto es falso, por tanto, la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$

63 $\dfrac{3x + 3}{x + 2} \leq 0$

Solución:

Raíz del numerador: $x = -1$

Raíz del denominador: $x = -2$

Para $x = 0 \Rightarrow 3/2$ que no es ≤ 0

$(-2, -1] = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq -1\}$

64 $\dfrac{2x + 2}{x - 2} > 0$

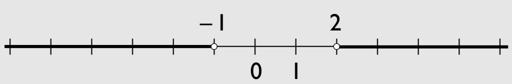
Solución:

Raíz del numerador: $x = -1$

Raíz del denominador: $x = 2$

Para $x = 0 \Rightarrow -1$ que no es > 0

$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

65 $\left.\begin{array}{l} 2x + 3 > 1 \\ 4x + 5 \leq 9 + 3x \end{array}\right\}$

Solución:

Primera ecuación:

$2x + 3 > 1$

$2x > -2$

$x > -1$

Segunda ecuación:

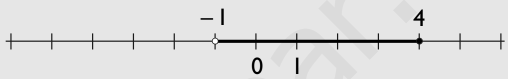
$4x + 5 \leq 9 + 3x$

$4x - 3x \leq 9 - 5$

$x \leq 4$

La solución es el intervalo:

$(-1, 4] = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 4\}$



66 $\left.\begin{array}{l} -13x + 21 \leq 2 - 3(5x - 7) \\ x + 2(3x - 5) > 6x - 7 \end{array}\right\}$

Solución:

Primera ecuación:

$-13x + 21 \leq 2 - 3(5x - 7)$

$-13x + 21 \leq 2 - 15x + 21$

$-13x + 15x \leq 2 + 21 - 21$

$2x \leq 2$

$x \leq 1$

Segunda ecuación:

$x + 2(3x - 5) > 6x - 7$

$x + 6x - 10 > 6x - 7$

$x + 6x - 6x > -7 + 10$

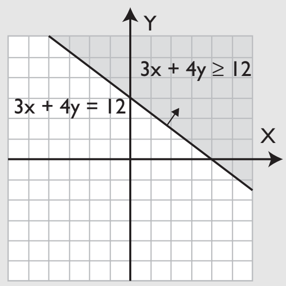
$x > 3$

La solución es el conjunto vacío, $\varnothing$, ya que no hay puntos comunes a las soluciones de las dos ecuaciones que forman el sistema.

Resuelve gráficamente la inecuación:

67 $3x + 4y \geq 12$

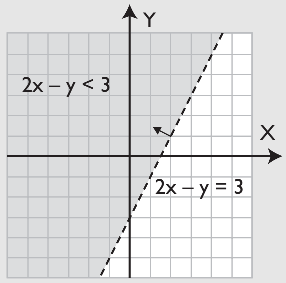
Solución:



Ejercicios y problemas

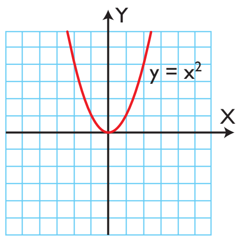
68 $2x - y < 3$

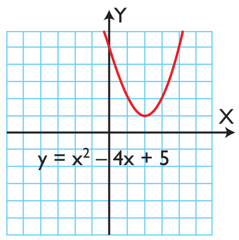
Solución:



69 Observando las siguientes representaciones gráficas, escribe directamente las soluciones de las inecuaciones correspondientes:

a) $x^2 \geq 0$ b) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$





Solución:

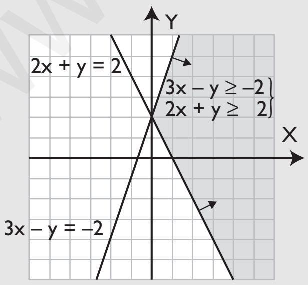
a) Es toda la recta real, $\mathbb{R}$

b) Es el conjunto vacío, $\varnothing$

Resuelve gráficamente el sistema de inecuaciones:

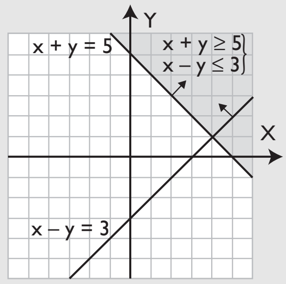
70 $\left.\begin{aligned} 3x - y &\geq -2 \\ 2x + y &\geq 2 \end{aligned}\right\}$

Solución:



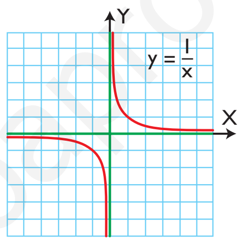
71 $\left.\begin{aligned} x + y &\geq 5 \\ x - y &\leq 3 \end{aligned}\right\}$

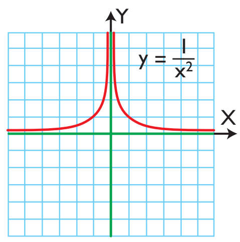
Solución:



72 Observando las siguientes representaciones gráficas, escribe directamente las soluciones de las inecuaciones correspondientes:

a) $\dfrac{1}{x} \leq 0$ b) $\dfrac{1}{x^2} \geq 0$





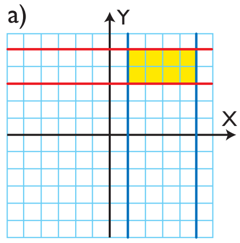
Solución:

a) $(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$

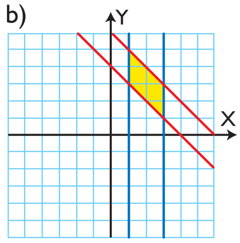
b) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

73 Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona rellena de cada una de las siguientes figuras:

a)



b)



Solución:

a) $\left.\begin{aligned} x &\geq 1 \\ x &\leq 5 \\ y &\geq 3 \\ y &\leq 5 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x &\geq 1 \\ x &\leq 3 \\ x + y &\geq 4 \\ x + y &\leq 6 \end{aligned}\right\}$

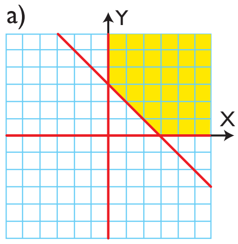
74 El perímetro de un triángulo equilátero es menor o igual que 18 m. Calcula cuánto puede medir el lado.

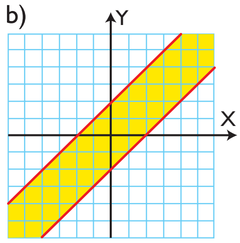
Solución:

$3x \leq 18$

$x \leq 6$ m

75 Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona rellena de cada una de las siguientes figuras:

a) 

b) 

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x - y \leq 2 \\ x - y \geq -2 \end{array}\right\}$

Problemas

76 Dada la función $f(x) = 2x - 6$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

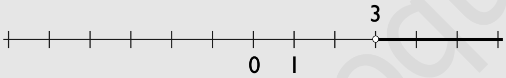
c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

Solución:

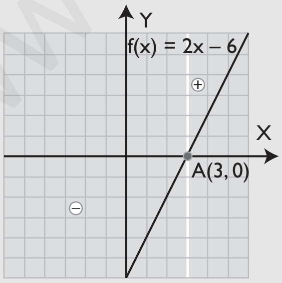
a) $2x - 6 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

b) $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$



c) $2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$

d) Representación:



77 Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

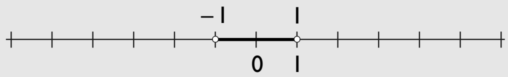
d) Represéntala para comprobarlo.

Solución:

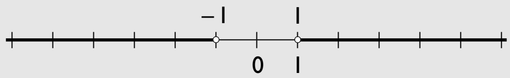
a) $1 - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 = -1$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

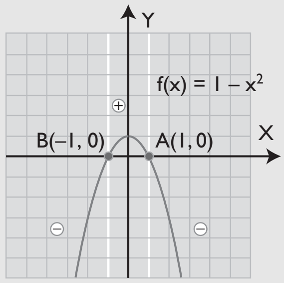
b) $(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$



c) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



d) Representación:



78 Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

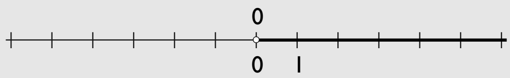
c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

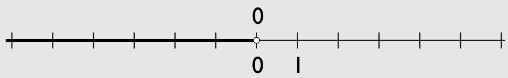
Solución:

a) Nunca vale cero.

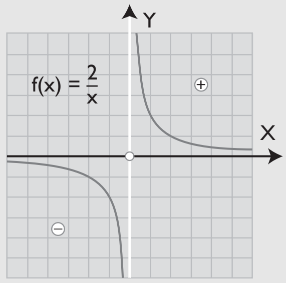
b) $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$



c) $(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$



d) Representación:



79 El perímetro de un cuadrado es menor o igual que 20 m. Calcula cuánto puede medir el lado.

Solución:

$4x \le 20$

$x \le 5$

80 Un comerciante desea comprar frigoríficos y lavadoras, que cuestan 500 € y 400 €, respectivamente. Si solo dispone de sitio para almacenar 50 electrodomésticos, y de 22 000 € para invertir, representa en el plano el recinto de todas las posibles soluciones de la cantidad de frigoríficos y lavadoras que puede comprar.

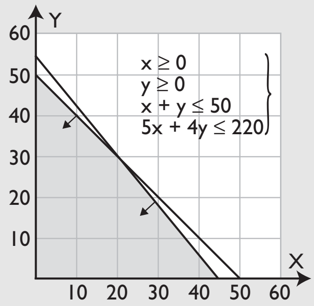
Solución:

Frigoríficos: x

Lavadoras: y

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 50 \\ 500x + 400y \le 22\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 50 \\ 5x + 4y \le 220 \end{array}\right\}$$



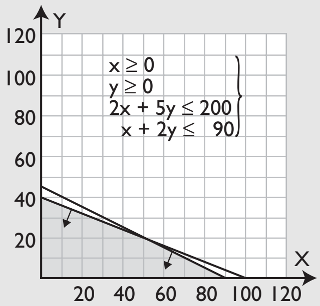
81 Un fabricante vende sillas y mesas. Para su fabricación, necesita 2 h y 5 h, respectivamente, de trabajo manual y 1 h y 2 h para pintarlas. Si el fabricante no puede sobrepasar las 200 horas de trabajo manual y 90 horas de pintura, representa en el plano el recinto de las posibles soluciones.

Solución:

Sillas: x

Mesas: y

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + 5y \le 200 \\ x + 2y \le 90 \end{array}\right\}$$

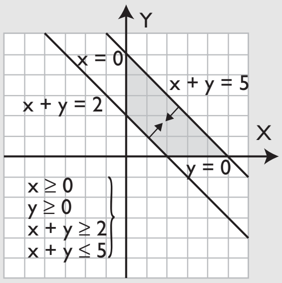


Para profundizar

Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones:

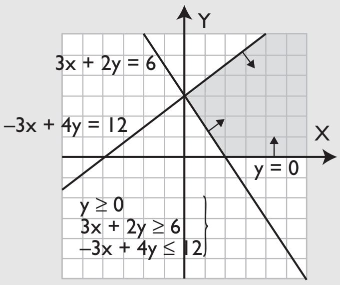
82 $$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 2 \\ x + y \le 5 \end{array}\right\}$$

Solución:



83 $\left.\begin{array}{l} y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ -3x + 4y \leq 12 \end{array}\right\}$

Solución:



84 Dada la función $f(x) = |x|$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

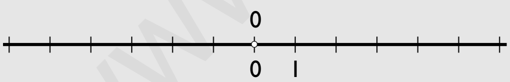
c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

Solución:

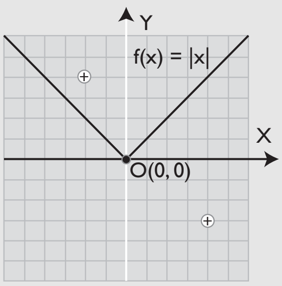
a) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $|x| > 0$ siempre que $x \neq 0$



c) $|x| < 0$ nunca, es decir, es el conjunto vacío, $\varnothing$

d) Representación:



85 Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

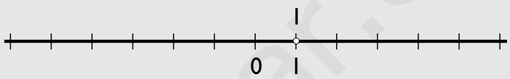
d) Represéntala para comprobarlo.

Solución:

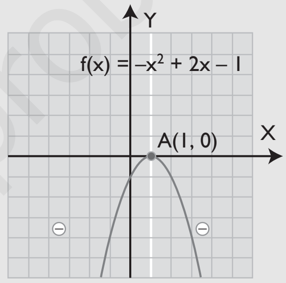
a) $-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, raíz doble.

b) Nunca es positiva, es decir, es el conjunto vacío, $\varnothing$

c) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$



d) Representación:

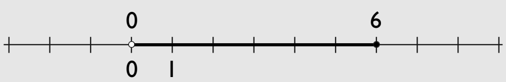


86 El área de un cuadrado es menor o igual que 36 m^2. Calcula cuánto puede medir el lado.

Solución:

$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 \leq 36 \end{array}\right\}$

$(0, 6] = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 6\}$



87 Un agricultor puede sembrar en sus tierras, como máximo, 4 hectáreas de trigo y 6 hectáreas de centeno. La producción de trigo, por cada hectárea sembrada, es de 4 toneladas, mientras que la producción de centeno, también por hectárea sembrada, es de 2 toneladas, pudiendo producir un máximo de 20 toneladas entre los dos cereales. Representa en el plano el recinto de las posibles soluciones.

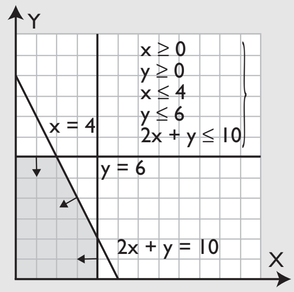
Solución:

Hectáreas de trigo: x

Hectáreas de centeno: y

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 6 \\ 4x + 2y \leq 20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 6 \\ 2x + y \leq 10 \end{array}\right\}$$



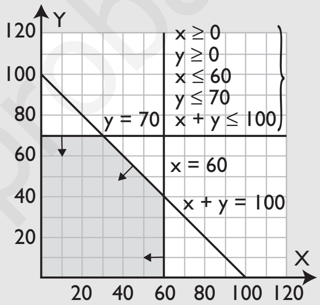
88 El número de unidades de dos productos (A y B) que un comercio puede vender es, como máximo, igual a 100. Dispone de 60 unidades de producto de tipo A y de 70 unidades de tipo B. Representa en el plano el recinto de las posibles soluciones.

Solución:

Unidades producto A: x

Unidades producto B: y

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 60 \\ y \leq 70 \\ x + y \leq 100 \end{array}\right\}$$



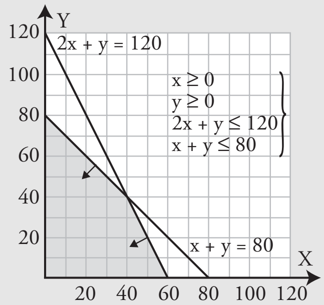
89 Una fábrica monta ordenadores e impresoras. Un ordenador necesita 2 h para su montaje, y una impresora, 1 h. Diariamente dispone de 120 h de trabajo y de una capacidad de almacenaje de 80 unidades. Si el ordenador y la impresora tienen las mismas dimensiones y, por lo tanto, ocupan el mismo espacio en el almacén, ¿cuántos ordenadores e impresoras se pueden montar cada día?

Solución:

Número de ordenadores: x

Número de impresoras: y

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + y \le 120 \\ x + y \le 80 \end{array}\right\}$$



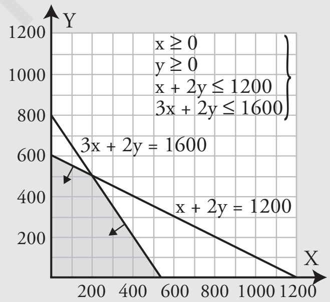
90 Los alumnos de un centro educativo pretenden vender dos tipos de lotes, A y B, para sufragar los gastos del viaje de estudios. Cada lote de tipo A consta de una caja de mantecadas y tres participaciones de lotería; cada lote del tipo B consta de dos cajas de mantecadas y dos participaciones de lotería. Por razones de almacenamiento, pueden disponer a lo sumo de 1 200 cajas de mantecadas. Los alumnos solo cuentan con 1 600 participaciones de lotería, y desean maximizar sus beneficios. ¿Cuántos lotes pueden hacer de cada tipo?

Solución:

Unidades de lote A: x

Unidades de lote B: y

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \le 1\,200 \\ 3x + 2y \le 1\,600 \end{array}\right\}$$



Comprueba lo que sabes

1 Define qué es una inecuación racional y pon un ejemplo; no es necesario que la resuelvas.

Solución:

Una **inecuación racional** es una expresión de la forma:

$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ P(x) y Q(x) son polinomios

donde el operador < puede ser: ≤, > o ≥

Ejemplo

$\frac{x+1}{x-2} \geq 0$

2 Resuelve la siguiente inecuación:

$2x + 7 \leq 3(4x - 1)$

Solución:

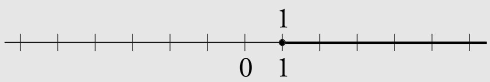
$2x + 7 \leq 12x - 3$

$2x - 12x \leq -3 - 7$

$-10x \leq -10$

$x \geq 1$

$[1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$

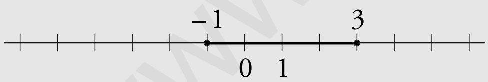


3 Resuelve la siguiente inecuación:

$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

Solución:

$[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 3\}$

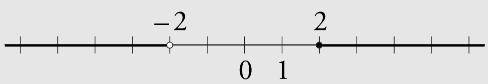


4 Resuelve la siguiente inecuación:

$\frac{x-2}{x+2} \geq 0$

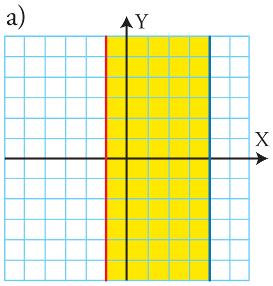
Solución:

$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

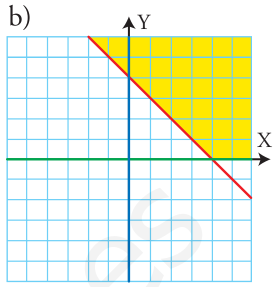


5 Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a la zona coloreada de cada una de las figuras del margen:

a)



b)



Solución:

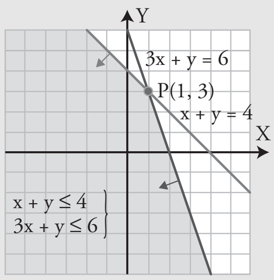
a) $\left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{array}\right\}$

6 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 4 \\ 3x + y \leq 6 \end{array}\right\}$

Solución:



7 Dada la función: $f(x) = 4 - x^2$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

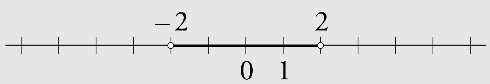
c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

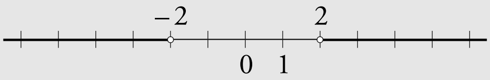
a) $4 - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 = -4$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

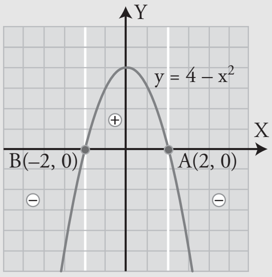
b) $(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2\}$



c) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



d) Representación:

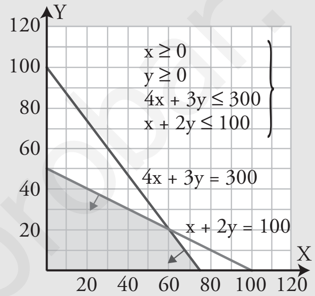


8 Un pastelero produce dos tipos de bollos. El tipo A lleva 400 g de harina y 100 g de azúcar, mientras que los del tipo B llevan 300 g de harina y 200 g de azúcar. Si el pastelero tiene para cada día 30 kg de harina y 10 kg de azúcar, ¿cuántos bollos puede producir de cada tipo?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}4x + 0{,}3y \leq 30 \\ 0{,}1x + 0{,}2y \leq 10 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 300 \\ x + 2y \leq 100 \end{array}\right\}$$



Paso a paso

91 Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3 &\leq 0 \\ x + 2 &> 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

92 Resuelve la siguiente inecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

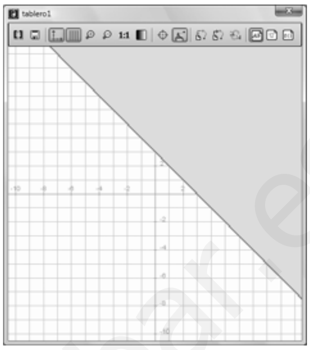
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

93 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\geq 4 \\ 2x + y &\geq 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

94 Halla mediante *ensayo-acierto* la inecuación correspondiente a la zona coloreada de la siguiente figura:



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

95 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

96 Resuelve la siguiente inecuación:

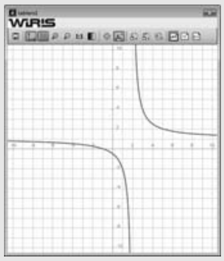
$$x + 7 \leq 3x + 4$$

Solución:
$x \geq 3/2$
Es el intervalo: $[3/2, +\infty)$

97 Resuelve la siguiente inecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

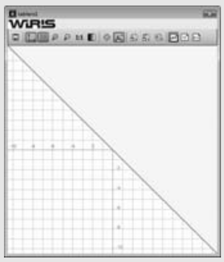
$$\frac{x+1}{x-2} \geq 0$$

Solución:
$x \leq -1 / x > 2$
Son los intervalos:
$(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$



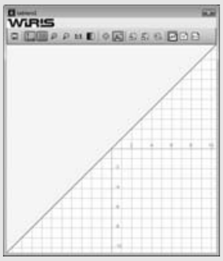
98 Resuelve la siguiente inecuación: $x + y \geq 0$

Solución:



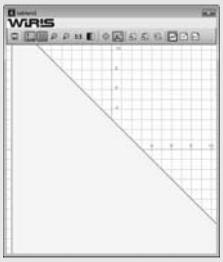
99 Resuelve la siguiente inecuación: $x - y \le 0$

Solución:



100 Resuelve la siguiente inecuación: $x + y \le 3$

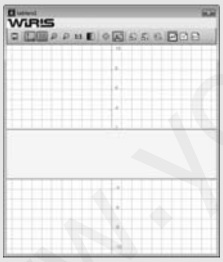
Solución:



101 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y \le 2 \\ y \ge -3 \end{array}\right\}$$

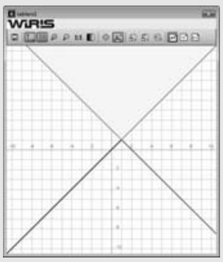
Solución:



102 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \ge 2 \\ x - y \le 0 \end{array}\right\}$$

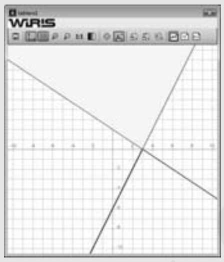
Solución:



103 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

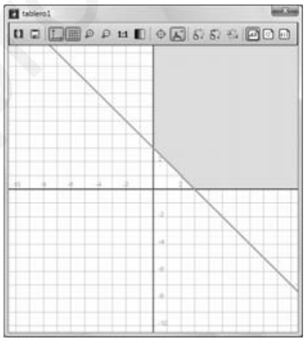
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y > 6 \\ 2x - \ \ y < 6 \end{array}\right\}$$

Solución:



Halla mediante *ensayo-acierto* cada uno de los sistemas de inecuaciones correspondientes a la zona coloreada de cada una de las siguientes figuras:

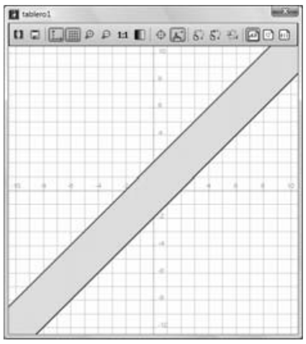
104



Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 3 \end{array}\right\}$$

105



Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \le -2 \\ x - y \ge 2 \end{array}\right\}$$

BLOQUE III

Geometría

7 Semejanza y trigonometría

1. Teorema de Thales

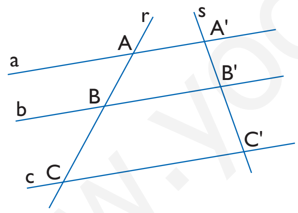
PIENSA Y CALCULA

Si una persona que mide 1,70 m proyecta una sombra de 3,40 m y el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de un árbol mide 15 m, ¿cuánto mide de alto el árbol?

Solución:
Se observa que el objeto mide la mitad que la sombra; por tanto, el árbol mide 15 : 2 = 7,5 m

APLICA LA TEORÍA

1 Sabiendo que en el siguiente dibujo AB = 18 cm, BC = 24 cm y A'B' = 15 cm, halla la longitud del segmento B'C'. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

B'C' = 20 cm

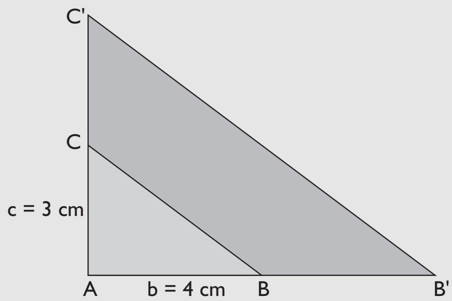
Hemos aplicado el teorema de Thales.

2 Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm y 3 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales de forma que el cateto mayor mida 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución:

r = 8 : 4 = 2

c' = 2 · 3 = 6 cm



3 Dos ángulos de un triángulo miden 45° y 60° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 75° y 60°. ¿Son semejantes ambos triángulos?

Solución:

El 3er ángulo del 1er triángulo mide:

180° – (45° + 60°) = 180° – 105° = 75°

Es decir, los ángulos del 1er triángulo miden:

45°, 60° y 75°

El 3^{er} ángulo del 2° triángulo mide:

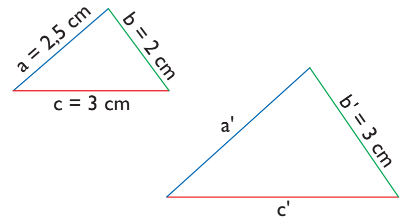
$180° - (75° + 60°) = 180° - 135° = 45°$

Es decir, los ángulos del 2° triángulo miden:

45°, 60° y 75°

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

4 Los dos triángulos del siguiente dibujo son semejantes. Halla cuánto miden a' y c'



Solución:

r = b' : b

r = 3 : 2 = 1,5

a' = 1,5 · 2,5 = 3,75 cm

c' = 1,5 · 3 = 4,5 cm

5 En una foto están Ana y su madre. Se sabe que Ana mide en la realidad 1,65 m. En la foto Ana mide 6,6 cm, y su madre, 6,88 cm. ¿Cuánto mide su madre en la realidad?

Solución:

$$\frac{6,6}{165} = \frac{6,88}{x}$$

x = 172 cm = 1,72 m

6 Un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra de un edificio el mismo día, en el mismo sitio y a la misma hora mide 24 m, ¿cuánto mide de alto el edificio?

Solución:

$$\frac{2}{1,75} = \frac{24}{x}$$

x = 21 m

7 La superficie de una esfera es de 15 m^2. Halla la superficie de otra esfera en la que el radio mide el triple.

Solución:

$S' = 3^2 \cdot 15 = 135\ m^2$

2. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 3, 4 y 5 b) 6, 7 y 8 c) 6, 8 y 10 d) 5, 12 y 13

Solución:

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$ b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$ c) $6^2 + 8^2 = 10^2$ d) $5^2 + 12^2 = 13^2$

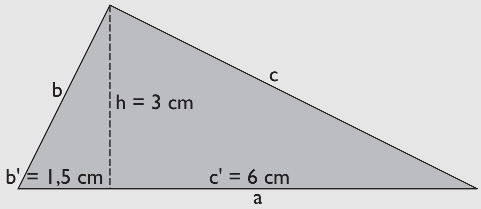
Son ternas pitagóricas a), c) y d)

8 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 1,5 cm y 6 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{1,5 \cdot 6} = 3$ cm



9 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 3,6 m. Halla:

a) la longitud del cateto **b**

b) la longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.

c) la longitud del cateto **c**

d) la longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**

e) Dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

a) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6$ m

b) $c' = a - b'$

$c' = 10 - 3,6 = 6,4$ m

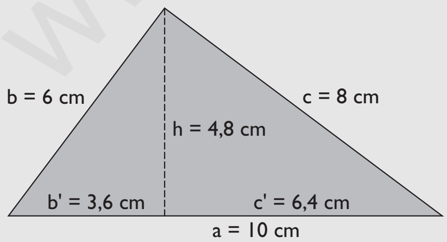
c) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8$ m

d) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

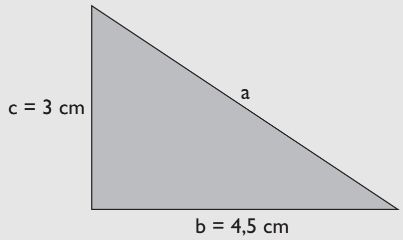
$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ m

e) Dibujo



10 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,5 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

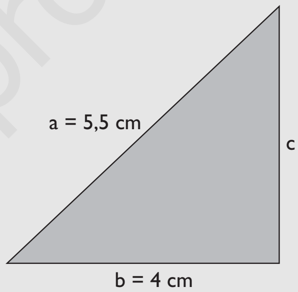


$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{4,5^2 + 3^2} = 5,41$ cm

11 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5,5 cm, y un cateto, 4 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

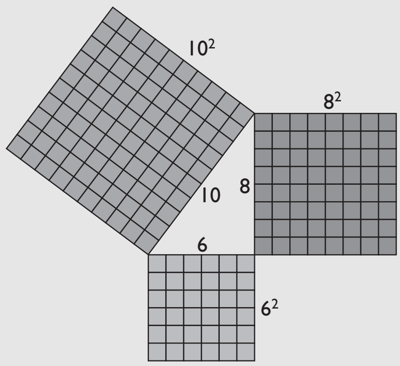


$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{5,5^2 - 4^2} = 3,77$ cm

12 Dibuja la interpretación gráfica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6, 8 y 10 cm

Solución:



$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$

13 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 2, 3 y 4 b) 3, 4 y 5

c) 4, 5 y 6 d) 5, 12 y 13

Solución:

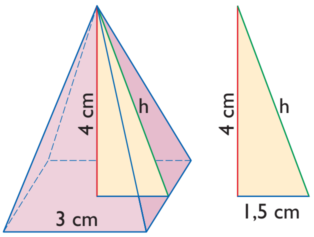
a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No

b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí

c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No

d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

14 En una pirámide cuadrangular la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 4 cm. Calcula el área lateral de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

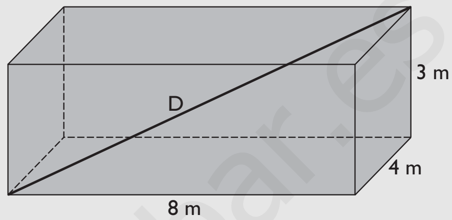
$h^2 = 1,5^2 + 4^2$

$h = 4,27$ cm

$A_L = 4 \cdot \dfrac{3 \cdot 4,27}{2} = 25,62 \text{ cm}^2$

15 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 8 m, 4 m y 3 m

Solución:



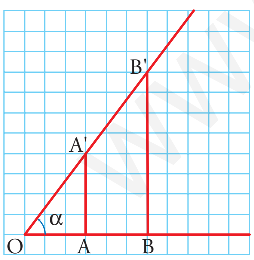
Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2$

$D = 9,43$ m

3. Razones trigonométricas o circulares

PIENSA Y CALCULA



Dado el ángulo α del dibujo:

a) aplica el teorema de Pitágoras y calcula mentalmente los segmentos OA' y OB'

b) halla las razones siguientes y di si hay alguna relación entre ellas:

$\dfrac{AA'}{OA'}$ $\qquad$ $\dfrac{BB'}{OB'}$

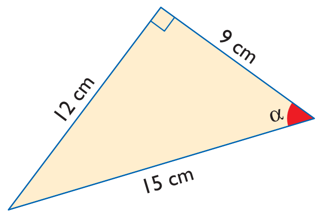
Solución:

a) OA' = 5, OB' = 10

b) $\dfrac{AA'}{OA'} = \dfrac{4}{5}, \dfrac{BB'}{OB'} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

Las dos razones son iguales.

16 Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:



Solución:

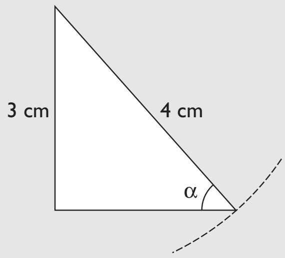
sen α = 12/15 = 4/5 ⇒ cosec α = 5/4

cos α = 9/15 = 3/5 ⇒ sec α = 5/3

tg α = 12/9 = 4/3 ⇒ cotg α = 3/4

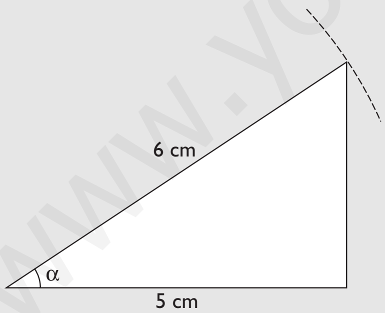
17 Dibuja un ángulo tal que sen α = 3/4

Solución:

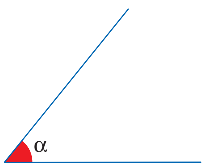


18 Dibuja un ángulo tal que cos α = 5/6

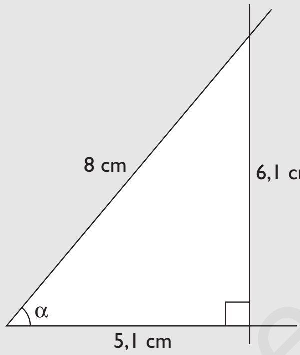
Solución:



19 Calcula de forma aproximada el valor del sen α, cos α y tg α en el siguiente dibujo:



Solución:



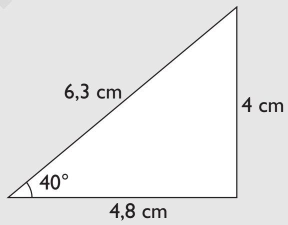
sen α = 6,1/8 = 0,76

cos α = 5,1/8 = 0,64

tg α = 6,1/5,1 = 1,20

20 Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α de 40° y aproxima, midiendo en el dibujo, el valor del sen α, cos α y tg α

Solución:



sen 40° = 4/6,3 = 0,63

cos 40° = 4,8/6,3 = 0,76

tg 40° = 4/4,8 = 0,83

21 Calcula, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea el resultado a 4 decimales.

a) sen 32° b) cos 68°

c) tg 85° 40' 8'' d) sen 46° 35' 12''

Solución:

a) 0,5299

b) 0,3746

c) 13,2037

d) 0,7264

22 Calcula, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo α:

a) sen α = 0,5765 b) cos α = 0,3907

c) tg α = 1,8940 d) cos α = 0,3786

Solución:

a) 35° 12’ 17”

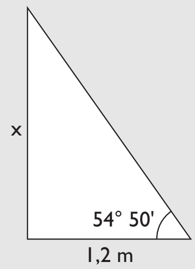
b) 67° 7”

c) 62° 10’

d) 67° 45’ 11”

23 Elisa y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 1,2 m y el ángulo con el que se ve la parte superior de su cabeza desde el extremo de la sombra mide 54° 50’. Calcula la altura de Elisa.

Solución:



$$\text{tg } 54° 50' = \frac{x}{1,2} \Rightarrow x = 1,2 \text{ tg } 54° 50' = 1,70 \text{ m}$$

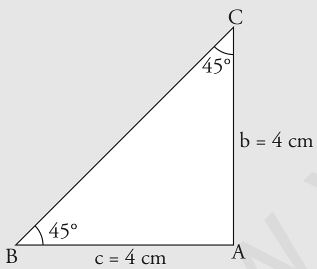
4. Relaciones entre las razones trigonométricas

PIENSA Y CALCULA

Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.

a) ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

b) Calcula el valor de la tangente de uno de sus ángulos agudos.



Solución:

a) Los ángulos miden 90° : 2 = 45°

b) tg 45° = 4/4 = 1

APLICA LA TEORÍA

24 Sabiendo que sen α = 2/5, calcula cos α

Solución:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

25 Sabiendo que sec α = 17/8, calcula tg α

Solución:

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{15}{8}$$

26 Sabiendo que tg α = 3, calcula sen α

Solución:

$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$3^2 + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = 10 \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{10}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 3\,\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

27 Calcula cos 40° sabiendo que se verifica que sen 50° = 0,7660

Solución:

cos 40° = sen 50° = 0,7660

28 Sabiendo que sen α = 1/4, calcula las restantes razones trigonométricas de α

Solución:

$\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = 4$

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{15}{16}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{4} : \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

$\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$

29 Sabiendo que sen 20° = 0,3420 y cos 20° = 0,9397, calcula:

a) cos 70° b) sen 70° c) tg 20° d) tg 70°

Solución:

a) cos 70° = sen 20° = 0,3420

b) sen 70° = cos 20° = 0,9397

c) $\text{tg}\,20 = \dfrac{\text{sen}\,20°}{\cos 20°} = 0{,}3639$

d) $\text{tg}\,70° = \dfrac{\text{sen}\,70°}{\cos 70°} = 2{,}7477$

30 Simplifica la siguiente expresión:

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha$

Solución:

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha\,\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \dfrac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

31 Simplifica la siguiente expresión:

$\dfrac{1 + \text{tg}^2\,\alpha}{\sec\alpha}$

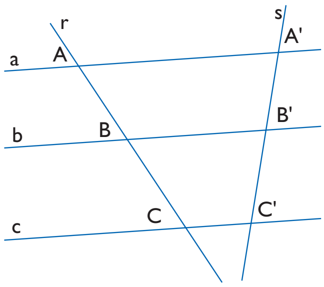
Solución:

$\dfrac{1 + \text{tg}^2\,\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{\sec^2\alpha}{\sec\alpha} = \sec\alpha$

Ejercicios y problemas

1. Teorema de Thales

32 Sabiendo que AB = 7,5 cm, BC = 10 cm y B'C' = 12 cm, halla la longitud del segmento A'B'. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

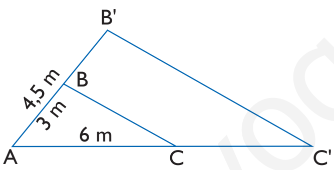
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{A'B'}{7,5} = \frac{12}{10}$$

A'B' = 9 cm

Hemos aplicado el teorema de Thales.

33 Sabiendo que AB = 3 m, AC = 6 m y AB' = 4,5 m, halla la longitud del lado AC'. ¿Cómo están los triángulos ABC y AB'C'?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

$$\frac{4,5}{3} = \frac{AC'}{6}$$

AC' = 9 cm

Los triángulos ABC y AB'C' están en posición de Thales.

34 Un ángulo de un triángulo mide 53° y los lados que lo forman miden a = 6 cm y b = 9 cm. En otro triángulo semejante se sabe que un ángulo mide 53° y que uno de los lados que lo forman mide a' = 15 cm. ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 53°?

Solución:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{15}{6} = \frac{x}{9}$$

x = 22,5 cm

35 Un árbol de 1,6 m proyecta una sombra de 1,2 m. En el mismo sitio, el mismo día y a la misma hora, la sombra de una antena de telefonía móvil mide 52 m. ¿Cuánto mide de alto la antena de telefonía móvil?

Solución:

$$\frac{1,2}{1,6} = \frac{52}{x}$$

x = 69,33 cm

36 El volumen de una esfera es de 7,5 cm^3. Halla el volumen de otra esfera en la que el radio mide el doble.

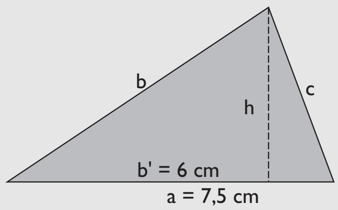
Solución:

$V' = 2^3 \cdot 7,5 = 60\ cm^3$

2. Teorema de Pitágoras

37 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 7,5 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de dicha altura.

Solución:



$h^2 = b' \cdot c'$

b' = 6 cm

c' = a – b' = 7,5 – 6 = 1,5 cm

$h^2 = 6 \cdot 1,5 = 9$

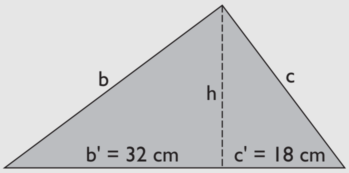
h = 3 cm

38 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden b' = 32 cm y c' = 18 cm. Halla:

a) el cateto **b**

b) el cateto **c**

Solución:



a) $b^2 = a \cdot b'$

$a = b' + c' = 32 + 18 = 50$ cm

$b^2 = 50 \cdot 32$

$b = 40$ cm

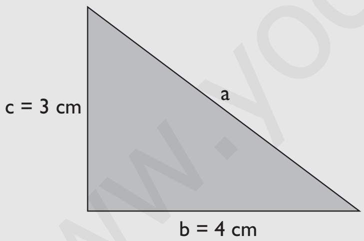
b) $c^2 = a \cdot c'$

$c^2 = 50 \cdot 18$

$c = 30$ cm

39 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo rectángulo.

Solución:



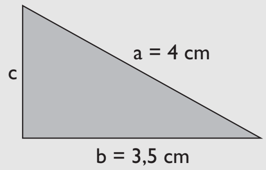
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$\text{Área} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$

40 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4 cm, y un cateto, 3,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} = 1{,}94$ cm

41 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 5, 7 y 9 b) 6, 8 y 10

c) 7, 9 y 11 d) 10, 24 y 26

Solución:

a) $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No

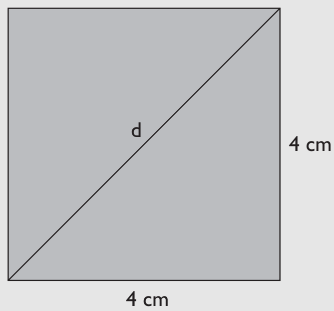
b) $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí

c) $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No

d) $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí

42 Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal. Redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.

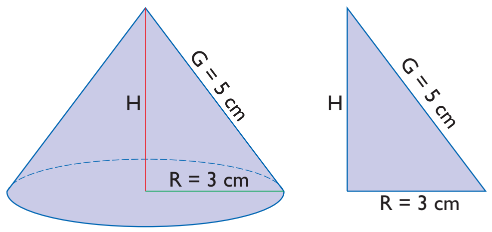
Solución:



$d^2 = 4^2 + 4^2$

$d = 5{,}7$ cm

43 Del siguiente cono se sabe que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 5 cm. Calcula el volumen de dicho cono. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura H

$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow H = \sqrt{G^2 - R^2}$

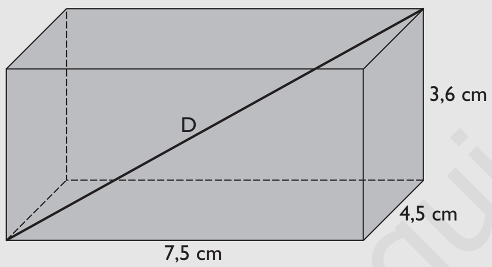
$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$V = A_B \cdot H$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}70 \text{ cm}^2$

44 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 7,5 cm, 4,5 cm y 3,6 cm

Solución:



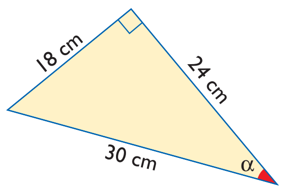
Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 7{,}5^2 + 4{,}5^2 + 3{,}5^2$

$D = 9{,}42$ cm

3. Razones trigonométricas o circulares

45 Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:



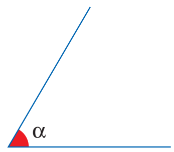
Solución:

sen α = 18/30 = 3/5 $\Rightarrow$ cosec α = 5/3

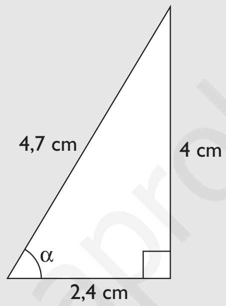
cos α = 24/30 = 4/5 $\Rightarrow$ sec α = 5/4

tg α = 18/24 = 3/4 $\Rightarrow$ cotg α = 4/3

46 Calcula el valor del seno, el coseno y la tangente del siguiente ángulo:



Solución:



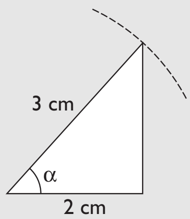
sen α = 4/4,7 = 0,85

cos α = 2,4/4,7 = 0,51

tg α = 4/2,4 = 1,67

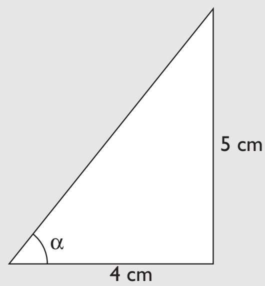
47 Dibuja un ángulo agudo α tal que cos α = 2/3

Solución:

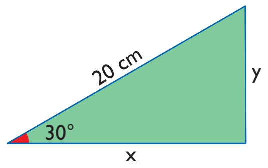


48 Dibuja un ángulo agudo α tal que tg α = 5/4

Solución:



49 Calcula la longitud de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo sabiendo que se verifica que sen 30° = 0,5 y cos 30° = 0,8660



Solución:

$\text{sen } 30° = \dfrac{y}{20}$

$0{,}5 = \dfrac{y}{20} \Rightarrow y = 0{,}5 \cdot 20 = 10 \text{ cm}$

$\cos 30° = \dfrac{x}{20}$

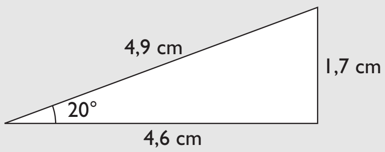
$0{,}8660 = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 0{,}8660 \cdot 20 = 17{,}32 \text{ cm}$

50 Dibuja los siguientes ángulos y aproxima midiendo en el dibujo el valor del seno, el coseno y la tangente. Aproxima el resultado a dos decimales:

a) 20° b) 50°

Solución:

a)

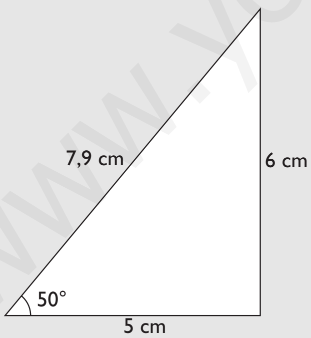


sen 20° = 1,7/4,9 = 0,35

cos 20° = 4,6/4,9 = 0,94

tg 20° = 1,7/4,6 = 0,37

b)



sen 50° = 6/7,9 = 0,76

cos 50° = 5/7,9 = 0,63

tg 50° = 6/5 = 1,2

51 Halla, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea los resultados a 4 decimales.

a) sen 42° 25' 30" b) cos 72° 40' 10"

c) tg 65° 30' 18" d) sen 16° 23' 42"

Solución:

a) 0,6746 b) 0,2979

c) 2,1948 d) 0,2823

52 Halla, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo **α**:

a) sen α = 0,8530 b) cos α = 0,4873

c) tg α = 0,7223 d) cos α = 0,7970

Solución:

a) α = 58° 32' 22" b) α = 60° 50' 12"

c) α = 35° 50' 26" d) α = 37° 9' 20"

4. Relaciones entre las razones trigonométricas

53 Sabiendo que sen α = 5/13, calcula cos α

Solución:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

54 Sabiendo que cos α = 9/15, calcula tg α

Solución:

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\dfrac{15}{9}\right)^2$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{3}$

55 Sabiendo que tg α = 3/2, calcula sen α

Solución:

$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 = \sec^2 \alpha$

$\sec \alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

$$\text{sen}\ \alpha = \text{tg}\ \alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

56 Sabiendo que cos 72° = 0,3090, calcula sen 18°

Solución:

sen 18° = cos 72° = 0,3090

57 Sabiendo que cos α = 1/5, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 5$$

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\ \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{24}}{5} : \frac{1}{5} = \sqrt{24}$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24}$$

58 Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}^2\ \alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\ \alpha}$$

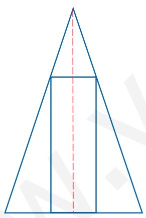
Solución:

$$\frac{\text{sen}^2\ \alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\ \alpha} = \frac{\text{sen}^2\ \alpha - 1 + \text{sen}^2\ \alpha}{1 - \text{sen}^2\ \alpha - \text{sen}^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ \text{sen}^2\ \alpha - 1}{1 - 2\ \text{sen}^2\ \alpha} = -1$$

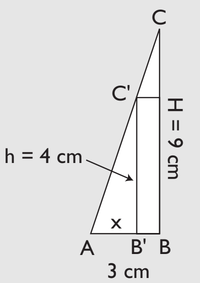
Para ampliar

59 Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es B = 6 cm, y la altura, H = 9 cm, y que la altura del rectángulo es h = 4 cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

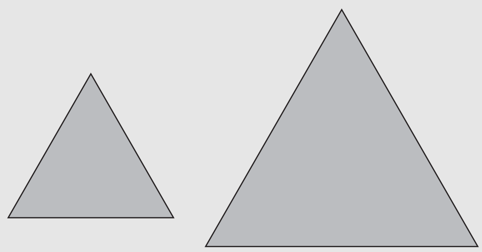
$$\frac{x}{3} = \frac{4}{9}$$

x = 1,33 cm

Base del rectángulo: 2(3 – 1,33) = 3,34 cm

60 Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.

Solución:



Sí son semejantes, porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

61 Los lados de un triángulo miden a = 5 cm, b = 7,5 cm y c = 9 cm. Halla la medida de los lados a', b' y c' de un triángulo semejante en el que r = 1,5

Solución:

a' = 1,5 · a

a' = 1,5 · 5 = 7,5 cm

b' = 1,5 · b

b' = 1,5 · 7,5 = 11,25 cm

c' = 1,5 · c

c' = 1,5 · 9 = 13,5 cm

62 Un palo de un metro de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de un metro. Si el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la pirámide Kefrén mide 136 m, calcula mentalmente lo que mide de alto la pirámide de Kefrén.

Solución:

La pirámide de Kefrén mide lo mismo que la sombra, es decir, 136 m

63 El radio de una circunferencia mide **x** metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Solución:

Longitud:

$\frac{L'}{L} = 3$

L' = 3L

La longitud es el triple.

Área:

$\frac{A'}{A} = 3^2$

A' = 9A

El área es nueve veces mayor.

64 Clasifica los siguientes triángulos en acutángulos, rectángulos y obtusángulos:

a) a = 1 cm, b = 1,5 cm, c = 2 cm

b) a = 1,5 cm, b = 2 cm, c = 2,5 cm

c) a = 2 cm, b = 2,5 cm, c = 3 cm

d) a = 2,5 cm, b = 6 cm, c = 6,5 cm

Solución:

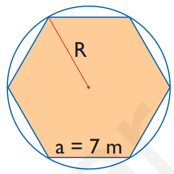
a) $1^2 + 1,5^2 = 3,25 < 2^2 = 4 \Rightarrow$ Obtusángulo.

b) $1,5^2 + 2^2 = 2,5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

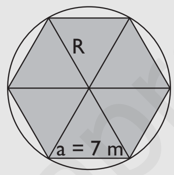
c) $2^2 + 2,5^2 = 10,25 > 3^2 = 9 \Rightarrow$ Acutángulo.

d) $2,5^2 + 6^2 = 6,5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

65 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:



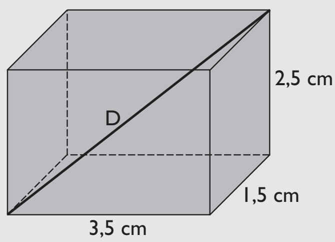
Solución:



En el hexágono coincide la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, R = 7 m

66 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3,5 cm, 1,5 cm y 2,5 cm

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 3,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2$

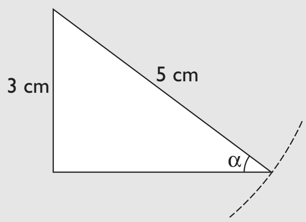
D = 4,56 cm

67 Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

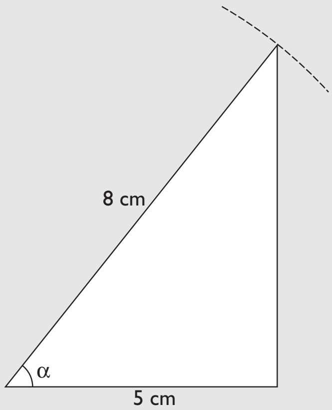
a) sen α = 3/5 b) cos α = 5/8

Solución:

a)



b)



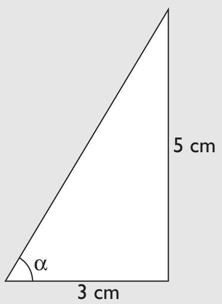
68 Dibuja un ángulo agudo **α** que cumpla:

a) tg α = 5/3

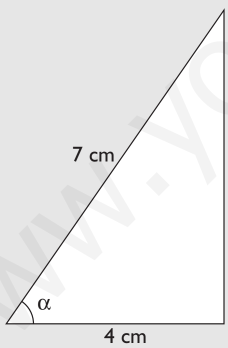
b) sec α = 7/4

Solución:

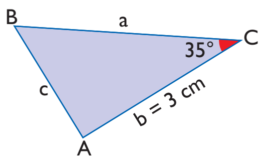
a)



b)



69 Calcula a, c y B en el siguiente triángulo rectángulo, sabiendo que tg 35° = 0,7002 y sen 35° = 0,5736. Aproxima el resultado a dos decimales.



Solución:

$$\text{tg } 35° = \frac{c}{3} = 0{,}7002$$

$$c = 3 \cdot 0{,}7002 = 2{,}10 \text{ cm}$$

$$\text{sen } 35° = \frac{c}{a} = 0{,}5736$$

$$a = \frac{2{,}10}{0{,}5736} = 3{,}66 \text{ cm}$$

$$B = 55°$$

70 Halla cos α y tg α sabiendo que sen α = 3/5

Solución:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

71 Calcula sen α y tg α sabiendo que se verifica que cos α = 2/5

Solución:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

72 Si tg α = 4, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$4^2 + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = 17$$

$$\sec\alpha = \sqrt{17} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{sen}\ \alpha = \text{tg}\ \alpha \cdot \cos \alpha = 4\frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

73 Simplifica la siguiente expresión:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha$

Solución:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha\,(1 - \cos^2 \alpha) =$

$= \cancel{\cos^3} \alpha + \cos \alpha - \cancel{\cos^3} \alpha =$

$= \cos \alpha$

Con calculadora

74 Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) cos 17° 30' 20"

b) tg 20° 30' 40"

c) sen 39° 40'

Solución:

a) 0,9537

b) 0,3741

c) 0,6383

75 Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) sen 21° 50'

b) cos 32° 30"

c) tg 15° 20' 30"

Solución:

a) 0,3719

b) 0,8434

c) 0,2744

76 Calcula redondeando a cuatro decimales:

a) sec 50°

b) cotg 15° 40'

c) cosec 43° 12"

Solución:

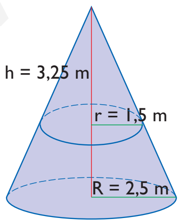
a) 1,5557

b) 3,5656

c) 1,4608

Problemas

77 Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.



Solución:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{2,5}{1,5} = \frac{H}{3,25}$$

H = 5,42 m

78 Los lados de un triángulo miden a = 2 cm, b = 2,5 cm y c = 3,5 cm. Sabiendo que en otro triángulo semejante a' = 5 cm, halla la medida de los lados b' y c'

Solución:

Razón de semejanza:

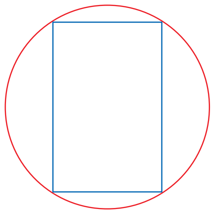
$$r = \frac{a'}{a}$$

$$r = \frac{5}{2} = 2,5$$

b' = 2,5 · 2,5 = 6,25 cm

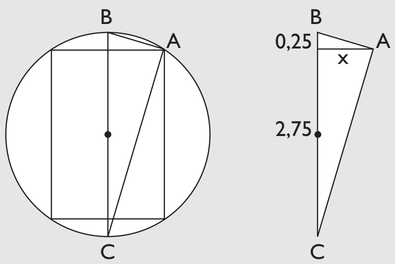
c' = 2,5 · 3,5 = 8,75 cm

79 Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la circunferencia es $R = 1{,}5$ cm y que la altura del rectángulo es $h = 2{,}5$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



El triángulo dibujado es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

Aplicando el teorema de la altura:

$x^2 = 2{,}75 \cdot 0{,}25$

$x = 0{,}83$ cm

Base del rectángulo: $2x = 2 \cdot 0{,}83 = 1{,}66$ cm

80 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden b' = 18 cm y c' = 32 cm. Halla:

a) la longitud de la hipotenusa **a**

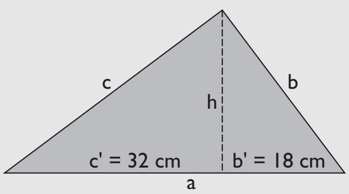
b) la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

c) el cateto **b**

d) el cateto **c**

e) el área de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



a) $a = b' + c'$

$a = 18 + 32 = 50$ cm

b) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{18 \cdot 32} = 24$ cm

c) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{50 \cdot 18} = 30$ cm

d) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

$c = \sqrt{50 \cdot 32} = 40$ cm

e) Área = b · c

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600 \text{ cm}^2$

81 Un rectángulo mide 400 m de perímetro y 2 500 m^2 de área. Halla el área de otro rectángulo semejante que mide 1 000 m de perímetro.

Solución:

$r = \frac{P'}{P}$

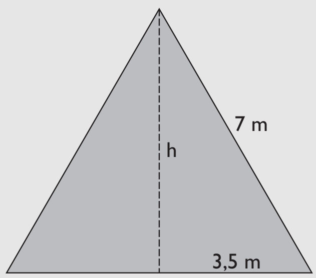
$r = \frac{1\,000}{400} = 2{,}5$

$A' = r^2 \cdot A$

$A' = 2{,}5^2 \cdot 2\,500 = 15\,625 \text{ m}^2$

82 Halla la altura de un triángulo equilátero de 7 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

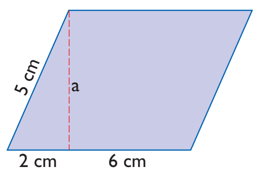
Solución:



$h^2 + 3{,}5^2 = 7^2$

$h = 6{,}06$ m

83 Halla el área del siguiente romboide:



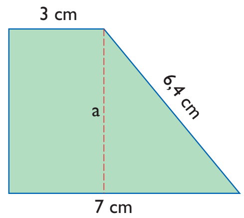
Solución:

$a^2 + 2^2 = 5^2$

$a = 4{,}58$ cm

Área: $8 \cdot 4{,}58 = 36{,}64$ cm^2

84 Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



Solución:

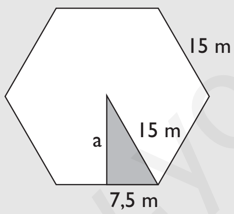
$a^2 + 4^2 = 6{,}4^2$

$a = 5{,}00$ cm

$\text{Área} = \dfrac{7 + 3}{2} \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$

85 Halla el área de un hexágono regular de 15 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

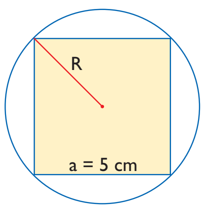


$a^2 + 7{,}5^2 = 15^2$

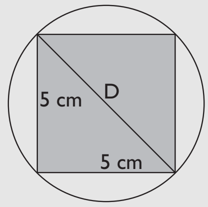
$a = 12{,}99 = 13{,}00$ m

$\text{Área} = \dfrac{6 \cdot 15}{2} \cdot 13 = 585 \text{ cm}^2$

86 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:



Solución:



$D^2 = 5^2 + 5^2$

$D = 7{,}07$ cm

$R = D/2 = 3{,}54$ cm

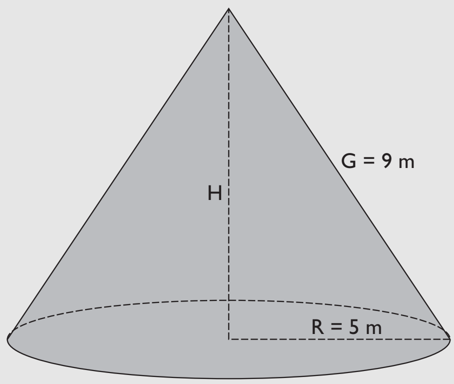
87 Una antena de radio proyecta una sombra de 57 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Sonia, que mide 1,75 m, proyecta una sombra de 2,20 m. Calcula la altura de la antena de radio.

Solución:

$\dfrac{2{,}20}{1{,}75} = \dfrac{57}{x} \Rightarrow x = 45{,}34$ m

88 Halla el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m y la generatriz mide 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$H^2 + 5^2 = 9^2$

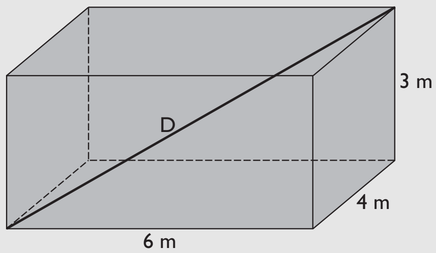
$H = 7{,}48$ m

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}48 = 195{,}83 \text{ m}^3$

89 Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m

Solución:

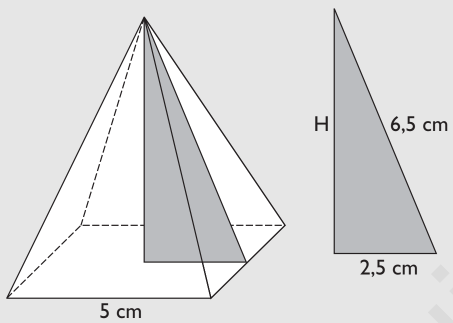


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 \Rightarrow D = 7{,}81$ m

90 Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 5 cm y la apotema mide 6,5 cm. Calcula su volumen.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 2{,}5^2 = 6{,}5^2$

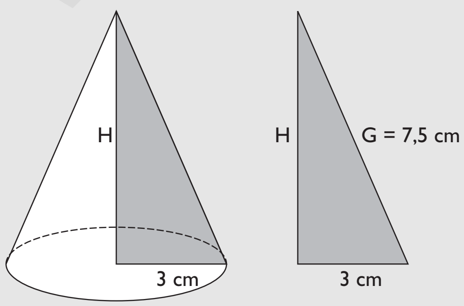
$H = 6$ cm

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = 50 \text{ cm}^2$

91 Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 7,5 cm. Halla su altura.

Solución:



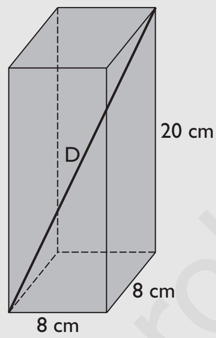
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 3^2 = 7{,}5^2$

$H = 6{,}87$ cm

92 Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene 8 cm de arista y 20 cm de altura.

Solución:

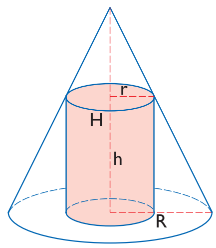


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 8^2 + 8^2 + 20^2$

$D = 22{,}98$ cm

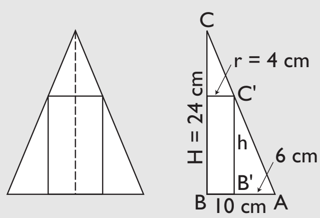
93 Se tiene un cilindro inscrito en un cono, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la altura del cono es $H = 24$ cm, el radio del cono es $R = 10$ cm, y que el radio del cilindro mide $r = 4$ cm, halla cuánto mide la altura **h** del cilindro.

Solución:

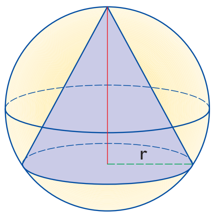
Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} \Rightarrow \dfrac{6}{10} = \dfrac{h}{24} \Rightarrow x = 14{,}4$ cm

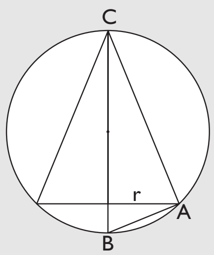
94 Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la siguiente figura:

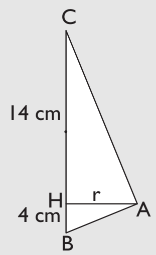


Sabiendo que el radio de la esfera es R = 9 cm y que la altura del cono es h = 14 cm, halla cuánto mide el radio de la base del cono.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.





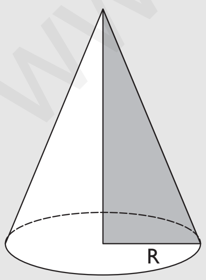
El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

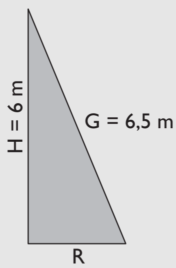
Aplicando el teorema de la altura:

$r^2 = 14 \cdot 4 = 56 \Rightarrow r = 7,48$ cm

95 Halla el radio de la base de un cono recto en el que la altura mide 6 m, y la generatriz, 6,5 m

Solución:



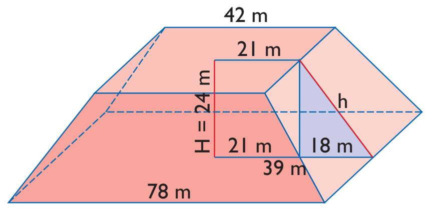


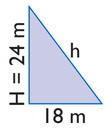
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$R^2 + 6^2 = 6,5^2$

R = 2,5 m

96 Calcula el área del siguiente tronco de pirámide:





Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 18^2 + 24^2$

h = 30 m

$A_{B_1} = 78^2 = 6\,084 \text{ m}^2$

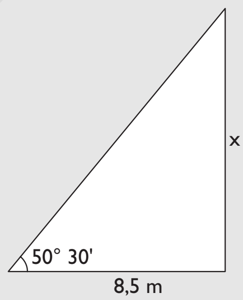
$A_{B_2} = 42^2 = 1\,764 \text{ m}^2$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{78 + 42}{2} \cdot 30 = 7\,200 \text{ m}^2$

$A_T = 6\,084 + 1\,764 + 7\,200 = 15\,048 \text{ m}^2$

97 Un árbol forma con su sombra un ángulo recto. Si la sombra mide 8,5 m, y el ángulo con el que se ve la parte superior del árbol, desde el extremo de la sombra, mide 50° 30', calcula la altura del árbol.

Solución:



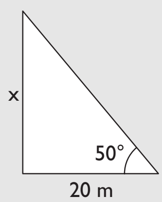
$\text{tg } 50° \, 30' = \dfrac{x}{8,5}$

$x = 8,5 \text{ tg } 50° \, 30' =$

$= 10,31$ m

98 Desde un punto en el suelo situado a 20 m del pie de la fachada de un edificio se ve el tejado del mismo con un ángulo de 50°. Calcula la altura del edificio.

Solución:

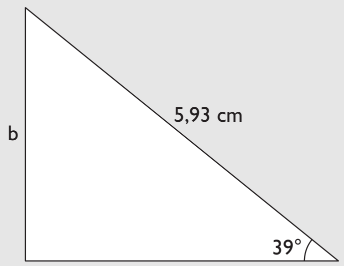


$\text{tg } 50° = \dfrac{x}{20}$

$x = 20 \text{ tg } 50° = 23,84$ m

99 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **b,** siendo a = 5,93 cm y B = 39°

Solución:

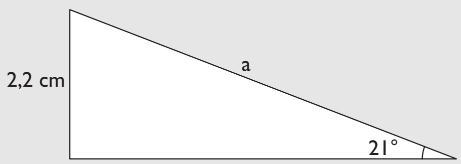


$\text{sen } 39° = \dfrac{b}{5{,}93}$

b = 5,93 sen 39° = 3,73 cm

100 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **a,** siendo b = 2,2 cm y B = 21°

Solución:

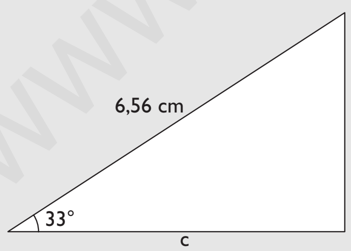


$\text{sen } 21° = \dfrac{2{,}2}{a}$

$a = \dfrac{2{,}2}{\text{sen } 21°} = 6{,}14 \text{ cm}$

101 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **c,** siendo a = 6,56 cm y B = 33°

Solución:

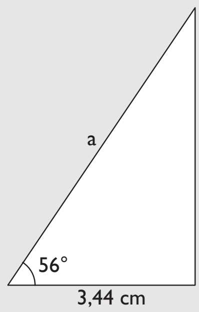


$\cos 33° = \dfrac{c}{6{,}56}$

c = 6,56 cos 33° = 5,50 cm

102 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **a,** siendo c = 3,44 cm y B = 56°

Solución:

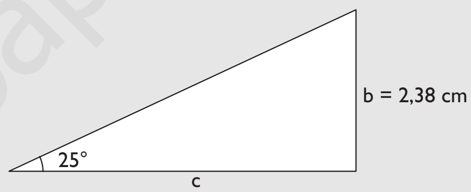


$\cos 56° = \dfrac{3{,}44}{a}$

$a = \dfrac{3{,}44}{\cos 56°} = 6{,}15 \text{ cm}$

103 Calcula en un triángulo rectángulo el lado **c,** siendo b = 2,38 cm y B = 25°

Solución:

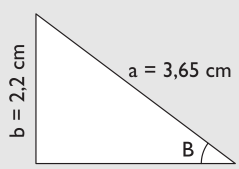


$\text{tg } 25° = \dfrac{2{,}38}{c}$

$c = \dfrac{2{,}38}{\text{tg } 25°} = 5{,}10 \text{ cm}$

104 Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **B,** siendo a = 3,65 cm y b = 2,2 cm

Solución:

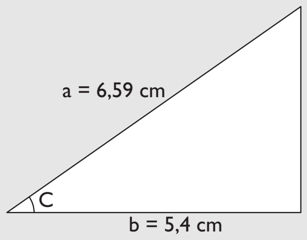


$\text{sen } B = \dfrac{2{,}2}{3{,}65}$

B = 37° 3' 59''

105 Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **C,** siendo a = 6,59 cm y b = 5,4 cm

Solución:

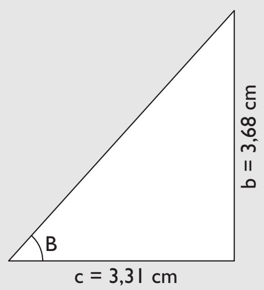


$\cos C = \dfrac{5,4}{6,59}$

$C = 34°\ 58'\ 22''$

106 Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **B,** siendo b = 3,68 cm y c = 3,31 cm

Solución:

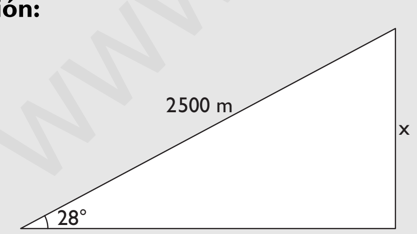


$\operatorname{tg} B = \dfrac{3,68}{3,31}$

$B = 48°\ 1'\ 48''$

107 Desde un barco se mide con un radar la distancia a la cima de una montaña, que es de 2 500 m. El ángulo de elevación con el que se ve la cima desde el barco es de 28°. Calcula la altura de la montaña.

Solución:



$\operatorname{sen} 28° = \dfrac{x}{2\,500}$

$x = 2\,500 \operatorname{sen} 28° = 1\,173,68$ m

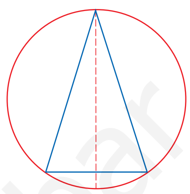
108 Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$

Solución:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha)\cancel{(1 - \cos \alpha)}}{\cancel{1 - \cos \alpha}} = 1 + \cos \alpha$$

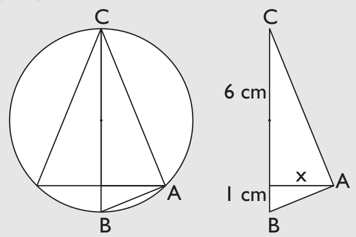
Para profundizar

109 Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es D = 7 cm y que la altura del triángulo es h = 6 cm, halla cuánto mide la base del triángulo isósceles.

Solución:



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

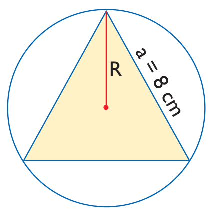
Aplicando el teorema de la altura:

$x^2 = 6 \cdot 1$

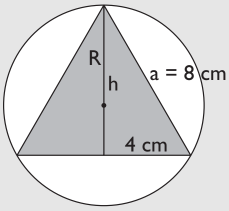
$x = 2,45$ cm

Base del triángulo: $2x = 2 \cdot 2,45 = 4,90$ cm

110 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero.



Solución:



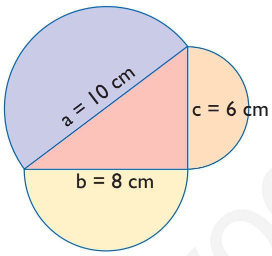
$h^2 + 4^2 = 8^2$

$h = 6{,}93$ cm

El radio es los 2/3 de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$R = \dfrac{2}{3} \cdot 6{,}93 = 4{,}62$ cm

111 Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden a = 10 cm, b = 8 cm y c = 6 cm. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.



Solución:

Área del semicírculo de radio a = 10 cm

$A_1 = \pi \cdot 10^2/2 = 157{,}08\ cm^2$

Área del semicírculo de radio b = 8 cm

$A_2 = \pi \cdot 8^2/2 = 100{,}53\ cm^2$

Área del semicírculo de radio c = 6 cm

$A_3 = \pi \cdot 6^2/2 = 56{,}55\ cm^2$

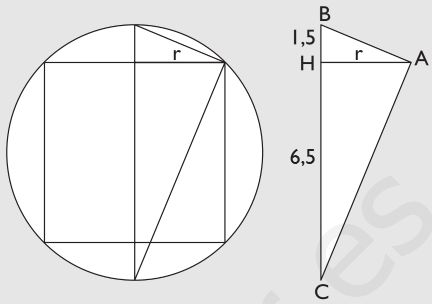
$A_2 + A_3 = 100{,}53 + 56{,}55 = 157{,}08\ cm^2$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

112 Se tiene un cilindro inscrito en una esfera. Sabiendo que el radio de la esfera es R = 4 cm y la altura del cilindro es h = 5 cm, halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: 180°/2 = 90°

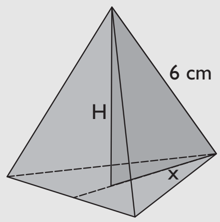
Aplicando el teorema de la altura:

$r^2 = 6{,}5 \cdot 1{,}5 = 9{,}75$

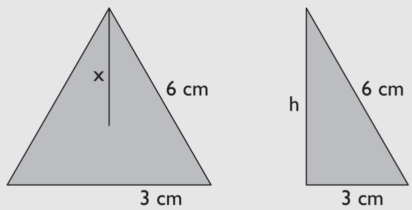
$r = 3{,}12$ cm

113 Calcula la altura de un tetraedro de arista 6 cm

Solución:



En primer lugar tenemos que hallar la altura del triángulo equilátero de la base, para poder hallar posteriormente **x**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$h^2 + 3^2 = 6^2$

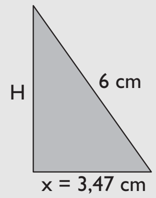
$h = 5{,}20$ cm

Por la propiedad de las medianas de un triángulo, éstas se cortan en un punto que está a 2/3 del vértice. Se tiene:

$x = \frac{2}{3} \cdot h$

$x = \frac{2}{3} \cdot 5{,}20 = 3{,}47$ cm

Se obtiene otro triángulo rectángulo formado por x, H y una arista:



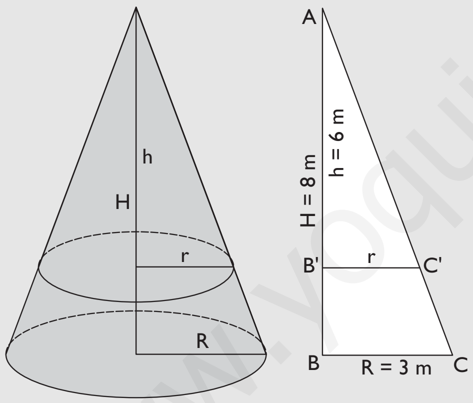
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$H^2 + 3{,}47^2 = 6^2$

H = 4,89 cm

114 El radio de la base de un cono mide 3 cm y la altura mide 8 m. Se corta por un plano paralelo a la base a 2 m de la misma. ¿Qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?

Solución:



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

$\frac{6}{8} = \frac{r}{3}$

r = 2,25 m

115 ¿Existe algún ángulo α tal que sen α = 4/5 y cos α = 3/4?

Solución:

Para que sea posible se debe cumplir la propiedad fundamental

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

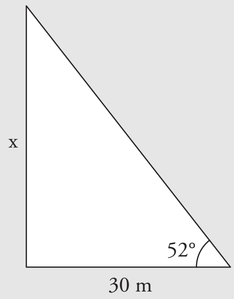
$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{481}{400} \neq 1$

No se cumple.

Cálculo de alturas

116 Desde un punto en el suelo situado a 30 metros del pie de una torre se traza la visual a la cúspide de la torre con un ángulo de 52°. ¿Cuál es la altura de la torre?

Solución:

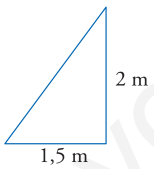


$\text{tg } 52° = \dfrac{x}{30}$

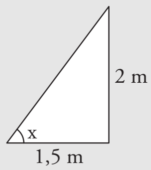
$x = 30 \text{ tg } 52° = 38{,}40 \text{ m}$

Cálculo de inclinaciones

117 ¿Cuál es la inclinación de los rayos del sol si un mástil de 2 m proyecta un sombra sobre el suelo de 1,5 m?



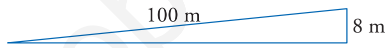
Solución:



$\text{tg } x = \dfrac{2}{1{,}5} = 1{,}33$

$x = 53° \, 3' \, 40''$

118 Un tramo de carretera salva en 100 m, medidos sobre la carretera, un desnivel de 8 m. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera?

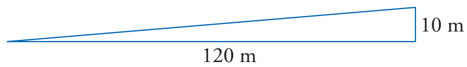


Solución:

$\text{sen } x = 8/100 = 0{,}08$

$x = 4° \, 35' \, 19''$

119 Una carretera sube 10 m en 120 m medidos en horizontal. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?



Solución:

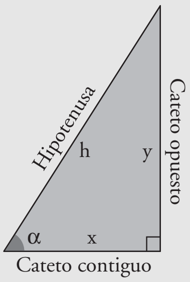
$\text{tg } x = 10/120 = 0{,}08$

$x = 4° \, 34' \, 26''$

Comprueba lo que sabes

1 Define las razones sen α, cos α y tg α en un triángulo rectángulo y pon un ejemplo.

Solución:



a) El **seno del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}}, \text{ sen } \alpha = \frac{y}{h}$$

b) El **coseno del ángulo** α es la razón entre el cateto contiguo al ángulo α y la hipotenusa.

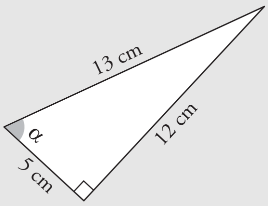
$$\cos \alpha = \frac{\textbf{cateto contiguo}}{\textbf{hipotenusa}}, \cos \alpha = \frac{x}{h}$$

c) La **tangente del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto contiguo}}, \text{ tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

Ejemplo

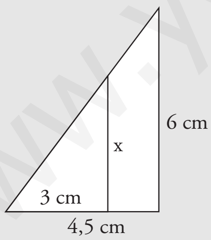
Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo rectángulo de la figura del margen.



sen α = 12/13 cos α = 5/13 tg α = 12/5

2 Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4,5 cm y 6 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo menor en posición de Thales tal que su cateto menor mida 3 cm. Calcula la longitud del otro cateto.

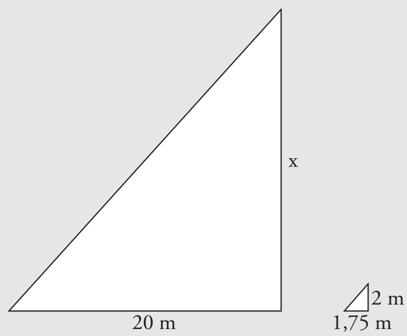
Solución:



$$\frac{6}{x} = \frac{4,5}{3} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

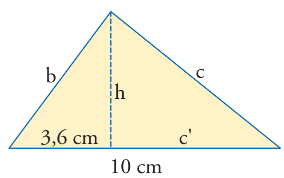
3 Un edificio proyecta una sombra de 20 m. El mismo día, y a la misma hora, un palo de 2 m proyecta una sombra de 1,75 m en el mismo lugar. Calcula la altura del edificio.

Solución:



$$\frac{20}{x} = \frac{1,75}{2} \Rightarrow x = 22,86 \text{ cm}$$

4 Calcula b, c, c' y h en el triángulo de la figura:



Solución:

$b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6$ cm

$c' = a - b'$

$c' = 10 - 3,6 = 6,4$ cm

$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

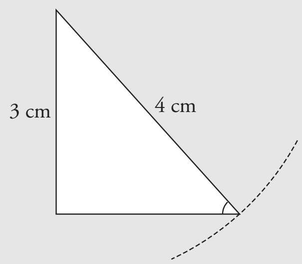
$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8$ cm

$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8$ cm

5 Dibuja un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo tal que cumpla que sen $\alpha = 3/4$. ¿Cuántos triángulos puedes dibujar con esa condición?

Solución:



Se pueden dibujar infinitos triángulos, ya que el seno depende del ángulo y no depende del tamaño del triángulo.

6 Sabiendo que cos $\alpha = 0,4$, calcula sen α y tg α

Solución:

$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

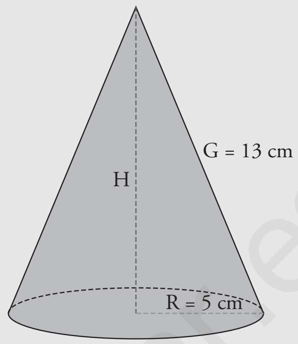
$\text{sen}^2\, \alpha + 0,4^2 = 1$

$\text{sen}\, \alpha = 0,92$

$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{0,92}{0,4} = 2,3$

7 Calcula el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 5 cm y la generatriz mide 13 cm

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

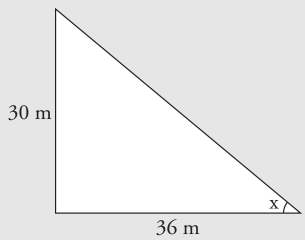
$5^2 + H^2 = 13^2$

$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16 \text{ cm}^3$

8 ¿Con qué ángulo de inclinación se verá el tejado de un edificio, que tiene 30 m de altura, desde una distancia de 36 m de la fachada?

Solución:



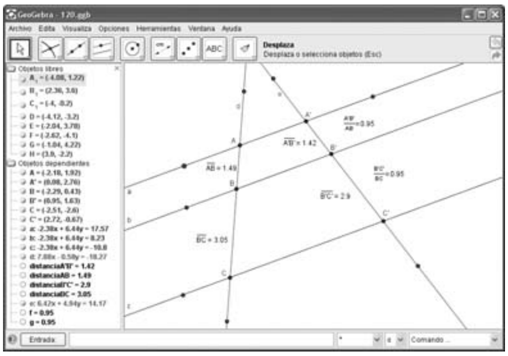
$\text{tg}\, x = \dfrac{30}{36} = 0,8333$

$x = 39° 48' 16''$

Linux/Windows GeoGebra

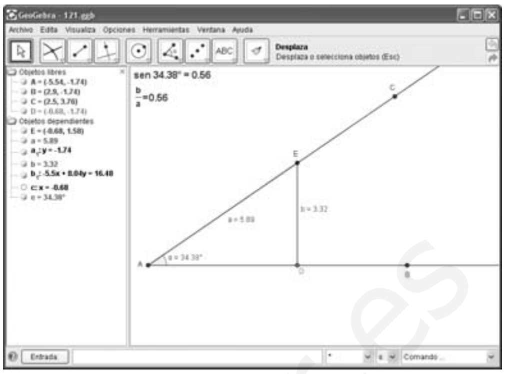
Paso a paso

120 Comprueba el teorema de Thales.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

121 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor del seno.

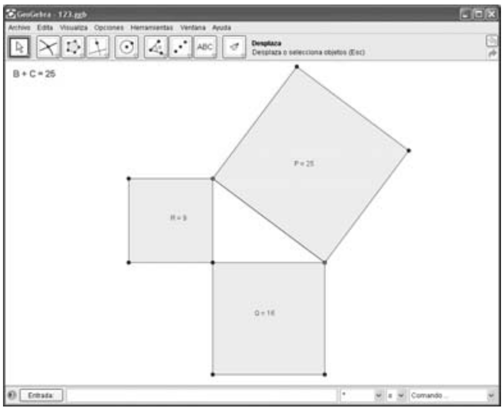


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

122 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

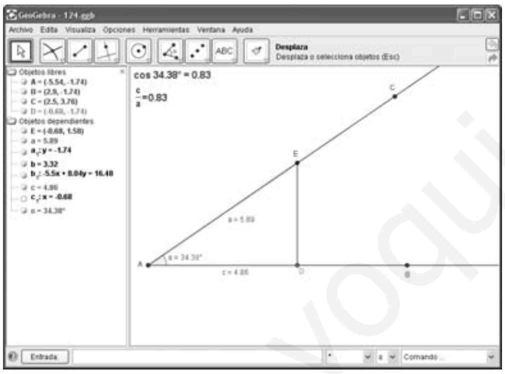
Practica

123 Comprueba el teorema de Pitágoras.



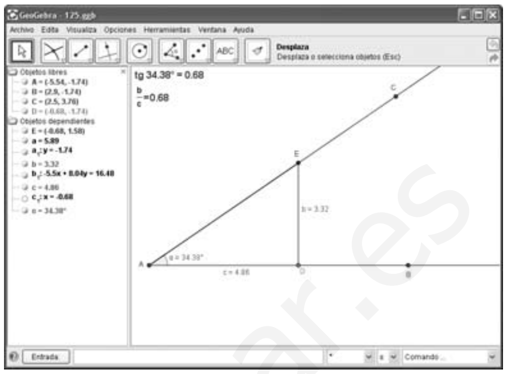
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

124 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor del coseno.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

125 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor de la tangente.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

8 Resolución de triángulos rectángulos

1. Circunferencia goniométrica

PIENSA Y CALCULA

Escribe la fórmula de la longitud de un arco de circunferencia de radio 1 m, y calcula, en función de π, la longitud del arco correspondiente a:

a) 90° b) 180° c) 270° d) 360°

Solución:

$L = \frac{2\pi}{360°} \cdot n°$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ m b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 180° = \pi$ m c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 270° = \frac{3\pi}{2}$ m d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 360° = 2\pi$ m

APLICA LA TEORÍA

1 Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 30° b) 120° c) 270° d) 315°

Solución:

a) $30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $120° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{2\pi}{3}$ rad

c) $270° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{3\pi}{2}$ rad

d) $315° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7\pi}{4}$ rad

2 Pasa los ángulos siguientes a grados:

a) 0,5 rad b) 1 rad c) 1,5 rad d) 2,5 rad

Solución:

a) $0,5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 28° \; 38' \; 52''$

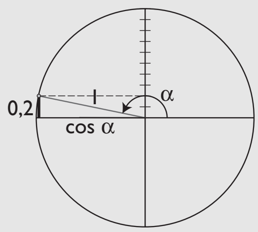
b) $1 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 57° \; 17' \; 45''$

c) $1,5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 85° \; 56' \; 37''$

d) $2,5 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 143° \; 14' \; 22''$

3 Determina cos α sabiendo que el ángulo α está en el 2° cuadrante y que sen $\alpha = 0,2$

Solución:

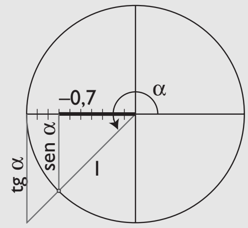


$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0,2^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0,9798$

4 Calcula tg α, sabiendo que el ángulo α está en el 3^{er} cuadrante y que cos $\alpha = -0,7$

Solución:



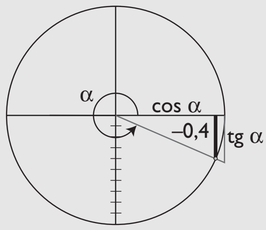
$1 + tg^2\, \alpha = sec^2\, \alpha$

$1 + tg^2\, \alpha = \left(-\dfrac{1}{0{,}7}\right)^2$

$tg\, \alpha = 1{,}0408$

5 Determina las razones trigonométricas del ángulo α si está en el 4° cuadrante y sen $\alpha = -0{,}4$

Solución:



$sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha = 1$

$(-0{,}4)^2 + cos^2\, \alpha = 1 \Rightarrow cos\, \alpha = 0{,}9165$

$tg\, \alpha = \dfrac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha} = -0{,}4364$

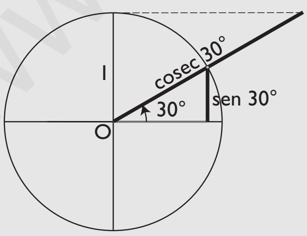
$sec\, \alpha = 1{,}0911$

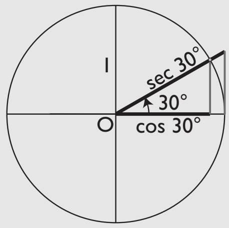
$cosec\, \alpha = -2{,}5$

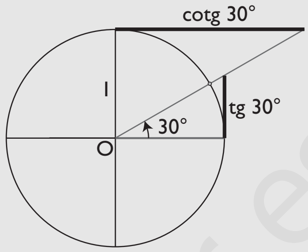
$cotg\, \alpha = -2{,}2915$

6 Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 30° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

Solución:





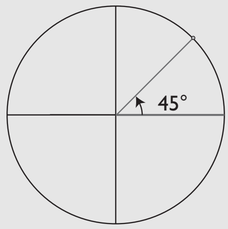


7 Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos siguientes:

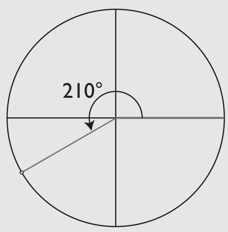
a) 1 485° b) 2 370° c) 2 100°

Solución:

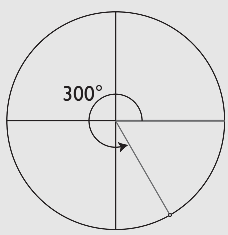
a) 1 485° = 45° + 4 · 360°



b) 2 370° = 210° + 6 · 360°



c) 2 100° = 300° + 5 · 360°



2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

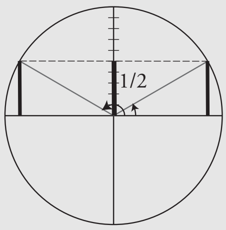
PIENSA Y CALCULA

Dibuja en la circunferencia unidad todos los ángulos que cumplen que:

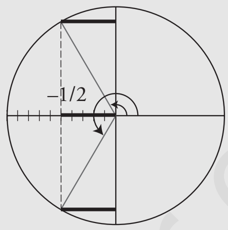
a) sen $\alpha = 1/2$ b) cos $\alpha = -1/2$

Solución:

a)



b)



APLICA LA TEORÍA

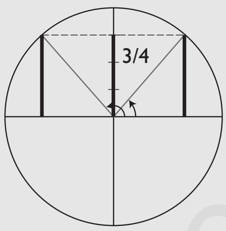
8 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan:

a) sen $\alpha = 3/4$ b) cos $\alpha = -1/4$

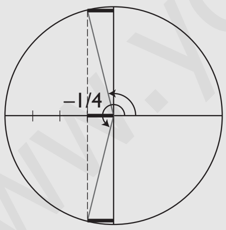
c) sec $\alpha = 2{,}5$ d) tg $\alpha = 2$

Solución:

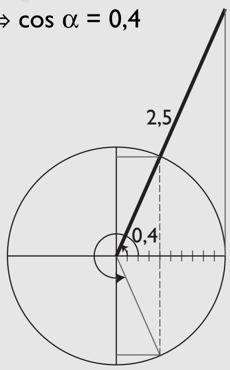
a)



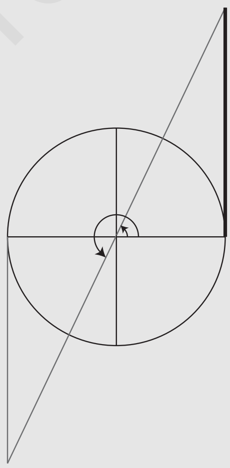
b)



c) sec $\alpha = 2{,}5 \Rightarrow$ cos $\alpha = 0{,}4$



d) tg $\alpha = 2$



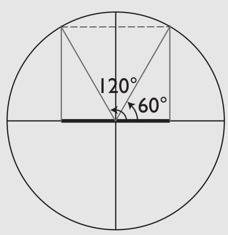
9 Calcula, reduciendo al 1er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) cos 120°

b) sen 300°

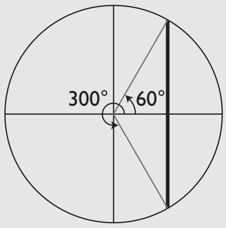
Solución:

a)



$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

b)



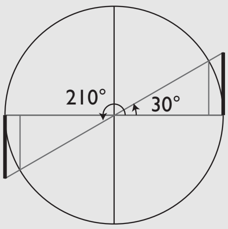
sen 300° = – sen 60° = $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10 Calcula, reduciendo al 1er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) tg 210° b) sen 135°

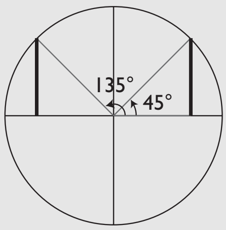
Solución:

a)



tg 210° = tg 30° = $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b)



sen 135° = sen 45° = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

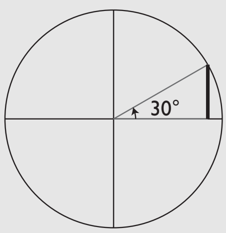
11 Calcula, reduciendo al 1er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) sen 1 830° b) cos 1 230°

c) tg 2 385° d) cos 2 820°

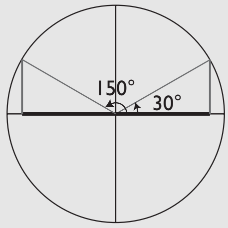
Solución:

a) 1 830° = 30° + 5 · 360°



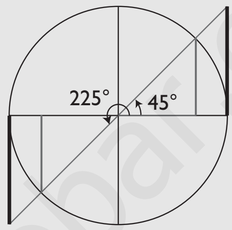
sen 1 830° = sen 30° = 1/2

b) 1 230° = 150° + 3 · 360°



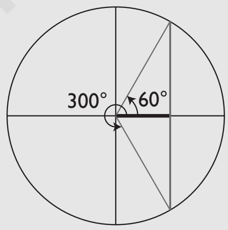
cos 1 230° = cos 150° = – cos 30° = $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) 2 385° = 225° + 6 · 360°



tg 2 385° = tg 225° = tg 45° = 1

d) 2 820° = 300° + 7 · 360°



cos 2 820° = cos 300° = cos 60° = 1/2

12 Demuestra que:

a) $\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$

b) (cosec x + tg x) cos x = sen x + cotg x

Solución:

a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{\text{sen } x} + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right)\cos x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} + \text{sen } x =$

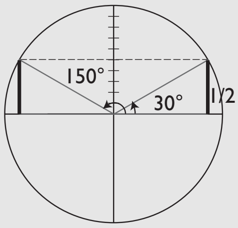
= cotg x + sen x

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

13 2 sen x = 1

Solución:

sen x = 1/2



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

14 $\cos x = \sec x$

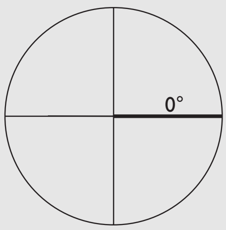
Solución:

$\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cos^2 x = 1$

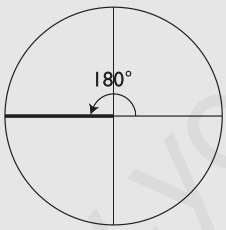
$\cos x = \pm 1$

a) $\cos x = 1$



$x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -1$

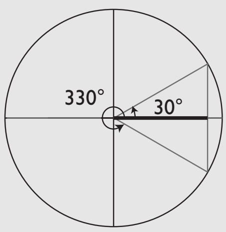


$x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

15 $2 \cos x = \sqrt{3}$

Solución:

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

16 $3 \operatorname{sen} x - 2 \cos^2 x = 0$

Solución:

$3 \operatorname{sen} x - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$

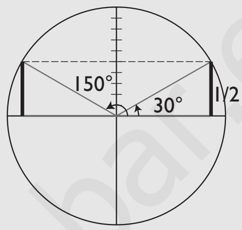
$3 \operatorname{sen} x - 2 + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$

La solución $\operatorname{sen} x = -2$ no tiene sentido, porque $|\operatorname{sen} x| \le 1$

$\operatorname{sen} x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

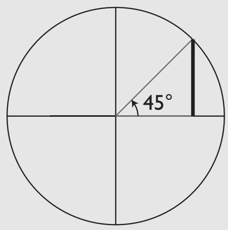
$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

17 $\operatorname{sen} 2x = 1$

Solución:

$2x = 90°$

$x = 45°$



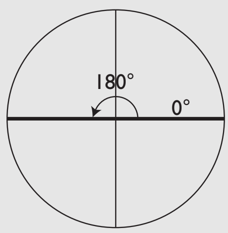
$x = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

18 $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$

Solución:

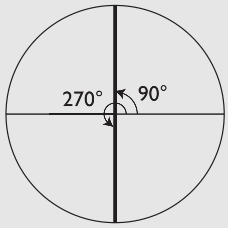
$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

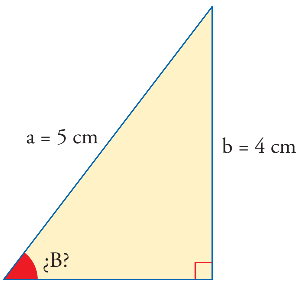
b) cos x = 0



$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 90° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

3. Resolución de triángulos rectángulos

PIENSA Y CALCULA



Escribe la razón trigonométrica que relaciona directamente el valor de los datos conocidos en el triángulo del margen y el ángulo correspondiente. Utilizando la calculadora, halla dicho ángulo.

Solución:

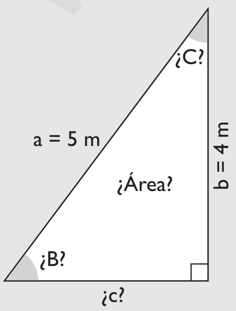
$\text{sen } B = \dfrac{4}{5}$

B = 53° 7' 48"

APLICA LA TEORÍA

19 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 5 m y un cateto b = 4 m. Calcula los demás elementos.

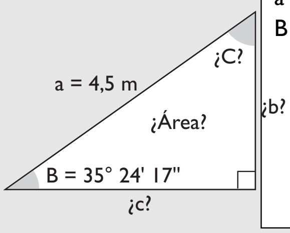
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 5 m b = 4 m	c	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ m
	B	$\text{sen } B = \dfrac{b}{a}$	$\text{sen } B = \dfrac{4}{5} \Rightarrow B = 53°\ 7'\ 48''$
	C	$C = 90° - B$	$C = 36°\ 52'\ 12''$
	Área	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\ m^2$

20 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 4,5 m y el ángulo B = 35° 24' 17''. Calcula los demás elementos.

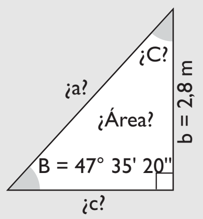
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 4,5 m B = 36° 52' 12''	C	C = 90° – B	C = 54° 35' 43''
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	b = 4,5 sen 35° 24' 17'' = 2,61 m
	c	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$	c = 4,5 cos 35° 24' 17'' = 3,67 m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}61 \cdot 3{,}67 = 4{,}79\ m^2$

21 En un triángulo rectángulo se conocen el cateto b = 2,8 m y el ángulo opuesto B = 47° 35' 20''. Calcula los demás elementos.

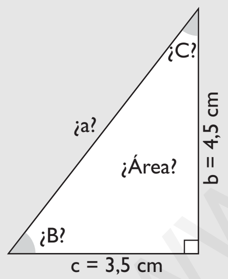
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 2,8 m B = 47° 35' 20''	C	C = 90° – B	C = 42° 24' 40''
	a	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B}$	$a = \frac{2{,}8}{\text{sen } 47° 35' 20''} = b = 3{,}79$ m
	c	$\text{tg } C = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \text{ tg } C$	c = 2,8 tg 42° 24' 40'' = 2,56 m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}56 = 3{,}58\ m^2$

22 En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos b = 4,5 cm y c = 3,5 cm. Calcula los demás elementos.

Solución:

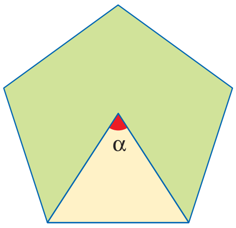


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
b = 4,5 cm c = 3,5 cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$c = \sqrt{4{,}5^2 + 3{,}5^2} = 5{,}70$ cm
	B	$\text{tg } B = \frac{b}{c}$	$\text{tg } B = \frac{4{,}5}{3{,}5} \Rightarrow B = 52° 7' 30''$
	C	C = 90° – B	C = 37° 52' 30''
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}5 = 7{,}88\ cm^2$

4. Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el ángulo relleno de rojo del siguiente pentágono regular.

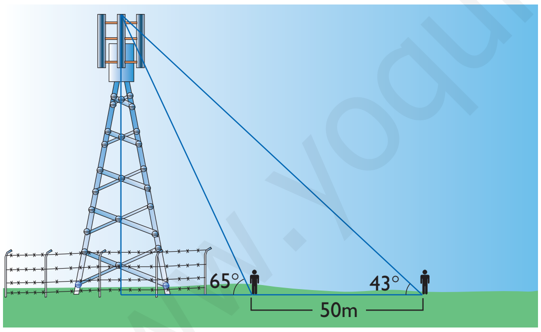


Solución:

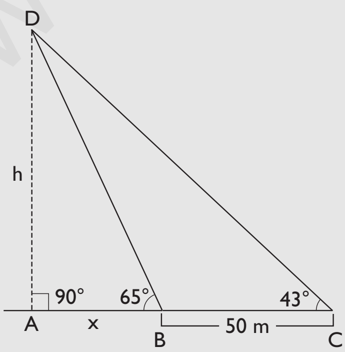
$\alpha = 360° : 5 = 72°$

APLICA LA TEORÍA

23 Una antena de telefonía móvil está en una llanura dentro de una cerca en la que está prohibido entrar. Para hallar su altura, medimos desde un punto exterior el ángulo de elevación y se obtienen 65°. Nos alejamos 50 m y el nuevo ángulo de elevación es de 43°. Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 65° &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 43° &= \frac{h}{50 + x} \end{aligned}\right\}$$

$x = 38{,}47$ m

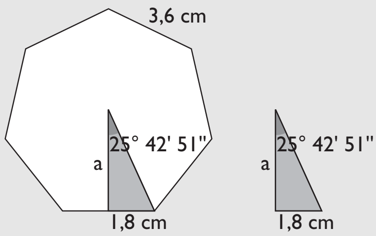
$h = 82{,}50$ m

La antena de telefonía móvil mide 82,5 m de alto.

24 Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 3,6 cm

Solución:

$360° : 14 = 25°\ 42'\ 51''$



$$\operatorname{tg} 25°\ 42'\ 51'' = \frac{1{,}8}{a}$$

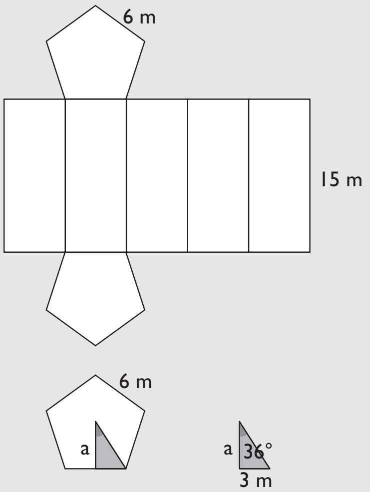
$a = 3{,}74$ cm

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 3{,}6 \cdot 3{,}74}{2} = 47{,}12\ \text{cm}^2$$

25 Calcula el área de un prisma regular pentagonal en el que la arista de la base mide 6 m, y la altura, 15 m

Solución:



$\text{tg } 36° = \dfrac{3}{a}$

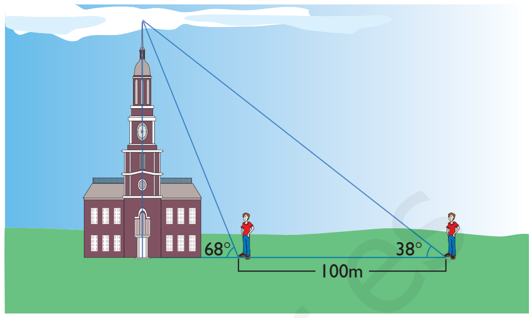
$a = 4{,}13 \text{ m}$

$A_B = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4{,}13}{2} = 61{,}95 \text{ m}^2$

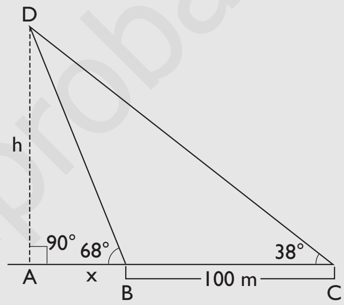
$A_L = 5 \cdot 6 \cdot 15 = 450 \text{ m}^2$

$A_T = 2 \cdot 61{,}95 + 450 = 573{,}90 \text{ m}^2$

26 Para medir la altura de una catedral, medimos el ángulo de elevación de la parte más alta desde un punto determinado y obtenemos 68°; nos alejamos en la misma dirección 100 m y el nuevo ángulo de elevación es de 38°. Halla la altura de la catedral.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 68° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 38° &= \frac{h}{100 + x} \end{aligned}\right\}$$

$x = 46{,}13 \text{ m}$

$h = 114{,}17 \text{ m}$

La catedral mide 114,17 m de alto.

Ejercicios y problemas

1. Circunferencia goniométrica

27 Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 45° b) 150°
c) 210° d) 330°

Solución:

a) $45° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{4}$ rad

b) $150° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

c) $210° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{7\pi}{6}$ rad

d) $330° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

28 Pasa los ángulos siguientes a grados

a) 2 rad b) π/9 rad
c) 5π/3 rad d) 1,7 rad

Solución:

a) $2 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 114°\ 35'\ 30''$

b) $\dfrac{\pi}{9} \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 20°$

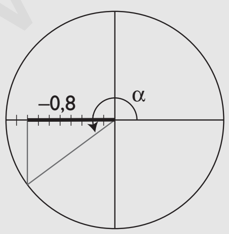
c) $\dfrac{5\pi}{3} \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 300°$

d) $1{,}7 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 97°\ 24'\ 10''$

29 Determina todas las razones trigonométricas del ángulo α si cos α = –0,8 y el ángulo α está en el 3^er^ cuadrante.

Solución:

$\cos \alpha = -0{,}8$



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{sen}^2 \alpha + (-0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = -0{,}6$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 0{,}75$

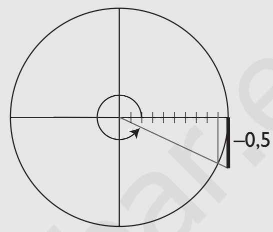
$\sec \alpha = -1{,}25$

$\text{cosec } \alpha = -1{,}6667$

$\text{cotg } \alpha = 1{,}3333$

30 Si la tg α = –0,5 y α está en el 4° cuadrante, determina el resto de las razones trigonométricas.

Solución:



$\text{tg } \alpha = -0{,}5$

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

$1 + (-0{,}5)^2 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = 1{,}1180$

$\cos \alpha = 0{,}8944$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = -0{,}4472$

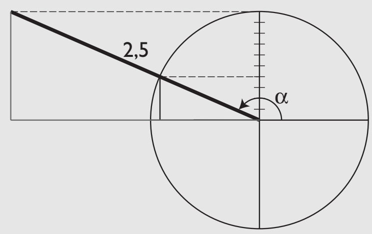
$\text{cosec } \alpha = -2{,}2361$

$\text{cotg } \alpha = -2$

31 Si el ángulo α está en el 2° cuadrante y tenemos cosec α = 2,5, determina las razones trigonométricas del ángulo α

Solución:

$\text{cosec } \alpha = 2{,}5 \Rightarrow \text{sen } \alpha = 0{,}4$



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}4^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0{,}9165$

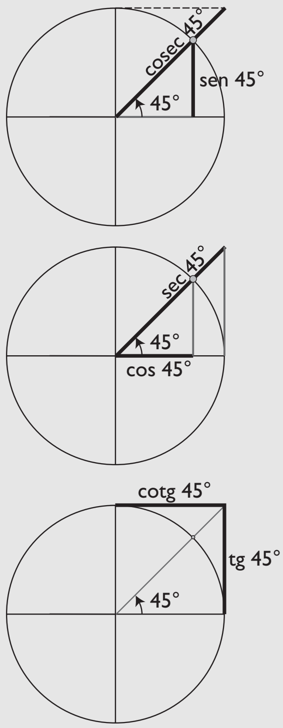
$\sec \alpha = -1{,}0911$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -0{,}4364$

$\text{cotg } \alpha = -2{,}2915$

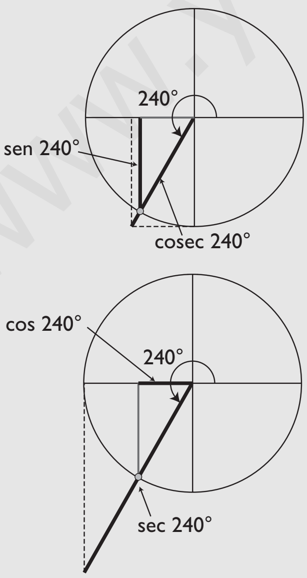
32 Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 45° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

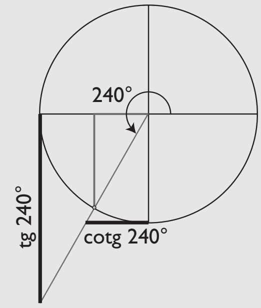
Solución:



33 Dibuja en la circunferencia unidad el ángulo de 240° y dibuja el segmento que representa a cada una de las razones trigonométricas.

Solución:





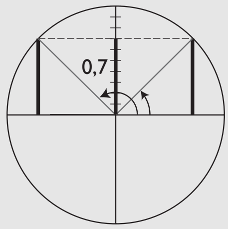
2. Reducción de razones, identidades y ecuaciones

34 Dibuja en la circunferencia unidad los ángulos que cumplan que:

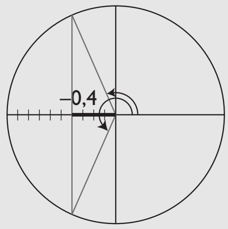
a) sen α = 0,7 b) cos α = –0,4

Solución:

a)



b)

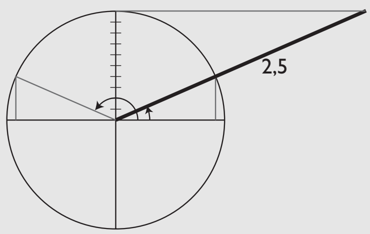


35 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

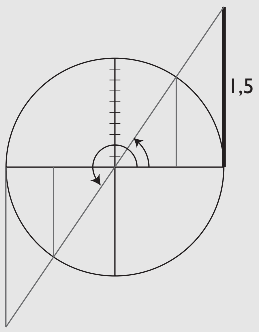
a) cosec α = 2,5 b) tg α = 1,5

Solución:

a) cosec α = 2,5



b) tg α = 1,5

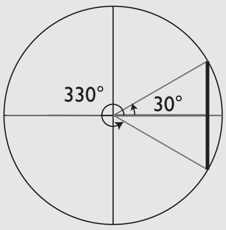


36 Calcula, reduciendo al 1er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) sen 330° b) cos 210°
c) tg 120° d) sen 240°

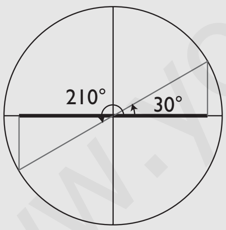
Solución:

a)



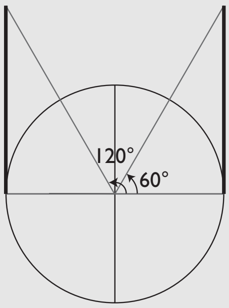
$\text{sen } 330° = -\text{ sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

b)



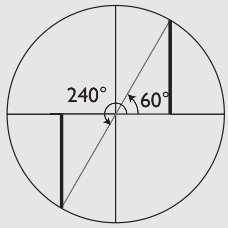
$\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c)



$\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

d)



$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

37 Demuestra la siguiente identidad:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha = \cos \alpha$

Solución:

$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha =$

$= \cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) =$

$= \cancel{\cos^3 \alpha} + \cos \alpha - \cancel{\cos^3 \alpha} = \cos \alpha$

38 Demuestra la siguiente identidad:

$\text{tg } \alpha \cdot \text{cosec } \alpha \cdot (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) = 1 - \text{tg } \alpha$

Solución:

$\text{tg } \alpha \cdot \text{cosec } \alpha \cdot (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) =$

$= \text{tg } \alpha \cdot \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \cdot (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) =$

$= \text{tg } \alpha \cdot \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} - \text{tg } \alpha = 1 - \text{tg } \alpha$

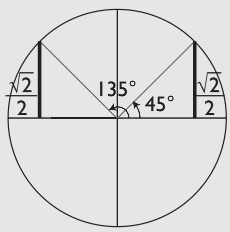
Resuelve las siguientes ecuaciones:

39 $2\,\text{sen}^2 x = 1$

Solución:

$\text{sen } x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

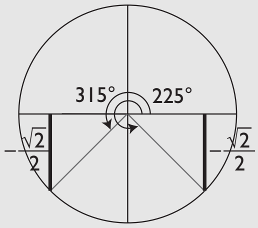
a) $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_1 = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 135° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



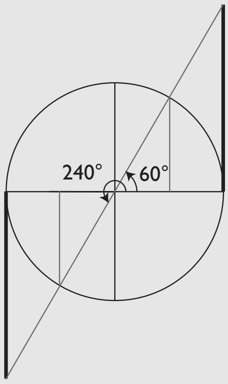
$x_3 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

40 $\text{tg } 2x = \sqrt{3}$

Solución:

Se considera la raíz positiva.



$2x_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 30° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

$2x_2 = 240° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 120° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

41 $4 \text{ sen } x = \text{cosec } x$

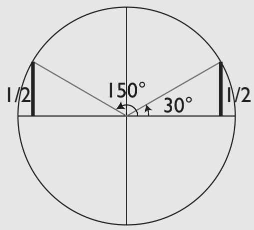
Solución:

$4 \text{ sen } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

$4 \text{ sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm 1/2$

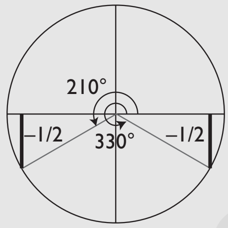
a) $\text{sen } x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = -1/2$



$x_3 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

42 $2 \text{ sen } x + 1 = 3 \text{ cosec } x$

Solución:

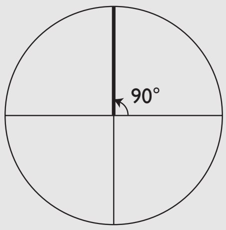
$2 \text{ sen } x + 1 = \frac{3}{\text{sen } x}$

$2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 3 = 0$

$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$

$\text{sen } x = -3/2$ no tiene sentido, porque $|\text{sen } x| \le 1$

$\text{sen } x = 1$



$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

43 $\text{sen } x = \cos^2 x + 1$

Solución:

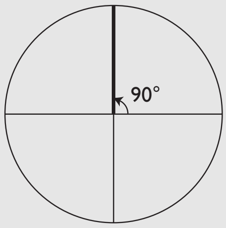
$\text{sen } x = 1 - \text{sen}^2 x + 1$

$\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2 = 0$

$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\text{sen } x = -2$ no tiene sentido, porque $|\text{sen } x| \le 1$

$\text{sen } x = 1$



$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

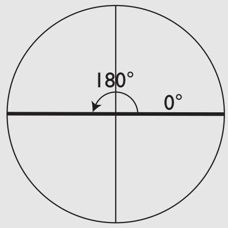
44 sen x · cos x = sen x

Solución:

sen x · cos x – sen x = 0

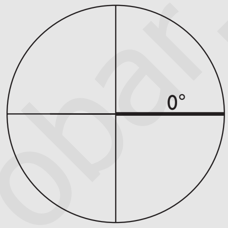
$$\text{sen } x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

a) sen x = 0



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

b) cos x = 1

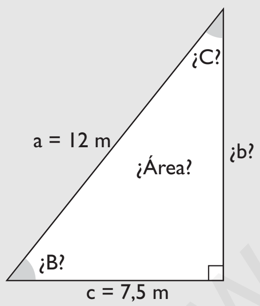


$x_3 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

3. Resolución de triángulos rectángulos

45 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 12 m y un cateto c = 7,5 m. Calcula los demás elementos.

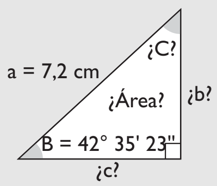
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 12 m c = 7,5 m	b	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$b = \sqrt{12^2 - 7{,}5^2} = 9{,}37$ m
	B	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{7{,}5}{12} \Rightarrow B = 51°\ 19'\ 4''$
	C	C = 90° – B	C = 38° 40' 56''
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}37 \cdot 7{,}5 = 35{,}14\ m^2$

46 En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 7,2 cm y el ángulo B = 42° 35' 23''. Calcula los demás elementos.

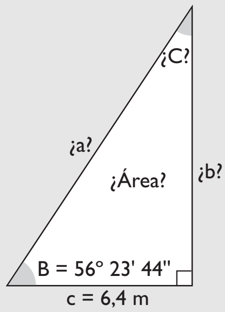
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
a = 7,2 cm B = 42° 35' 23''	C	C = 90° – B	C = 47° 24' 37''
	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	b = 7,2 sen 42° 35' 23'' = 4,87 cm
	c	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B$	c = 7,2 cos 42° 35' 23'' = 5,30 cm
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}87 \cdot 5{,}30 = 12{,}91\ cm^2$

47 En un triángulo rectángulo se conocen el cateto c = 6,4 m y el ángulo contiguo B = 56° 23’ 44”. Calcula los demás elementos.

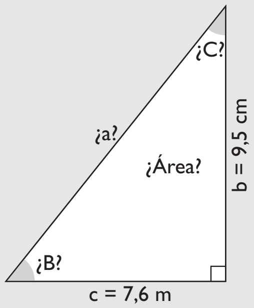
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
c = 6,4 m B = 56° 23’ 44”	C	C = 90° – B	C = 33° 36’ 16”
	a	$\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos B}$	$a = \frac{6{,}4}{\cos 56° 23' 44''} = 11{,}56$ m
	b	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \operatorname{tg} B$	b = 6,4 tg 56° 23’ 44” = 9,63 m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}63 \cdot 6{,}4 = 30{,}82\ m^2$

48 En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos b = 9,5 cm y c = 7,6 cm. Calcula los demás elementos.

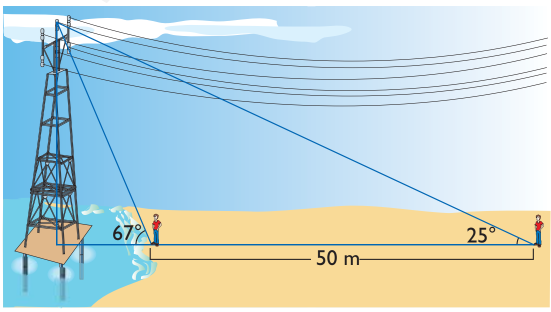
Solución:



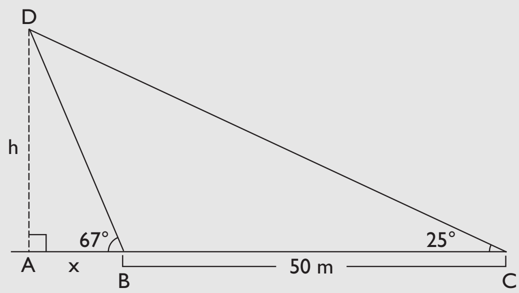
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
b = 9,5 cm c = 7,6 cm	a	$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$c = \sqrt{9{,}5^2 + 7{,}6^2} = 12{,}17$ cm
	B	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} B = \frac{9{,}5}{7{,}6} \Rightarrow B = 51° 20' 25''$
	C	C = 90° – B	C = 38° 39’ 35”
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}5 \cdot 7{,}6 = 36{,}10\ cm^2$

4. Aplicaciones al cálculo de distancias, áreas y volúmenes

49 Una torre de alta tensión está colocada dentro del mar sobre un soporte. Desde la orilla de la playa se mide el ángulo de elevación de la parte más alta y se obtiene 67°. Alejándose en la misma dirección 50 m, el nuevo ángulo de elevación es de 25°. Calcula la altura de la torre.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 67° &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25° &= \frac{h}{50 + x} \end{aligned}\right\}$$

x = 12,34 m

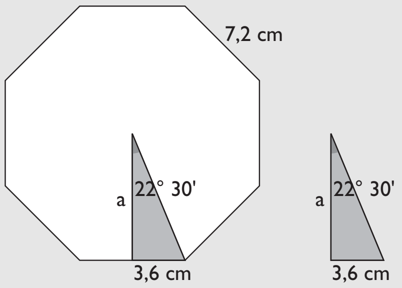
h = 29,07 m

La torre de alta tensión mide 29,07 m de alto.

50 Calcula la apotema de un octógono regular en el que el lado mide 7,2 cm

Solución:

360° : 16 = 22° 30'

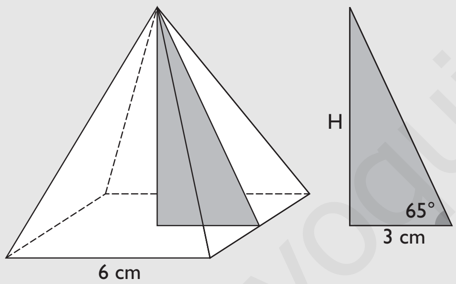


$\text{tg } 22° \ 30' = \frac{3,6}{a}$

a = 8,89 cm

51 Calcula el volumen de una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 6 cm y el ángulo que forma la base con las caras laterales es de 65°

Solución:



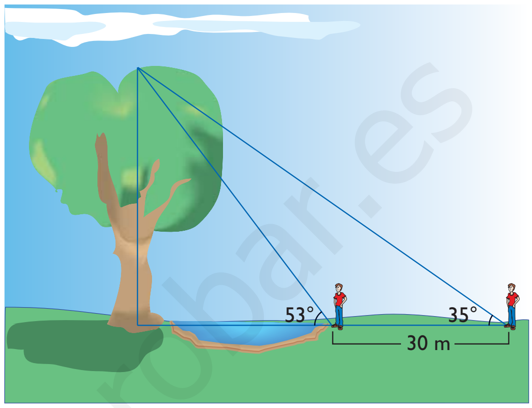
$\text{tg } 65° = \frac{H}{3}$

H = 6,43 cm

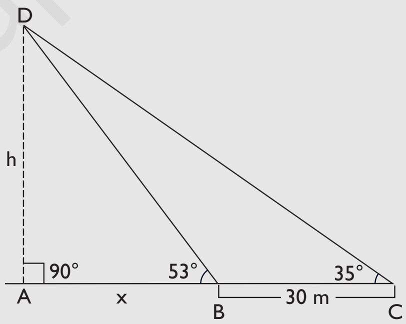
$A_B = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6,43 = 77,16 \text{ cm}^2$

52 Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtienen 53°. Alejándose 30 m del río se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 35°. Calcula la anchura del río.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 53° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 35° = \dfrac{h}{30 + x} \end{array}\right\}$$

x = 33,51 m

h = 44,47 m

El río mide de ancho 33,51 m

Para ampliar

53 Pasa los ángulos siguientes a radianes:

a) 120° b) 135°
c) 240° d) 300°

Solución:

a) $120° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

b) $135° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $240° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{4\pi}{3}$ rad

d) $300° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

54 Pasa los ángulos siguientes a grados:

a) 3,5 rad b) 3 rad
c) 2,6 rad d) 0,4 rad

Solución:

a) $3{,}5 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 200°\ 32'\ 7''$

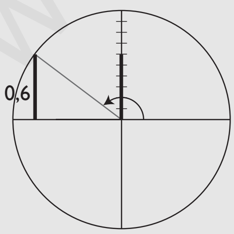
b) $3 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 171°\ 53'\ 14''$

c) $2{,}6 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 148°\ 58'\ 9''$

d) $0{,}4 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 22°\ 55'\ 6''$

55 Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que sen $\alpha = 0{,}6$ y α está en el 2° cuadrante.

Solución:



$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}6^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -0{,}8$

$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = -0{,}75$

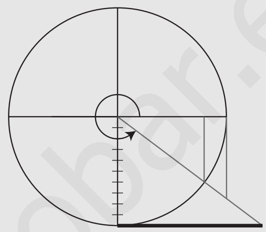
$\sec \alpha = -1{,}25$

$\text{cosec}\, \alpha = 1{,}67$

$\text{cotg}\, \alpha = -1{,}33$

56 Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que cotg $\alpha = -3/2$ y α está en el 3er cuadrante.

Solución:



$1 + \text{cotg}^2\, \alpha = \text{cosec}^2\, \alpha$

$1 + (-3/2)^2 = \text{cosec}^2\, \alpha$

$\text{cosec}\, \alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\text{sen}\, \alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\text{tg}\, \alpha = -2/3$

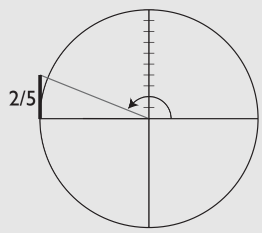
$\text{cotg}\, \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \text{cotg}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha$

$\cos \alpha = -\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

$\sec \alpha = \dfrac{13}{3\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

57 Calcula todas las razones trigonométricas de α sabiendo que tg $\alpha = -2/5$ y α está en el 2° cuadrante.

Solución:



$1 + \text{tg}^2\, \alpha = \sec^2 \alpha$

$1 + (-2/5)^2 = \sec^2 \alpha$

$$\sec\alpha = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{29}{2\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

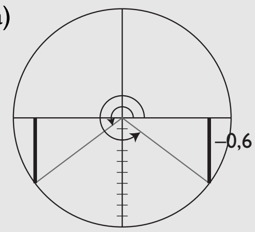
58 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

a) sen $\alpha = -0{,}6$

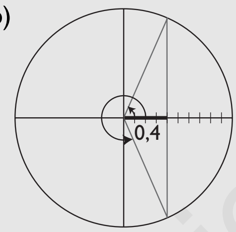
b) cos $\alpha = 0{,}4$

Solución:

a)



b)



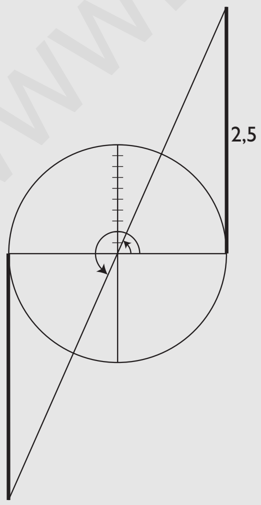
59 Dibuja en la circunferencia unidad dos ángulos que cumplan que:

a) tg $\alpha = 2{,}5$

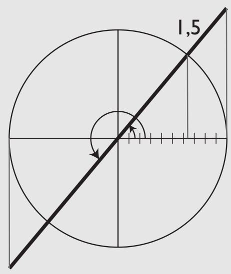
b) sec $\alpha = 1{,}5$

Solución:

a)



b)



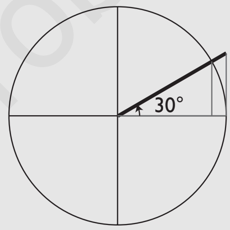
60 Calcula, reduciendo al 1er cuadrante, las razones trigonométricas siguientes:

a) sec 3 270° b) cos 3 000°

c) tg 2 040° d) sen 2 850°

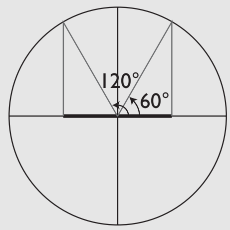
Solución:

a) $3\,270° = 30° + 9 \cdot 360°$



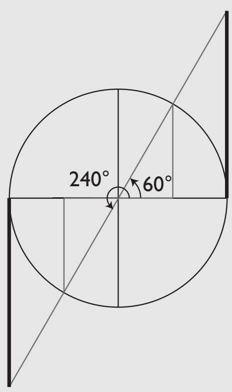
$$\sec 3\,270° = \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $3\,000° = 120° + 8 \cdot 360°$



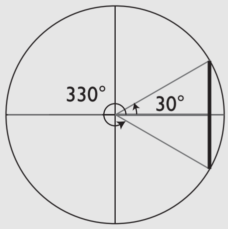
$\cos 3\,000° = \cos 120° = -\cos 60° = -1/2$

c) $2\,040° = 240° + 5 \cdot 360°$



$\operatorname{tg} 2\,040° = \operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = 3$

d) $2\,850° = 330° + 7 \cdot 360°$



$\text{sen } 2\,850° = \text{sen } 330° = -1/2$

61 Calcula las razones trigonométricas siguientes sabiendo que sen 15° = 0,2588:

a) sen 165° b) sen 195°
c) sen 345° d) cos 105°
e) cos 255° f) cos 285°

Solución:

a) $\text{sen } 165° = \text{sen } (180° - 15°) = \text{sen } 15° = 0{,}2588$

b) $\text{sen } 195° = \text{sen } (180° + 15°) = -\text{sen } 15° =$
$= -0{,}2588$

c) $\text{sen } 345° = \text{sen } (360° - 15°) = -\text{sen } 15° =$
$= -0{,}2588$

d) $\cos 105° = \cos (180° - 75°) = -\cos 75° =$
$= -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

e) $\cos 255° = \cos(180° + 75°) = -\cos 75° =$
$= -\text{sen } 15° = -0{,}2588$

f) $\cos 285° = \cos(360° - 75°) = \cos 75° =$
$= \text{sen } 15° = 0{,}2588$

62 Sabiendo que sen α = 0,4 y α es un ángulo del 1er cuadrante, calcula:

a) $\text{sen } (180° - \alpha)$

b) $\text{sen } (360° - \alpha)$

c) $\text{sen } (90° + \alpha)$

Solución:

a) $\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}4$

b) $\text{sen } (360° - \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0{,}4$

c) $\text{sen } (90° + \alpha) = \cos \alpha$

Se calcula $\cos \alpha$

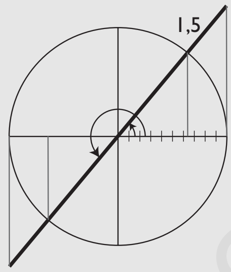
$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$0{,}4^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos \alpha = 0{,}9165$

63 Dibuja en la circunferencia un ángulo α tal que $\sec \alpha = 3/2$. Calcula $\cos(\alpha + \pi)$

Solución:



$\cos (\alpha + \pi) = -\cos \alpha = -2/3$

64 Demuestra la siguiente identidad:

$\text{tg } \alpha \cdot (\cos \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha) = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$

Solución:

$\dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \cdot (\cos \alpha + \text{cosec } \alpha - \text{sen } \alpha)$

$\text{sen } \alpha + \dfrac{1}{\cos \alpha} - \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$\text{sen } \alpha + \sec \alpha - \dfrac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$\text{sen } \alpha + \sec \alpha - \sec \alpha + \cos \alpha$

$\text{sen } \alpha + \cos \alpha$

65 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{2\,\text{tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha\,(1 + \text{tg}^2 \alpha)} = 2\,\text{sen } \alpha$$

Solución:

$\dfrac{2\,\text{tg}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha \sec^2 \alpha} =$

$= \dfrac{2\,\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} : \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos^2 \alpha} =$

$= \dfrac{2\,\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} : \dfrac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} =$

$= \dfrac{2\,\text{sen}^2 \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha\,\text{sen}^2 \alpha} =$

$= 2\,\text{sen } \alpha$

66 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - \text{sen } \alpha}$$

Solución:

$(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha$

$1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

67 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

Solución:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

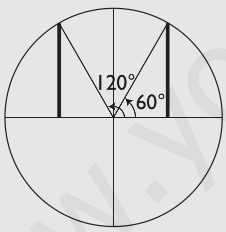
Resuelve las siguientes ecuaciones:

68 $\operatorname{sen}(x + 45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

$\operatorname{sen}(x + 45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Se toma la raíz positiva.



$x_1 + 45° = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 15° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 + 45° = 120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 75° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

69 $\cos^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$

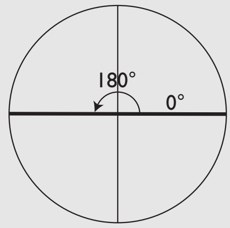
Solución:

$\cos^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$

$1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$

$2 \operatorname{sen}^2 x = 0$

$\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

70 $3 \operatorname{tg} x = 2 \cos x$

Solución:

$3 \operatorname{sen} x = 2 \cos^2 x$

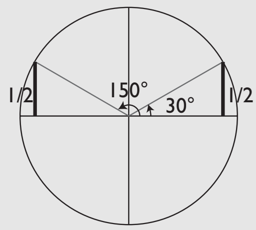
$3 \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

La solución $\operatorname{sen} x = -2$ no es válida.

$\operatorname{sen} x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

71 $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

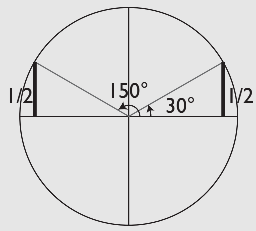
Solución:

$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

$2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

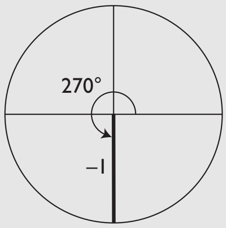
a) $\operatorname{sen} x = 1/2$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) sen x = – 1



$x_3 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

72 $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = -1/2$

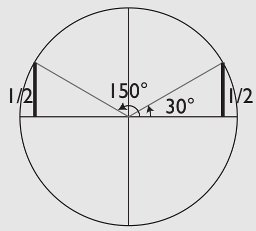
Solución:

$\text{sen}^2 x - 1 + \text{sen}^2 x = -1/2$

$2\,\text{sen}^2 x = 1/2$

$\text{sen } x = \pm 1/2$

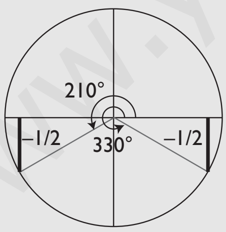
a) sen x = 1/2



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) sen x = –1/2



$x_3 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

73 $\cos^2 x + \cos x = \text{sen}^2 x$

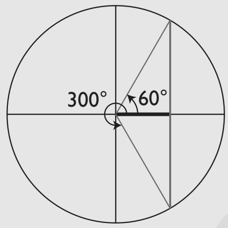
Solución:

$\cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

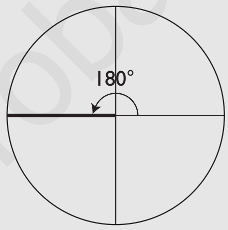
a) cos x = 1/2



$x_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 300° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) cos x = – 1



$x_3 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

74 $\text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cos x$

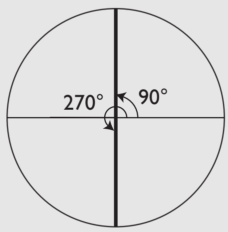
Solución:

$\text{sen } x \cdot \cos x - 2\cos x = 0$

$\cos x\,(\text{sen } x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\text{sen } x - 2 \neq 0$ para todo valor de **x**

Si $\cos x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 90° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

75 $\text{tg } x = 2\,\text{sen } x \cdot \cos x$

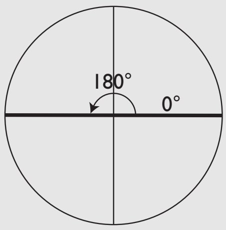
Solución:

$\text{sen } x = 2\,\text{sen } x \cdot \cos^2 x$

$\text{sen } x - 2\,\text{sen } x \cdot \cos^2 x = 0$

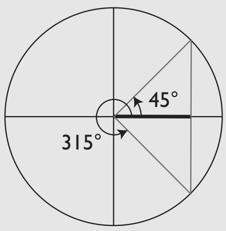
$$\operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 1 - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

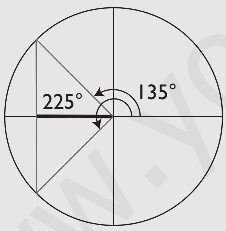
b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_3 = 45° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 315° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_5 = 135° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_6 = 225° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

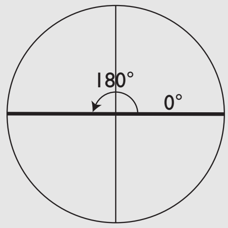
76 $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = 0$

Solución:

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$

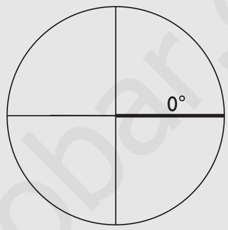
$$\operatorname{sen} x\,(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = 1 \end{cases}$$

a) $\operatorname{sen} x = 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos x = 1$



$x_3 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Es la misma que una anterior.

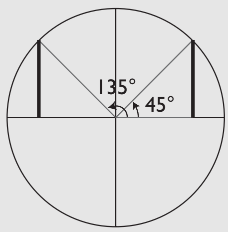
77 $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

Solución:

$\operatorname{sen} x = \cos x$

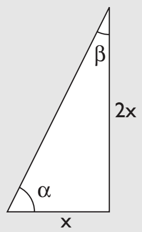
$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$

$\operatorname{tg} x = 1$



78 En un triángulo rectángulo un cateto mide el doble que el otro. Calcula la amplitud de sus ángulos agudos.

Solución:

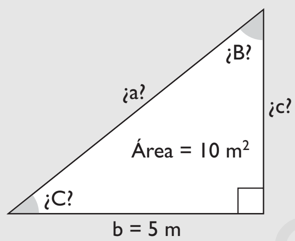


$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \alpha = 63° \ 26' \ 6''$

$\beta = 90° - 63° \ 33' \ 54'' = 26° \ 33' \ 54''$

79 En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 m, y el área, 10 m^2. Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

Solución:



$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\,bc$

$\dfrac{1}{2}\,5c = 10$

$5c = 20$

$c = 4\ \text{m}$

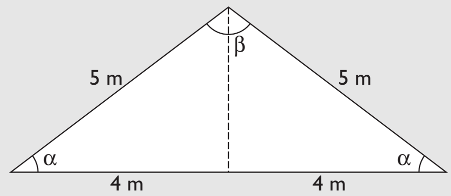
$a = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6{,}40\ \text{m}$

$\text{tg}\ B = \dfrac{5}{4} \Rightarrow B = 51° \ 20' \ 25''$

$C = 90° - 51° \ 20' \ 25'' = 38° \ 39' \ 35''3$

80 En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 5 m, y el desigual, 8 m. Halla la amplitud de sus ángulos.

Solución:



$\cos \alpha = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36° \ 52' \ 12''$

$\beta = 180° - 2 \cdot 36° \ 52' \ 12'' = 106° \ 15' \ 36''$

Con calculadora

81 Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

a) sen $\alpha = 0{,}4$ estando α en el 1er cuadrante.

b) cos $\alpha = -0{,}65$ estando α en el 2º cuadrante.

c) tg $\alpha = 1{,}4$ estando α en el 3er cuadrante.

d) cos $\alpha = 0{,}8$ estando α en el 4º cuadrante.

Solución:

a) 23° 34' 41''

b) 130° 32' 30''

c) 234° 27' 44''

d) 323° 7' 48''

82 Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

a) cos $\alpha = 0{,}2$ estando α en el 1er cuadrante.

b) tg $\alpha = -1{,}6$ estando α en el 2º cuadrante.

c) sen $\alpha = -0{,}7$ estando α en el 3er cuadrante.

d) tg $\alpha = -0{,}5$ estando α en el 4º cuadrante.

Solución:

a) 78° 27' 47''

b) 122° 19''

c) 224° 25' 37''

d) 333° 26' 6''

83 Calcula el ángulo correspondiente en cada caso:

a) tg α = 2 estando α en el 1er cuadrante.

b) sen α = 0,9 estando α en el 2° cuadrante.

c) cos α = –0,4 estando α en el 3er cuadrante.

d) sen α = –0,3 estando α en el 4° cuadrante.

Solución:

a) 63° 26’ 6’

b) 115° 50’ 31”

c) 246° 25’ 19”

d) 342° 32’ 33”

Problemas

84 Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 80° en una circunferencia de 20 cm de radio.

Solución:

$\frac{20\pi}{180°} \cdot 80° = 27{,}93$ cm

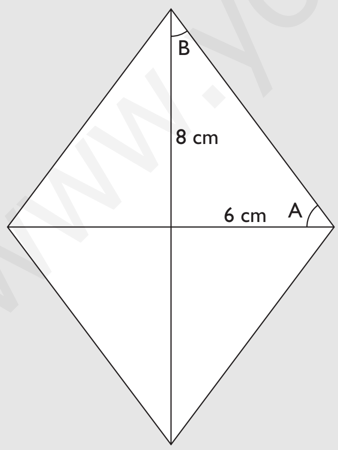
85 En una circunferencia de 8 cm de radio, el arco correspondiente a un ángulo central mide 32 cm. Calcula en radianes lo que mide dicho ángulo.

Solución:

$\frac{32}{8} = 4$ rad

86 Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. Calcula los ángulos del rombo.

Solución:



$\text{tg } A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

A = 53° 7’ 48”

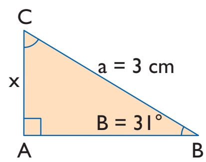
B = 90° – 53° 7’ 48” = 36° 52’ 12”

Los ángulos del rombo son:

2A = 106° 15’ 37”

2B = 73° 44’ 24”

87 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

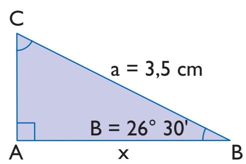


Solución:

$\text{sen } 31° = \frac{x}{3}$

x = 3 · sen 31° = 1,55 cm

88 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

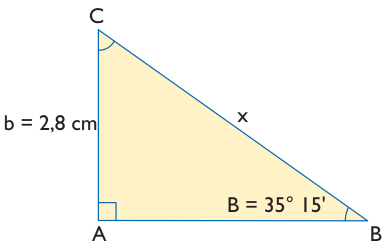


Solución:

$\cos 26° \ 30 = \frac{x}{3{,}5}$

x = 3,5 · cos 26° 30’ = 2,81 cm

89 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

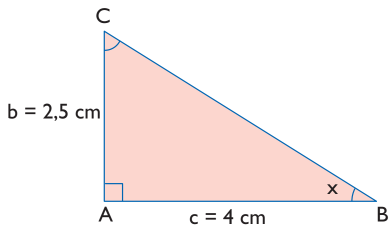


Solución:

$\text{sen } 35° \; 15' = \dfrac{2,8}{x}$

$x = \dfrac{2,8}{\text{sen } 35° \; 15'} = 4,85 \text{ cm}$

90 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

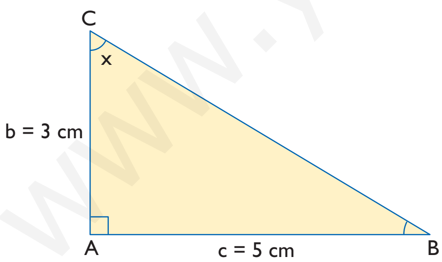


Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{2,5}{4}$

$x = 32° \; 19''$

91 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:

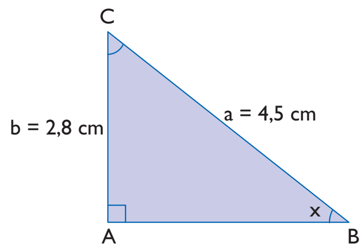


Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{5}{3}$

$x = 59° \; 2' \; 10''$

92 Halla el valor de **x** en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{sen } x = \dfrac{2,8}{4,5}$

$x = 38° \; 28' \; 43''$

93 El extremo de una escalera está apoyado sobre la pared de un edificio, y su base se encuentra a 4 m de la pared. Si el ángulo que forma la escalera con la pared es de 65°, ¿a qué altura del suelo llega la escalera?

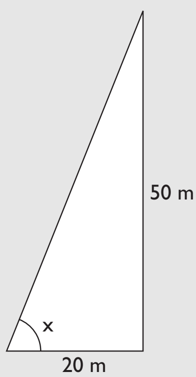
Solución:

$\text{tg } 65° = \dfrac{x}{4}$

$x = 4 \text{ tg } 65° = 8,58 \text{ m}$

94 Una torre de 50 m de altura proyecta un sombra de 20 m a cierta hora del día. Calcula el ángulo con el que se verá el extremo superior de la torre desde el extremo de la sombra.

Solución:



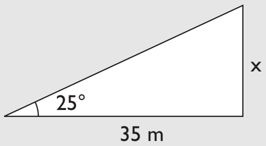
$\text{tg } x = \dfrac{50}{20}$

$\text{tg } x = 2,5$

$x = 68° \; 11' \; 55''$

95 A una distancia de 35 m del pie de una chimenea se ve el extremo de la misma con un ángulo de 25°. Calcula la altura de la chimenea.

Solución:

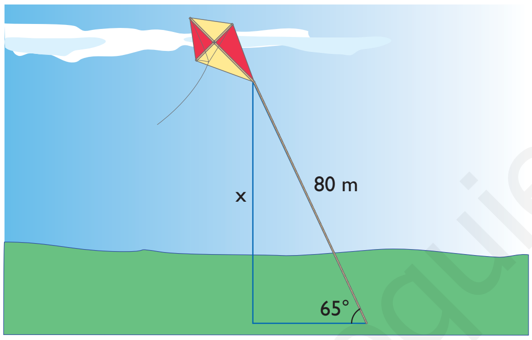


$\text{tg } 25° = \dfrac{x}{35}$

$x = 35 \text{ tg } 25°$

$x = 16,32$ m

96 Una cometa está sujeta al suelo con una cuerda de 80 m de largo y ésta forma con el suelo un ángulo de 65°. Si la cuerda está recta, ¿a qué altura del suelo está la cometa?



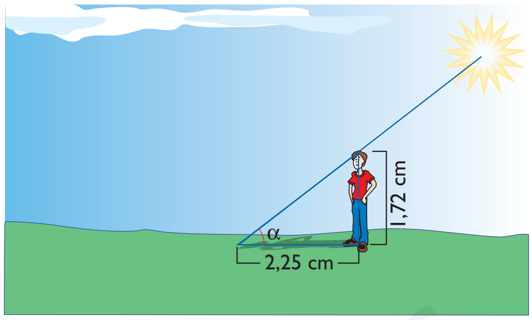
Solución:

$\text{sen } 65° = \dfrac{x}{80}$

$x = 80 \text{ sen } 65°$

$x = 72,50$ m

97 Una persona que mide 1,72 cm proyecta una sombra de 2,25 cm. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?

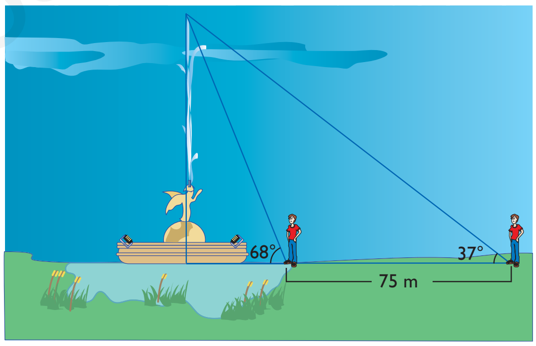


Solución:

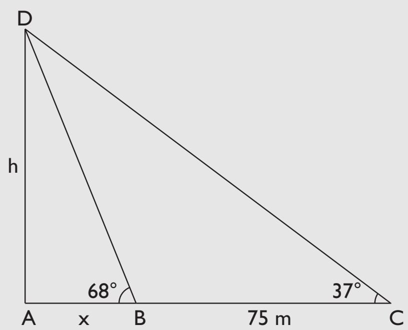
$\text{tg } \alpha = \dfrac{1,72}{2,25}$

$\alpha = 37° \ 23' \ 45''$

98 En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68°; alejándose 75 m del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37°. Calcula la altura del chorro de agua.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 68° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 37° &= \frac{h}{x+75} \end{aligned}\right\}$$

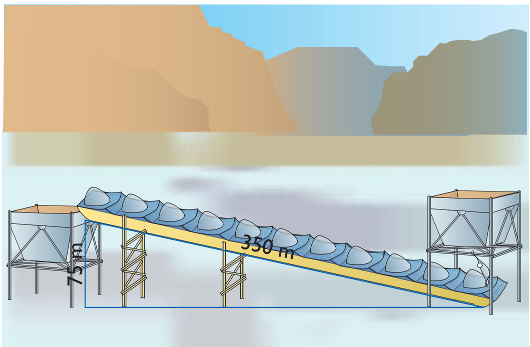
$$h = x \operatorname{tg} 68° \\ h = (x + 75) \operatorname{tg} 37°$$

$$h = 2{,}48x \\ h = 0{,}75(x + 75)$$

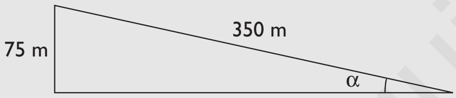
$x = 32{,}51$ m

$h = 80{,}64$ m

99 Una cinta transportadora de sacos de cemento mide 350 m y se quiere que eleve el cemento a 75 m de altura. ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?



Solución:

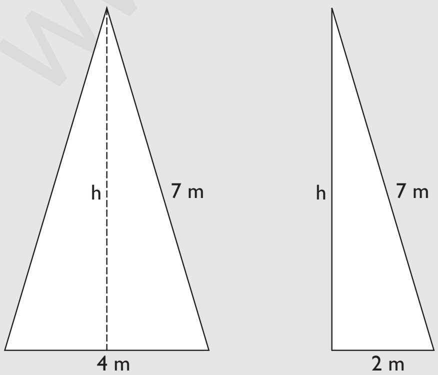


$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{75}{350}$

$\alpha = 12° \ 22' \ 25''$

100 Dado un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7 m, y el desigual, 4 m, calcula la altura relativa al lado desigual.

Solución:

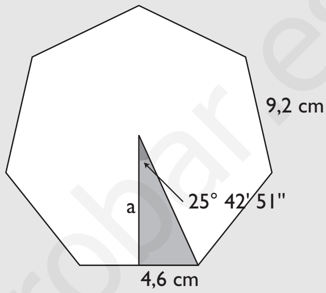


$h = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ m

101 Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9,2 cm

Solución:

$360° : 14 = 25° \ 42' \ 51''$

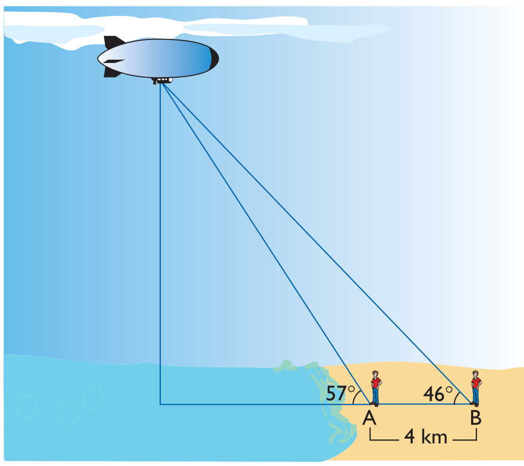


$\operatorname{tg} 25° \ 42' \ 51'' = \dfrac{4{,}6}{a}$

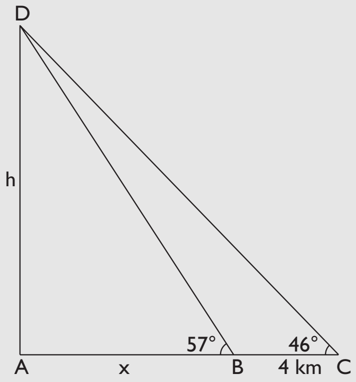
$a = 9{,}55$ cm

$\text{Área} = \dfrac{7 \cdot 9{,}2 \cdot 9{,}55}{2} = 307{,}51 \text{ cm}^2$

102 Dos personas están en una playa y ven un globo desde los puntos A y B, respectivamente, de forma que las dos personas y el globo están en un plano perpendicular al suelo. La distancia entre las dos personas es de 4 km. El ángulo de elevación del globo desde el punto A es de 57°, y desde el punto B, de 46°. Calcula la altura a la que se encuentra el globo.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 57° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 46° = \dfrac{h}{x+4} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = x \text{ tg } 57° \\ h = (x+4) \text{ tg } 46° \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = 1{,}54x \\ h = 1{,}04(x+4) \end{array}\right\}$$

$x = 8{,}32$ km

$h = 12{,}81$ km

Para profundizar

103 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = 2 \sec \alpha$$

Solución:

$$\frac{1 + \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} =$$

$$= \frac{(1 + \text{sen } \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha\,(1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{1 + 2 \text{ sen } \alpha + \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha\,(1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2 + 2 \text{ sen } \alpha}{\cos \alpha\,(1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2\,(1 + \text{sen } \alpha)}{\cos \alpha\,(1 + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha} = 2 \sec \alpha$$

104 Resuelve la ecuación trigonométrica:

$\text{tg } x + 3 \text{ cotg } x = 4$

Solución:

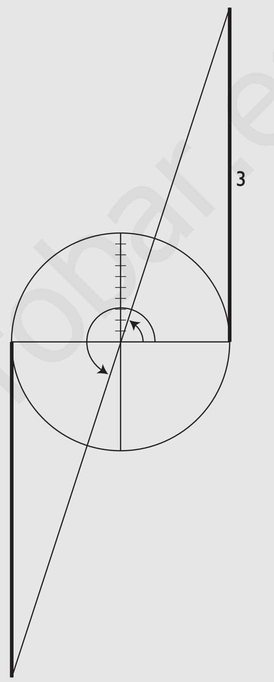
$$\text{tg } x + \frac{3}{\text{tg } x} = 4$$

$\text{tg}^2 x + 3 = 4 \text{ tg } x$

$\text{tg}^2 x - 4 \text{ tg } x + 3 = 0$

$$\text{tg } x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

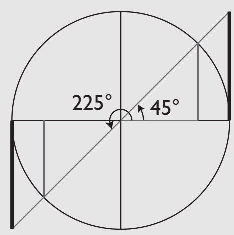
a) $\text{tg } x = 3$



$x_1 = 71° \ 33' \ 54'' + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 251° \ 33' \ 54'' + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{tg } x = 1$



$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} x = 45° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

105 Resuelve la ecuación trigonométrica:

$\text{tg } x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

Solución:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \sqrt{2}$$

$$\text{sen } x = \sqrt{2} \cos^2 x$$

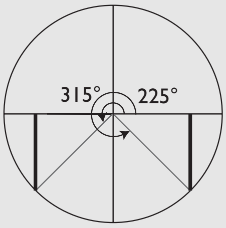
$$\text{sen } x = \sqrt{2}\,(1 - \text{sen}^2 x)$$

$$\sqrt{2}\,\text{sen}^2 x + \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$\text{sen } x = \sqrt{2}$ no tiene sentido porque $|\text{sen } x| \le 1$

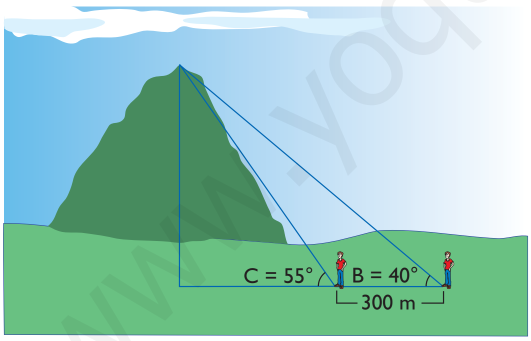
$$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



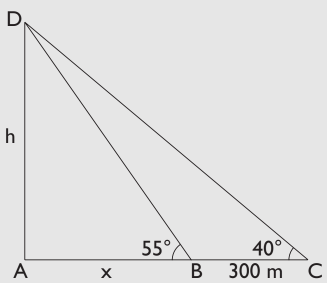
$x_1 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 315° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

106 En una llanura, desde un punto cualquiera se mide el ángulo B de elevación de una montaña y se obtiene 40°. Acercándose a la montaña una distancia de 300 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene 55°. Calcula la altura de la montaña.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 55° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 40° &= \frac{h}{x + 300} \end{aligned}\right\}$$

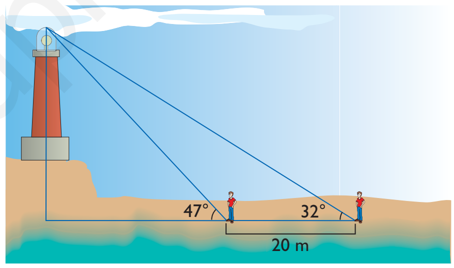
$$\left.\begin{aligned} h &= x \,\text{tg } 55° \\ h &= (x + 300)\,\text{tg } 40° \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 1{,}43x \\ h &= 0{,}84(x + 300) \end{aligned}\right\}$$

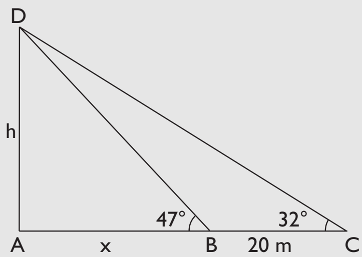
$x = 427{,}12$ m

$h = 610{,}78$ m

107 Un faro está colocado sobre un montículo. Al lado del montículo hay una pequeña llanura y desde ella se mide el ángulo de elevación del punto más alto del faro y se obtiene 47°. Nos alejamos en la misma dirección 20 m, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 32°. Calcula la altura del faro más el montículo.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 47° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 32° &= \frac{h}{x + 20} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= x \,\text{tg } 47° \\ h &= (x + 20)\,\text{tg } 32° \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= 1{,}07x \\ h &= 0{,}62(x + 20) \end{aligned}\right\}$$

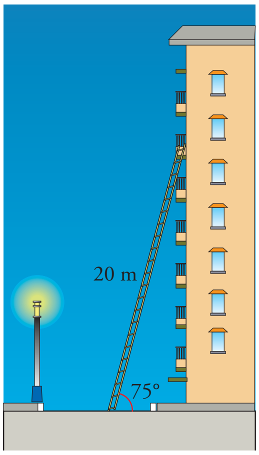
$x = 27{,}56$ m

$h = 29{,}49$ m

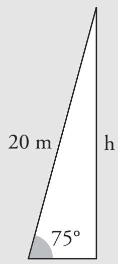
Aplica tus competencias

Cálculo de alturas

108 Una escalera de bomberos que mide 20 m de longitud se apoya sobre una fachada. El ángulo que forma el suelo con la escalera es de 75°. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la fachada?



Solución:



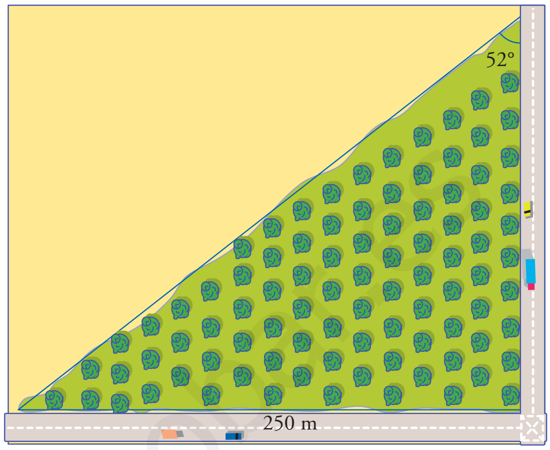
$\text{sen } 75° = \dfrac{h}{20}$

$h = 20 \cdot \text{sen } 75°$

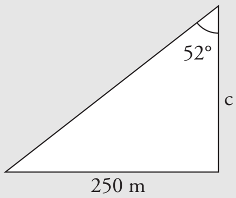
$h = 19{,}32$ m

Cálculo de áreas

109 Una finca tiene forma de triángulo rectángulo. Uno de los catetos mide 250 m, y el ángulo opuesto, 52°. Calcula el área de la finca.



Solución:



$\text{tg } 52° = \dfrac{250}{c}$

$c = 195{,}32$ m

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 250 \cdot 195{,}32$

$\text{Área} = 24\,415 \text{ m}^2$

Comprueba lo que sabes

1 Define qué es una identidad trigonométrica y pon un ejemplo.

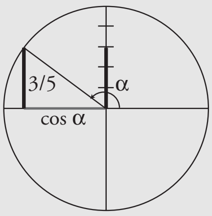
Solución:
Una identidad trigonométrica es un igualdad que se verifica para cualquier valor de la variable.
Ejemplo:
$sen^2 x + cos^2 x = 1$

2 Un ángulo mide 1,23 rad. ¿Cuántos grados son?

Solución:
$1{,}23 \text{ rad} \cdot \dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 70°\ 28'\ 26''$

3 Sabiendo que sen $\alpha = 3/5$ y que el ángulo está en el 2º cuadrante, halla el valor del cos α

Solución:



$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + cos^2 \alpha = 1$

$cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{9}{25}$

$cos^2 \alpha = \dfrac{16}{25}$

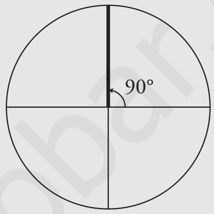
$cos\ \alpha = -\dfrac{4}{5}$

4 Calcula el ángulo α en los siguientes casos:
a) sen $\alpha = 0{,}5678$ y el ángulo está en el 2º cuadrante.
b) cos $\alpha = -0{,}4321$ y el ángulo está en el 3er cuadrante.
c) tg $\alpha = -1{,}2345$ y el ángulo está en el 4º cuadrante.

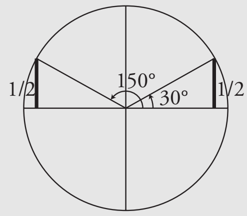
Solución:
a) $\alpha = 145°\ 24'\ 11''$
b) $\alpha = 244°\ 23'\ 57''$
c) $\alpha = 309°\ 32''$

5 Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:
$sen^2 x + 2 = cos^2 x + 3\ sen\ x$

Solución:
$2\ sen^2 x - 3\ sen\ x + 1 = 0$
sen $x = 1$, sen $x = 1/2$
a) sen $x = 1$

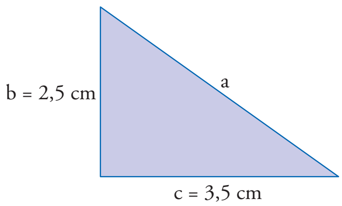


$x_1 = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$
b) sen $x = 1/2$



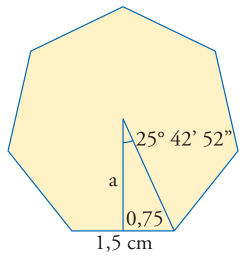
$x_2 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$
$x_3 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

6 Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



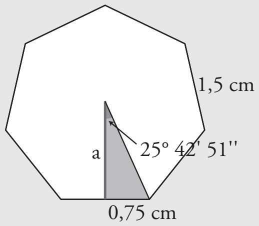
Solución:
$tg\ \alpha = \dfrac{2{,}5}{3{,}5} \Rightarrow \alpha = 35°\ 32'\ 16''$
$\beta = 90° - 35°\ 32'\ 16'' = 54°\ 27'\ 44''$
$a^2 = 2{,}5^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow a = 4{,}30$ cm

7 Calcula el área de un heptágono regular en el que el lado mide 1,5 cm



Solución:

360° : 14 = 25° 42’ 51”



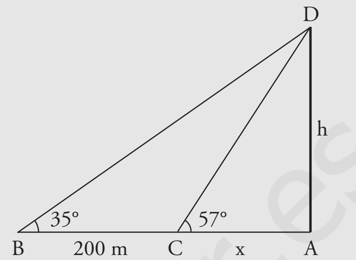
$$\text{tg } 25° \, 42' \, 51'' = \frac{0,75}{a}$$

a = 1,56 cm

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 1,5 \cdot 1,57}{2} = 8,24 \text{ cm}^2$$

8 En la llanura, desde un punto cualquiera, se mide el ángulo B de elevación de una montaña y se obtiene 35°. Acercándose a la montaña una distancia de 200 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene 57°. ¿Cuánto mide de alto la montaña?

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 57° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 35° = \dfrac{h}{x + 200} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = x \text{ tg } 57° \\ h = (x + 200) \text{ tg } 35° \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = 1,54\,x \\ h = (x + 200)\, 0,7 \end{array}\right\}$$

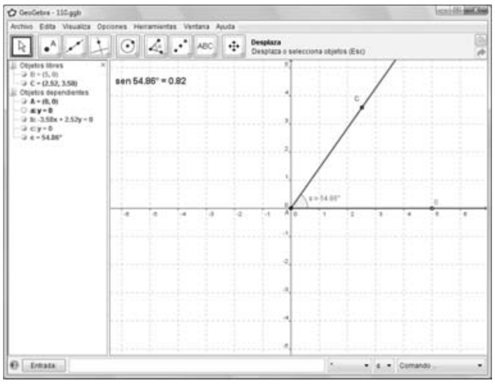
x = 166,67 m

h = 256,67 m

La montaña mide 256,67 m de alto.

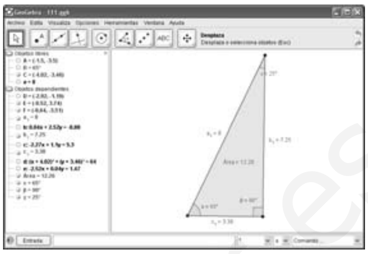
Paso a paso

110 Estudia el signo de la razón trigonométrica seno en cada cuadrante.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111 Dibuja un triángulo rectángulo en el que se conocen la hipotenusa a = 8 cm y el ángulo B = 65°. Calcula todos sus elementos.

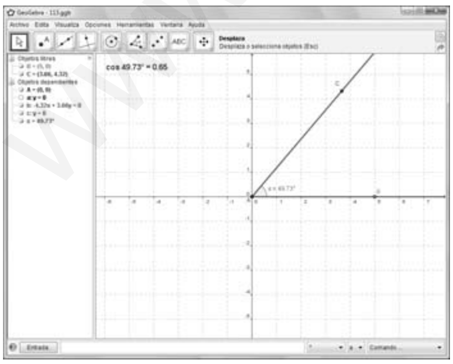


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

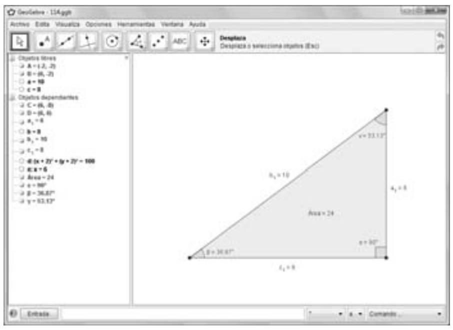
Practica

113 Estudia el signo de la razón trigonométrica coseno en cada cuadrante.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

114 Dibuja un triángulo rectángulo en el que se conocen la hipotenusa a = 10 cm y c = 8 cm. Calcula todos sus elementos.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Demuestra las siguientes identidades; primero dibuja el 1er miembro, y luego, el 2º

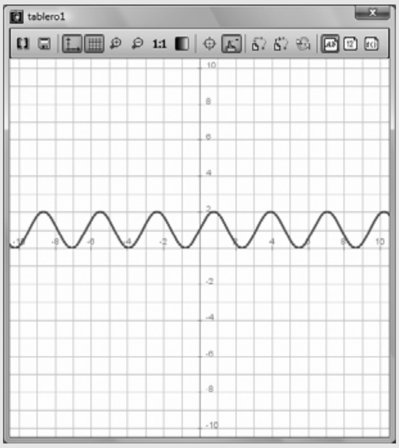
115 $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1 + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$

Solución:

Ejercicio 115

dibujar$((\cos(x) + \text{sen}(x))^2$, {color = azul, anchura_linea=2})

dibujar$(1 + 2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$, {color = rojo, anchura_linea=2})



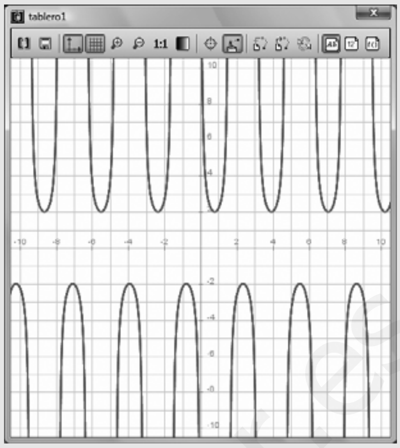
116 tg x + cotg x = sec x cosec x

Solución:

Ejercicio 116

dibujar(tan (x) + cot (x), {color = azul, anchura_linea=2})

dibujar(sec (x) · csc (x), {color = rojo, anchura_linea=2})



Resuelve las siguientes ecuaciones:

117 $3\text{sen } x - 2\cos^2 x = 0$

Solución:

Ejercicio 117

resolver$(3 \cdot \text{sen}(x) - 2 \cdot (\cos(x))^2 = 0) \rightarrow \left\{\left[x=\frac{\pi}{6}\right],\left[x=\frac{5\cdot\pi}{6}\right]\right\}$

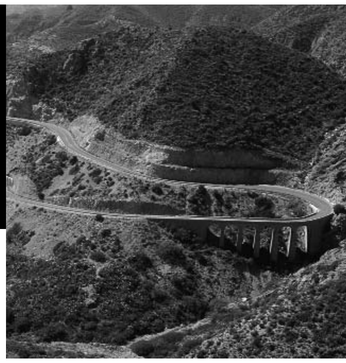
118 $\text{sen } x \cdot \cos x = 0$

Solución:

Ejercicio 118

resolver$(\text{sen}(x) \cdot \cos(x) = 0) \rightarrow \left\{\{x=0\},\{x=-\pi\},\{x=\pi\},\left\{x=\frac{\pi}{2}\right\},\left\{x=-\frac{\pi}{2}\right\}\right\}$

9 Geometría analítica

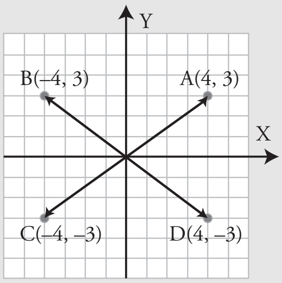


1. Vectores

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en unos ejes coordenados los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen sus extremos en los puntos: A(4, 3), B(– 4, 3), C(– 4, – 3) y D(4, – 3)

Solución:

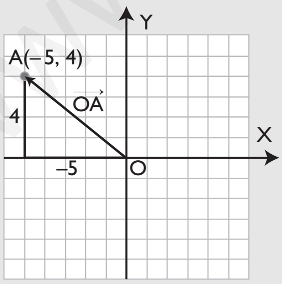


APLICA LA TEORÍA

1 Dado el punto A(– 5, 4), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

Solución:

$\overrightarrow{OA}(-5, 4)$

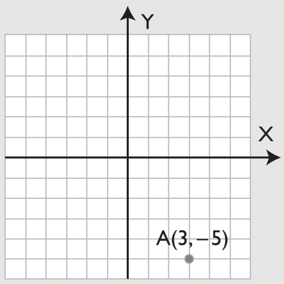


La componente horizontal es – 5, y la vertical, 4

2 Dado el vector $\vec{v}(3, -5)$, halla el punto A tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

Solución:

A(3, – 5)



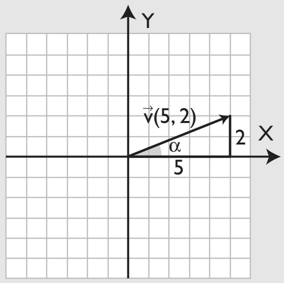
3 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(5, 2)$ b) $\vec{v}(-4, 3)$

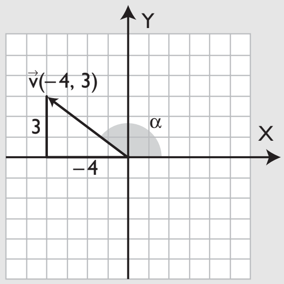
Solución:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,39$ unidades.

$\text{tg } \alpha = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 21° \ 48' \ 5''$



b) $|\vec{v}| = (-4)^2 + 3^2 = 5$ unidades.

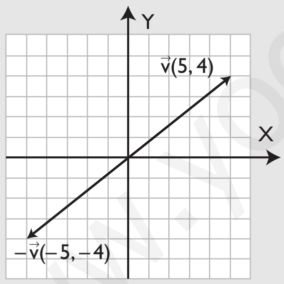


$\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{-4} \Rightarrow \alpha = 143° \ 7' \ 48''$

4 Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(5, 4)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

Solución:

$-\vec{v} = (-5, -4)$



5 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}(-3, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

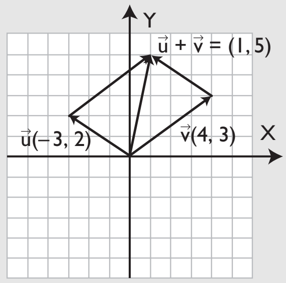
b) $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

a) Analíticamente:

$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 2) + (4, 3) = (1, 5)$

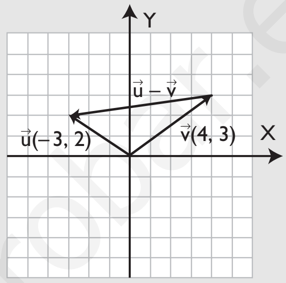
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$\vec{u} - \vec{v} = (-3, 2) - (4, 3) = (-7, -1)$

Geométricamente:



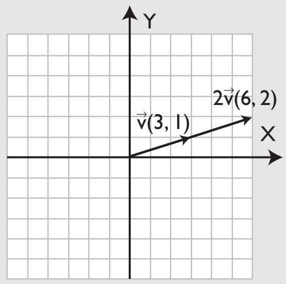
6 Dado el vector $\vec{v}(3, 1)$, calcula analítica y geométricamente:

a) $2\vec{v}$ b) $-2\vec{v}$

Solución:

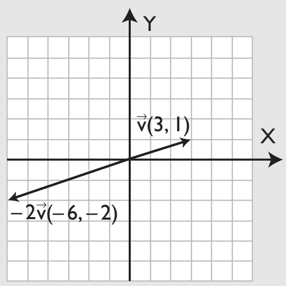
a) Analíticamente: $2\vec{v} = 2(3, 1) = (6, 2)$

Geométricamente:



b) Analíticamente: $-2\vec{v} = -2(3, 1) = (-6, -2)$

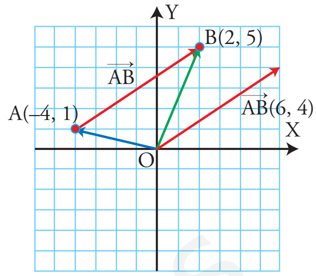
Geométricamente:



2. Ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Halla la pendiente del vector $\overrightarrow{AB}$ del primer dibujo del margen y simplifica el resultado.



Solución:

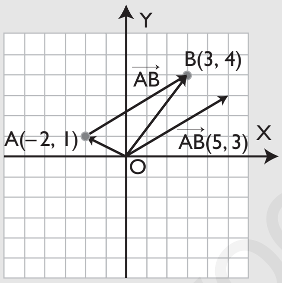
$\overrightarrow{AB}\,(6, 4) \Rightarrow m = \text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

APLICA LA TEORÍA

7 Dados los puntos A(–2, 1) y B(3, 4), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

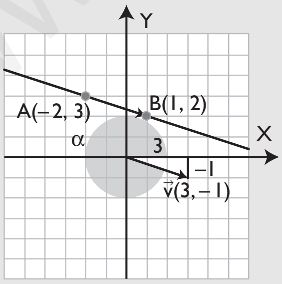
Solución:

$\overrightarrow{AB}\,(3 + 2, 4 - 1) = (5, 3)$



8 Representa la recta que pasa por los puntos A(–2, 3) y B(1, 2). Halla un vector director y la pendiente de dicha recta.

Solución:

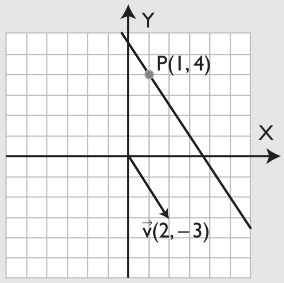


$\vec{v} = \overrightarrow{AB}\,(1 + 2, 2 - 3) = (3, -1)$

$m = \text{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}$

9 Representa la recta que pasa por el punto P(1, 4) y tiene como vector director $\vec{v}(2, -3)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

Solución:



Ecuación vectorial:

$(x, y) = (1, 4) + t(2, -3); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\} ; t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$$

Ecuación general:

$-3x + 3 = 2y - 8$

$3x + 2y - 11 = 0$

Ecuación explícita:

$2y = -3x + 11$

$y = -\dfrac{3x}{2} + \dfrac{11}{2}$

10 Dada la recta $2x + 3y = 6$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

Solución:

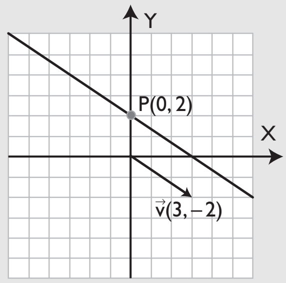
Es la ecuación general.

Para $x = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(0, 2)$

$\vec{n}(A, B) \Rightarrow \vec{n}(2, 3)$

$\vec{v}(B, -A) \Rightarrow \vec{v}(3, -2)$

$m = \text{tg}\,\alpha = -\dfrac{2}{3}$

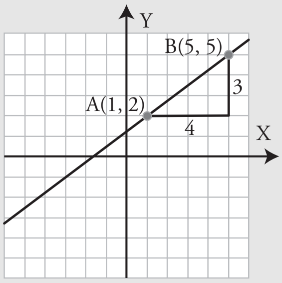


3. Otras ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Dibuja la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(5, 5) y halla su pendiente.

Solución:

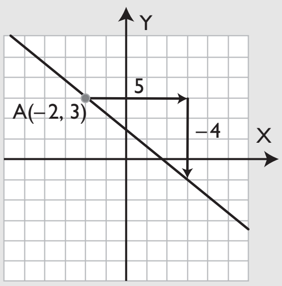


$m = \dfrac{3}{4}$

APLICA LA TEORÍA

11 Dibuja la recta que pasa por el punto A(–2, 3) y que tiene de pendiente –4/5. Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

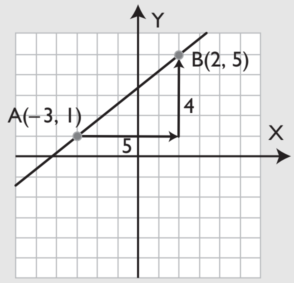


$y - 3 = -\dfrac{4}{5}(x + 2)$

$y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{7}{5}$

12 Dibuja la recta que pasa por los puntos A(–3, 1) y B(2, 5). Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:



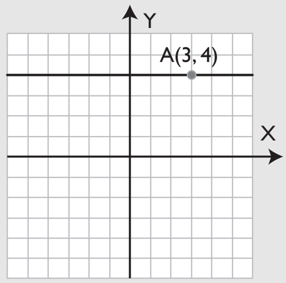
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}\,(5, 4) \Rightarrow m = \dfrac{4}{5}$

$y - 1 = \dfrac{4}{5}(x + 3)$

$y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{17}{5}$

13 Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(3, 4). Escribe su ecuación vectorial.

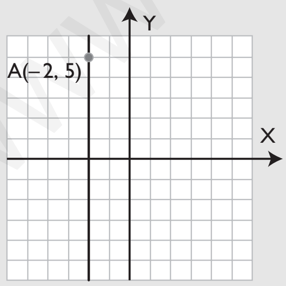
Solución:



$(x, y) = (3, 4) + t(1, 0);\ t \in \mathbb{R}$

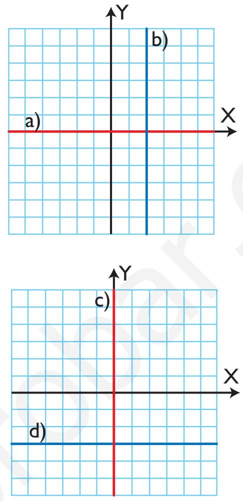
14 Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(–2, 5). Escribe su ecuación paramétrica.

Solución:



$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 + t \end{array}\right\}\ t \in \mathbb{R}$

15 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



Solución:

a) $y = 0$

b) $x = 2$

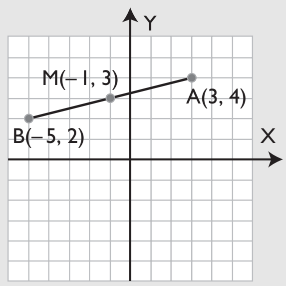
c) $x = 0$

d) $y = -3$

16 Halla el punto medio del segmento de extremos A(3, 4) y B(–5, 2). Haz la representación gráfica.

Solución:

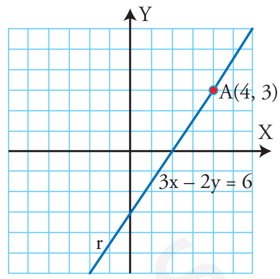
M(–1, 3)



4. Posiciones, distancia y circunferencia

PIENSA Y CALCULA

Halla todos los puntos de coordenadas enteras en la recta del 1^er^ dibujo del margen.



Solución:

A(4, 3); B(6, 6); C(2, 0); D(0, –3); E(–2, –6)

APLICA LA TEORÍA

17 Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(1, 2) y B(–3, 4) respecto de la siguiente recta:

$r \equiv 2x + 3y = 6$

Solución:

$A(1, 2) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \neq 6 \Rightarrow$

$A(4, 3) \notin r$

$B(-3, 4) \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -6 + 12 = 6 \Rightarrow$

$B(-3, 4) \in r$

18 Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{array}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

Solución:

a) Analíticamente:

$\frac{2}{2} \neq \frac{3}{-3} \Rightarrow$ rectas secantes.

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

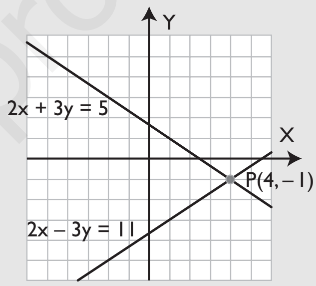
Sumando se obtiene:

$4x = 16 \Rightarrow x = 4$

$x = 4 \Rightarrow y = -1$

Se cortan en el punto A(4, – 1)

Representación:

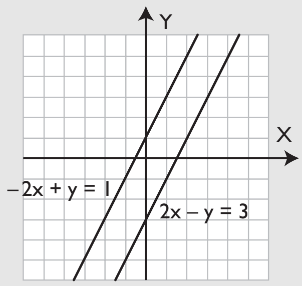


b) Analíticamente:

$\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow$ rectas paralelas.

No se cortan.

Representación:



19 Dada la recta $r \equiv 3x + y = 2$, halla una recta **s**, paralela a **r**, y otra perpendicular **t** que pasen por el punto P(2, – 1). Haz la representación gráfica.

Solución:

La recta **s** tendrá la misma pendiente que la recta **r**, que es: $m = -A/B = -3$

Su ecuación será:

$y + 1 = -3(x - 2)$

$3x + y = 5$

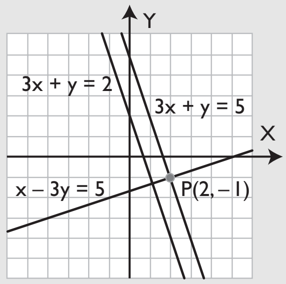
La recta **t** tendrá la pendiente inversa y opuesta a la de la recta **r:**

Si la pendiente de **r** es: $m_r = -3$,

la pendiente de **t** será: $m_t = \frac{1}{3}$

$y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$

$x - 3y = 5$

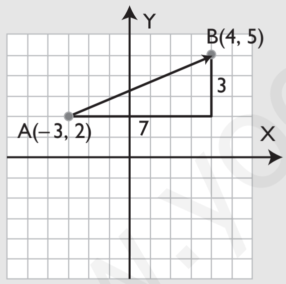


20 Halla la distancia que hay entre los puntos A(– 3, 2) y B(4, 5). Haz la representación gráfica.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(7, 3)$

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} = 7{,}62$ unidades.



21 Halla el coeficiente **a** para que la recta ax + 4y = 11 pase por el punto P(1, 2). Haz la representación gráfica.

Solución:

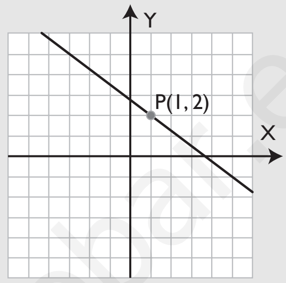
$a \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$

$a + 8 = 11$

$a = 3$

La ecuación de la recta será:

$3x + 4y = 11$

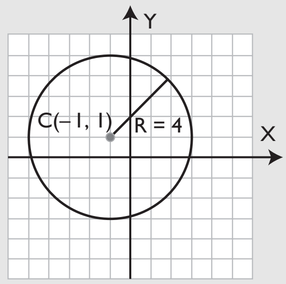


22 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(– 1, 1), y de radio, 4. Haz el dibujo.

Solución:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$



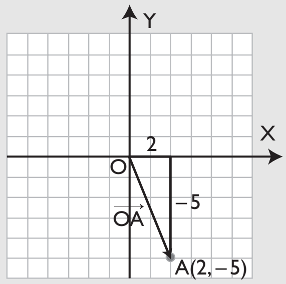
Ejercicios y problemas

1. Vectores

23 Dado el punto A(2, – 5), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

Solución:

$\overrightarrow{OA}(2, -5)$

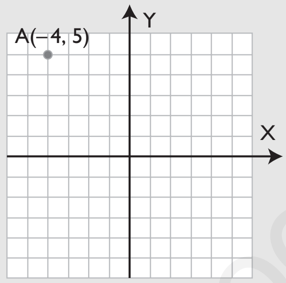


La componente horizontal es 2, y la vertical, – 5

24 Dado el vector $\vec{v}(-4, 5)$, halla el punto A, tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

Solución:

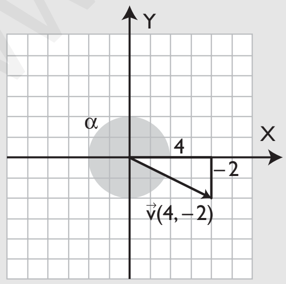
A(– 4, 5)



25 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

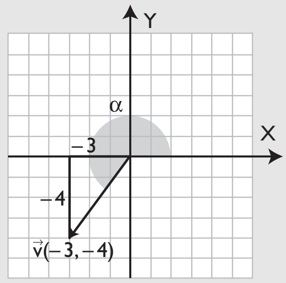
a) $\vec{v}(4, -2)$ b) $\vec{v}(-3, -4)$

Solución:



a) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow \alpha = 333°\ 26'\ 6''$



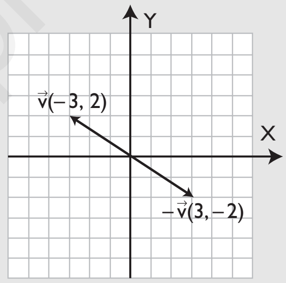
b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-4}{-3} \Rightarrow \alpha = 233°\ 7'\ 48''$

26 Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(-3, 2)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

Solución:

$-\vec{v} = (3, -2)$



27 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 2)$ y $\vec{v}(1, 4)$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{v} + \vec{v}$

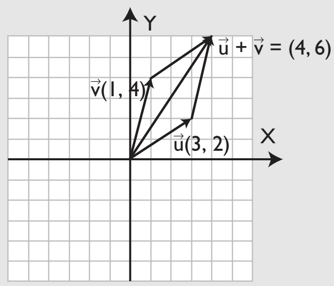
b) $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

a) Analíticamente:

$\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (1, 4) = (4, 6)$

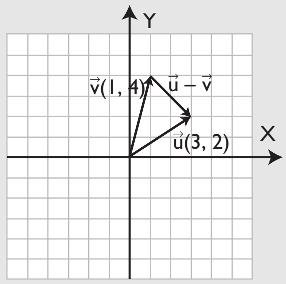
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (1, 4) = (2, -2)$

Geométricamente:



28 Dado el vector $\vec{v}(1, -2)$, calcula analítica y geométricamente:

a) $3\vec{v}$

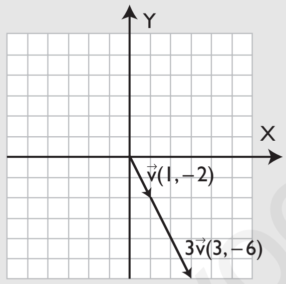
b) $-3\vec{v}$

Solución:

a) Analíticamente:

$3\vec{v} = 3(1, -2) = (3, -6)$

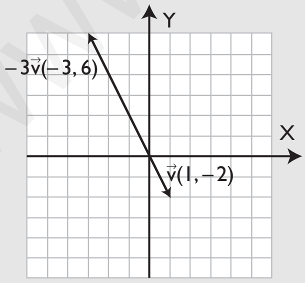
Geométricamente:



b) Analíticamente:

$-3\vec{v} = -3(1, -2) = (-3, 6)$

Geométricamente:

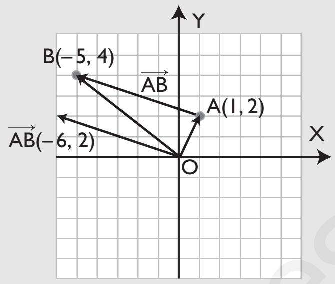


2. Ecuaciones de la recta

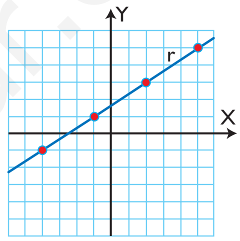
29 Dados los puntos A(1, 2) y B(–5, 4), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(-5 - 1, 4 - 2) = (-6, 2)$

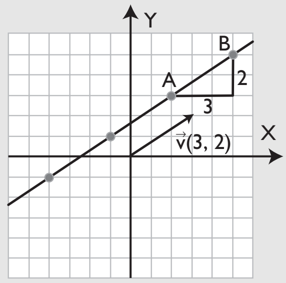


30 Halla un vector director y la pendiente de la siguiente recta:



Solución:

Se dibuja un vector de la recta y se hallan sus componentes.

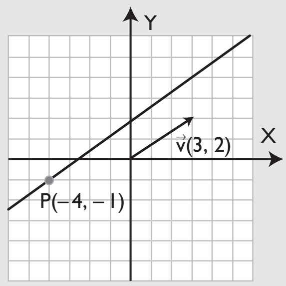


$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(3, 2)$

$m = \text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{3}$

31 Representa la recta que pasa por el punto P(–4, –1) y tiene como vector director $\vec{v}(3, 2)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

Solución:



Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-4, -1) + t(3, 2); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{array}\right\} ; t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y + 1}{2}$$

Ecuación general:

$2x + 8 = 3y + 3$

$2x - 3y + 5 = 0$

Ecuación explícita:

$-3y = -2x - 5$

$3y = 2x + 5$

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$$

32 Dada la recta $y = 2x + 5$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, la pendiente, un vector director y un vector normal. Haz la representación gráfica.

Solución:

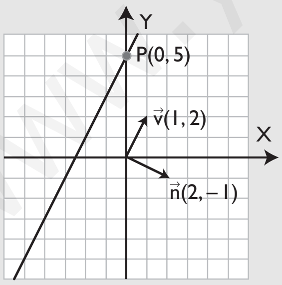
Es la ecuación explícita.

Para $x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow P(0, 5)$

$m = \text{tg}\ \alpha = 2$

$\vec{v}(1, 2)$

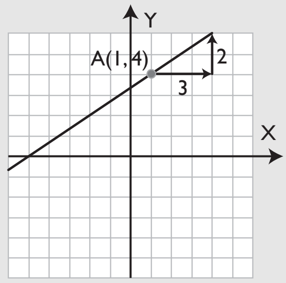
$\vec{n}(2, -1)$



3. Otras ecuaciones de la recta

33 Dibuja la recta que pasa por el punto $A(1, 4)$ y tiene de pendiente 2/3. Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

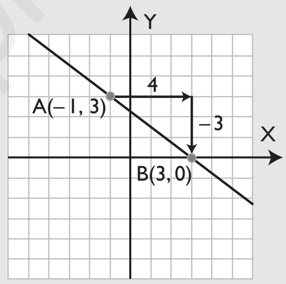


$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

34 Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, 0)$. Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

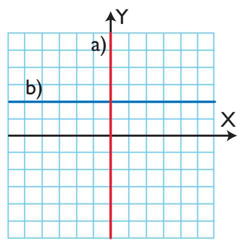


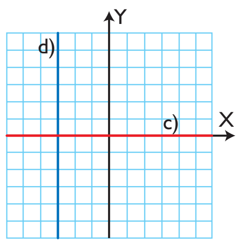
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}\ (4, -3) \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

35 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





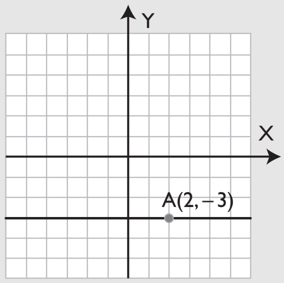
Solución:

a) $x = 0$ b) $y = 2$

c) $y = 0$ d) $x = -3$

36 Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(2, – 3). Escribe su ecuación general.

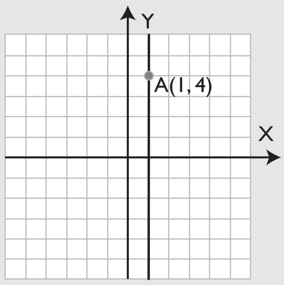
Solución:



y = – 3

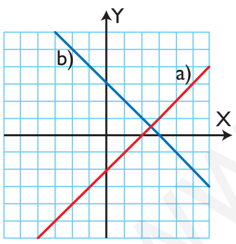
37 Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(1, 4). Escribe su ecuación general.

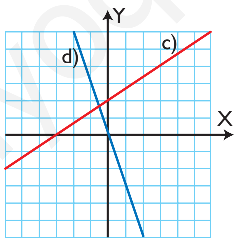
Solución:



x = 1

38 Halla la ecuación explícita de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





Solución:

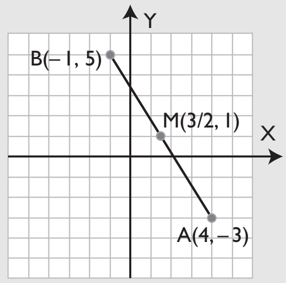
a) $y = x - 2$ b) $y = -x + 3$

c) $y = \frac{2}{3}x + 2$ d) $y = -3x$

39 Halla mentalmente el punto medio del segmento de extremos A(4, – 3) y B(– 1, 5). Haz la representación gráfica.

Solución:

M(3/2, 1)



4. Posiciones, distancia y circunferencia

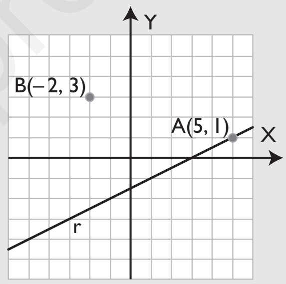
40 Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(5, 1) y B(– 2, 3) respecto de la siguiente recta: $r \equiv x - 2y = 3$

Solución:

$A(5, 1) \Rightarrow 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow A(5, 1) \in r$

$B(-2, 3) \Rightarrow -2 - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8 \neq 3 \Rightarrow$

$B(-2, 3) \notin r$



41 Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

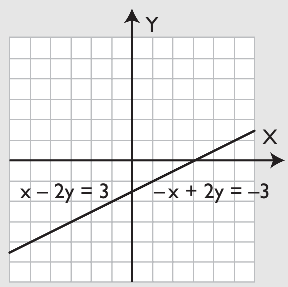
Solución:

a) Analíticamente:

$$\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{3}{-3} \Rightarrow \text{rectas coincidentes.}$$

Todos los puntos son comunes.

Representación:



b) Analíticamente:

$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow$ rectas secantes.

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

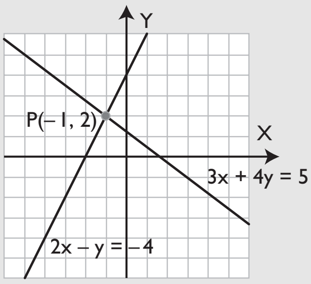
Se multiplica la 2ª ecuación por 4 y sumando se obtiene:

$11x = -11 \Rightarrow x = -1$

$x = -1 \Rightarrow y = 2$

Se cortan en el punto A(– 1, 2)

Representación:



42 Dada la recta $r \equiv x - 3y = 1$, halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto P(2, 5). Haz la representación gráfica.

Solución:

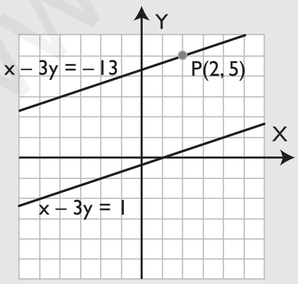
La recta **s** tendrá la misma pendiente que la recta **r,** que es:

$m = -A/B = 1/3$

Su ecuación será:

$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$

$x - 3y = -13$



43 Dada la recta $r \equiv 2x + y = 1$, halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto P(3, 2). Haz la representación gráfica.

Solución:

La recta **t** tendrá de vector director:

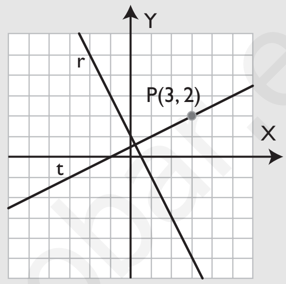
$\vec{n}(2, 1)$

$m = 1/2$

Su ecuación será:

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$

$x - 2y = -1$



44 Halla la distancia que hay entre los siguientes puntos:

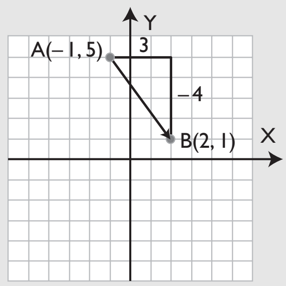
A(– 1, 5) y B(2, 1)

Haz la representación gráfica.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(3, -4)$

$d(A, B) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ unidades.



45 Halla el coeficiente **a** para que la recta:

$4x + ay = 7$

pase por el punto P(– 2, 3). Haz la representación gráfica.

Solución:

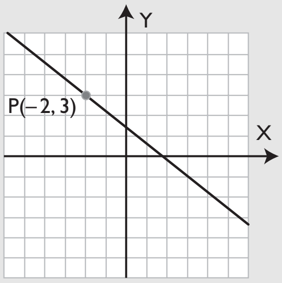
$4 \cdot (-2) + a \cdot 3 = 7$

$-8 + 3a = 7$

$a = 5$

La ecuación de la recta será:

$4x + 5y = 7$

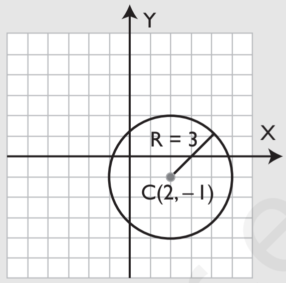


46 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(2, – 1), y de radio, 3. Haz el dibujo.

Solución:

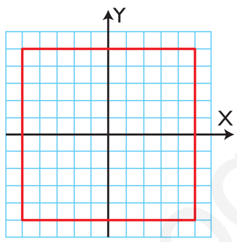
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$



Para ampliar

47 Dado el siguiente cuadrado de centro el origen de coordenadas y lado de longitud 10:

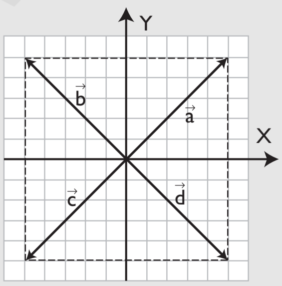


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del cuadrado.

b) escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Solución:

a) Vectores:



b) $\vec{a}(5, 5), \vec{b}(-5, 5), \vec{c}(-5, -5), \vec{d}(5, -5)$

48 Calcula mentalmente las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) A(3, 4), B(5, 7)

b) A(– 4, 1), B(2, – 5)

c) A(0, 5), B(– 7, 2)

d) A(0, 0), B(3, 5)

Solución:

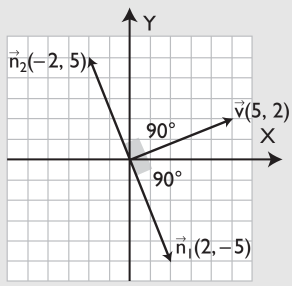
a) $\overrightarrow{AB}(2, 3)$ b) $\overrightarrow{AB}(6, -6)$

c) $\overrightarrow{AB}(-7, -3)$ c) $\overrightarrow{AB}(3, 5)$

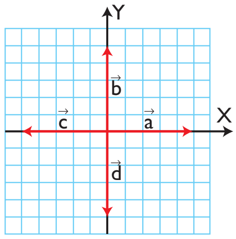
49 Halla mentalmente dos vectores perpendiculares al vector $\vec{v}(5, 2)$ y represéntalos gráficamente.

Solución:

$\vec{n}_1(2, -5), \vec{n}_2(-2, 5)$



50 Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes vectores:



Solución:

$\vec{a}$: módulo = 5, argumento = 0°

$\vec{b}$: módulo = 5, argumento = 90°

$\vec{c}$: módulo = 5, argumento = 180°

$\vec{d}$: módulo = 5, argumento = 270°

51 Dada la siguiente recta:

$(x, y) = (-4, 1) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) el vector director.

d) un vector normal.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

Solución:

a) Vectorial.

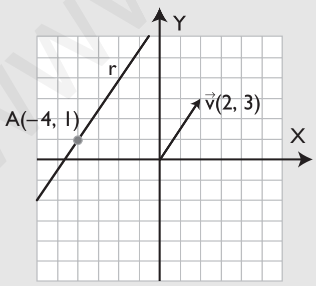
b) P(–4, 1)

c) $\vec{v}(2, 3)$

d) $\vec{n}(3, -2)$

e) m = 3/2

f) Representación:



52 Halla mentalmente un vector normal y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 5$ b) $-x - 2y = 4$

c) $-3x + y = 1$ d) $5x - 4y = 2$

Solución:

a) $\vec{n}(2, 3), \vec{v}(3, -2)$

b) $\vec{n}(-1, -2) \parallel (1, 2), \vec{v}(2, -1)$

c) $\vec{n}(-3, 1), \vec{v}(1, 3)$

d) $\vec{n}(5, -4), \vec{v}(4, 5)$

53 Halla mentalmente las ecuaciones generales de las siguientes rectas:

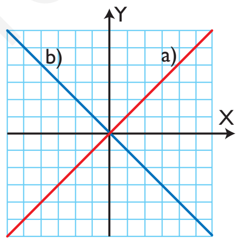
a) Eje X b) Eje Y

Solución:

a) y = 0

b) x = 0

54 Halla la ecuación explícita de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas.



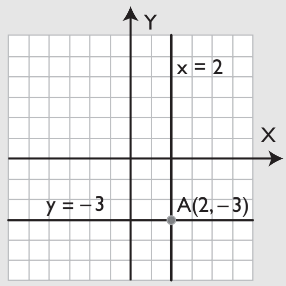
Solución:

a) y = x

b) y = –x

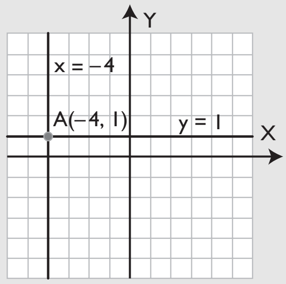
55 Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto A(2, –3)

Solución:



56 Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto A(–4, 1)

Solución:



57 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ -4x + 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Son paralelas porque los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes.

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1}$$

58 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Son coincidentes porque todos los coeficientes son proporcionales:

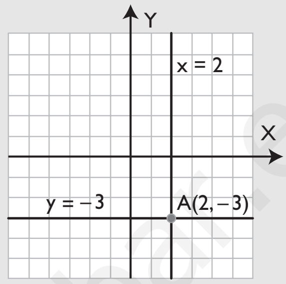
$$\frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{3}{-1}$$

59 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

Solución:

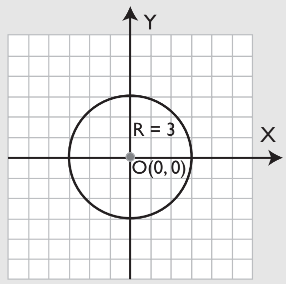


Se cortan, porque la primera es vertical y la segunda es horizontal.

60 Halla mentalmente la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio R = 3 unidades. Represéntala.

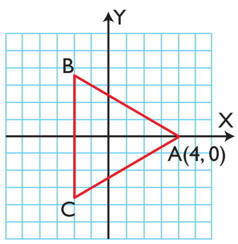
Solución:

$x^2 + y^2 = 9$



Problemas

61 Dado el triángulo equilátero siguiente, de centro el origen de coordenadas y vértice A(4, 0):

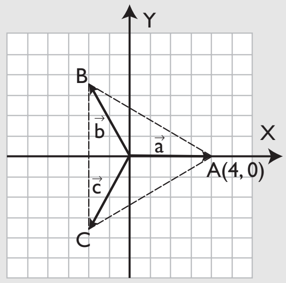


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del triángulo equilátero.

b) Aplicando las razones trigonométricas, halla la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Solución:

a) Vectores:



b) $\vec{a}(4, 0)$

$\vec{b}(4 \cos 120°, 4 \text{ sen } 120°) =$

$[4 \cdot (-1/2), 4\sqrt{3}/2] = (-2, 2\sqrt{3})$

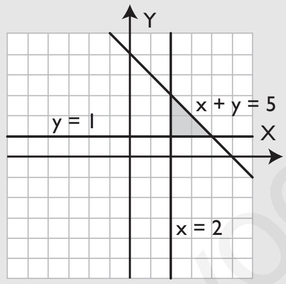
$\vec{c}(4 \cos 240°, 4 \text{ sen } 240°) =$

$[4 \cdot (-1/2), 4(-\sqrt{3}/2)] = (-2, -2\sqrt{3})$

62 Dibuja y calcula el área del triángulo comprendido entre las rectas siguientes:

$x = 2, y = 1, x + y = 5$

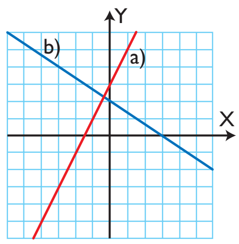
Solución:



Es un triángulo rectángulo, la base mide 2 unidades y la altura también mide 2 unidades.

Área = $2 \cdot 2 / 2 = 2$ unidades cuadradas.

63 Halla la ecuación general de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas:

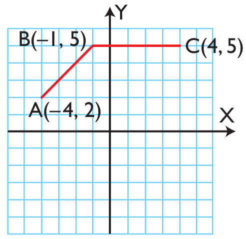


Solución:

a) $y = 2x + 3$

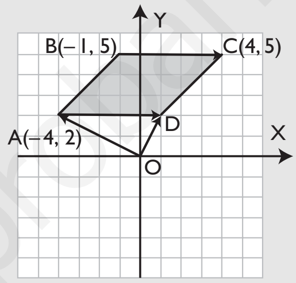
b) $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$

64 De un paralelogramo se conocen tres vértices consecutivos: A(–4, 2), B(–1, 5) y C(4, 5)



Halla las coordenadas del cuarto vértice D utilizando la suma de vectores.

Solución:



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA}(-4, 2)$

$\overrightarrow{BC}(5, 0)$

$\overrightarrow{OD} = (-4, 2) + (5, 0) = (1, 2)$

65 Halla analíticamente un vector director y la pendiente de las rectas que están definidas por los dos puntos siguientes:

a) A(0, 0), B(3, 4)

b) A(2, –1), B(4, 6)

c) A(–2, 5), B(3, –4)

d) A(3, –2), B(4, –1)

Solución:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(3, 4), m = 4/3$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(2, 7), m = 7/2$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(5, -9), m = -9/5$

d) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(1, 1), m = 1$

66 Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

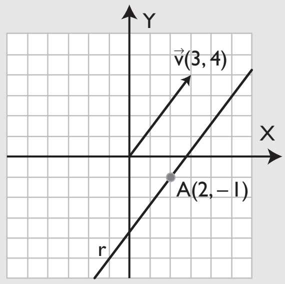
a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) el vector director.
d) un vector normal.
e) la pendiente.
f) Represéntala.

Solución:

a) Continua.
b) P(2, – 1)
c) $\vec{v}(3, 4)$
d) $\vec{n}(4, -3)$
e) m = 4/3
f) Representación:



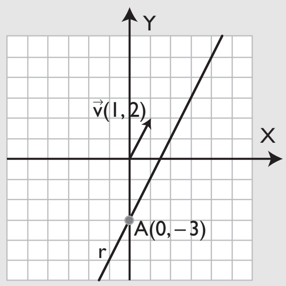
67 Dada la siguiente recta:

$$y = 2x - 3$$

halla:
a) el tipo de ecuación.
b) un punto.
c) la pendiente.
d) un vector director.
e) un vector normal.
f) Represéntala.

Solución:

a) Explícita.
b) P(0, – 3)
c) m = 2
d) $\vec{v}(1, 2)$
e) $\vec{n}(2, -1)$
f) Representación:

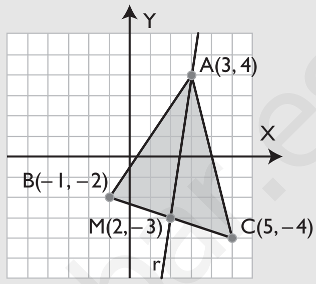


68 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(3, 4), B(– 1, – 2) y C(5, – 4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene la mediana definida por el vértice A
b) Halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

a) Dibujo:



b) La recta **r** pasa por los puntos M(2, – 3) y A(3, 4)

$\vec{v} = \overrightarrow{MB}(1, 7)$

m = 7

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$y + 3 = 7(x - 2)$

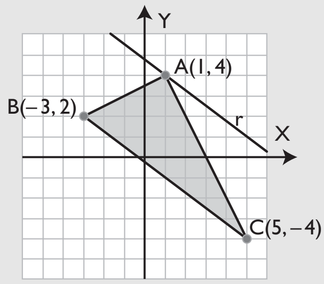
$y = 7x - 17$

69 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(1, 4), B(– 3, 2) y C(5, – 4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta paralela al lado BC, que pasa por el vértice A
b) halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

a) Dibujo:



b) La recta **r** pasa por el punto A(1, 4) y tiene la misma pendiente que el lado BC

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}(8, -6) \parallel (4, -3)$

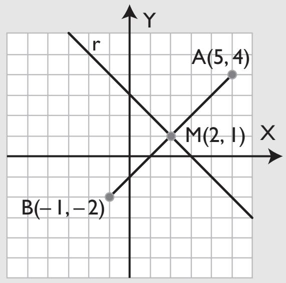
m = – 3/4

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$

$3x + 4y = 19$

70 Dibuja el segmento de extremos los puntos A(5, 4) y B(– 1, – 2) y su mediatriz. Halla la ecuación de la mediatriz.

Solución:



La recta **r** pasa por el punto medio del segmento $\overrightarrow{AB}$

M(2, 1)

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-6, -6) \parallel (1, 1)$

m = 1

Como la recta **r** es perpendicular, su pendiente será inversa y opuesta:

$m_r = -1$

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$y - 1 = -(x - 2)$

$y = -x + 3$

71 Halla el coeficiente **k** para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto A(1, 2)

Solución:

$k \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

$k = 2$

72 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ 2x + \ \ y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

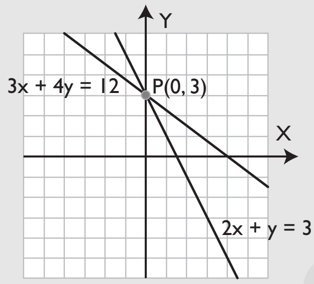
Solución:

Las rectas son secantes porque los coeficientes de las variables no son proporcionales.

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{4}{1}$

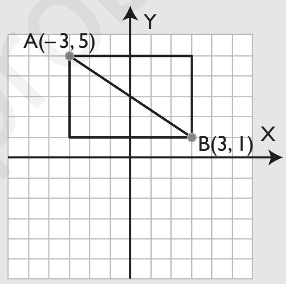
El sistema se resuelve por sustitución despejando **y** de la segunda ecuación.

La solución es x = 0, y = 3



73 Dibuja un rectángulo sabiendo que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, y que las coordenadas de dos vértices opuestos son A(– 3, 5) y B(3, 1). Dibuja y halla la longitud de la diagonal.

Solución:



$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3 + 3)^2 + (1 - 5)^2} =$

$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = 7{,}21$

74 Halla el valor de **k** para que las siguientes rectas sean paralelas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ kx - 6y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Para que sean paralelas, los coeficientes de las variables tienen que ser proporcionales.

$\dfrac{2}{k} = \dfrac{3}{-6}$

$3k = -12$

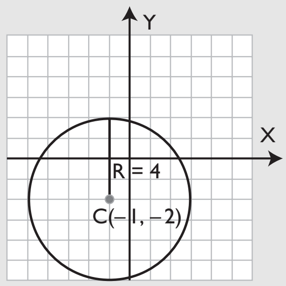
$k = -4$

75 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto A(– 1, – 2), y de radio, 4 unidades. Haz el dibujo.

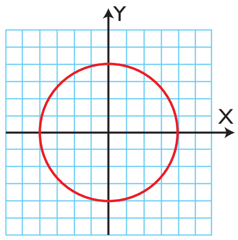
Solución:

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$



76 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



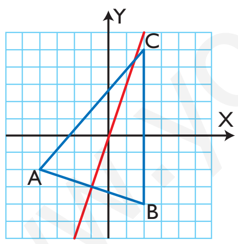
Solución:

Tiene el centro en O(0, 0) y radio R = 4

$x^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 = 16$

77 Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la mediatriz del lado AB

Solución:

La mediatriz del lado AB pasa por el punto medio M de AB y es perpendicular a dicho lado. Luego tendrá pendiente inversa y opuesta de la que tiene dicho lado.

$A(-4, -2), B(2, -4) \Rightarrow M(-1, -3)$

Pendiente del lado AB:

$\overrightarrow{AB}(6, -2) \parallel (3, -1)$

$m_{AB} = -\dfrac{1}{3}$

Pendiente de la mediatriz:

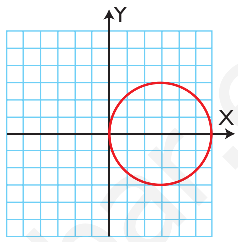
$m_{\perp} = 3$

Ecuación de la mediatriz:

$y + 3 = 3(x + 1)$

$y = 3x$

78 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Solución:

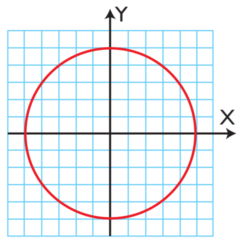
El centro es el punto C(3, 0) y el radio, R = 3

$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

Para profundizar

79 Dada la circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio, 5

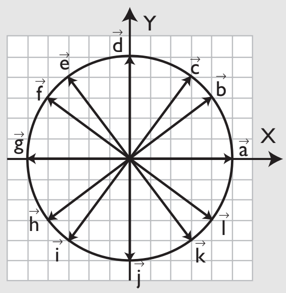


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo un punto de la circunferencia de coordenadas enteras.

b) Escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

Solución:

a) Representación:



b) Expresión analítica:

$\vec{a}(5, 0)$	$\vec{b}(4, 3)$
$\vec{c}(3, 4)$	$\vec{d}(0, 5)$
$\vec{e}(-3, 4)$	$\vec{f}(-4, 3)$
$\vec{g}(-5, 0)$	$\vec{h}(-4, -3)$
$\vec{i}(-3, -4)$	$\vec{j}(0, -5)$
$\vec{k}(3, -4)$	$\vec{l}(4, -3)$

80 Dados los vectores:

$\vec{u}(2, -3)$ y $\vec{v}(-1, 4)$

calcula analíticamente:

a) $3\vec{u} + 5\vec{v}$

b) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

Solución:

a) $3(2, -3) + 5(-1, 4) = (1, 11)$

b) $5(2, -3) - 3(-1, 4) = (13, -27)$

81 Dada la siguiente recta:

$5x - 2y + 9 = 0$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) un vector normal.

d) un vector director.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

Solución:

a) Ecuación general.

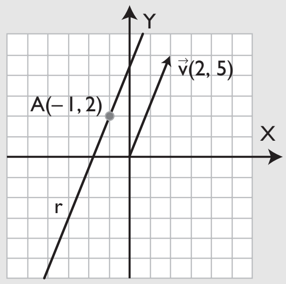
b) P(– 1, 2)

c) $\vec{n}(5, -2)$

d) $\vec{v}(2, 5)$

e) m = 5/2

f) Representación:



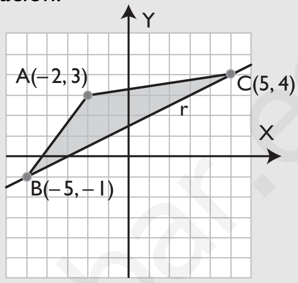
82 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(– 2, 3), B(– 5, – 1) y C(5, 4)

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene al lado BC

b) halla la ecuación de dicha recta.

Solución:

a) Representación:



b) Pendiente del lado BC:

$\overrightarrow{BC}(10, 5) \parallel (2, 1)$

$m = \dfrac{1}{2}$

$y + 1 = \dfrac{1}{2}(x + 5)$

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

83 Halla el coeficiente **k** para que la recta: $5x + ky = 1$ pase por el punto A(– 3, 4)

Solución:

$5 \cdot (-3) + k \cdot 4 = 1$

$k = 4$

84 Un romboide tiene tres vértices en los puntos A(– 5, 1), B(– 2, 5) y C(2, 5)

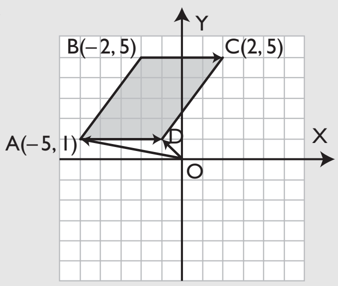
Halla:

a) el cuarto vértice.

b) la longitud de sus diagonales.

Solución:

a) Vértice D



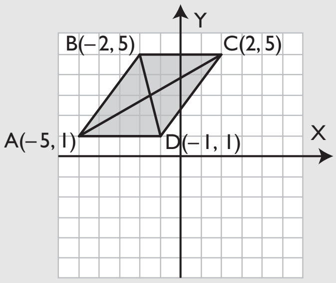
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA}(-5, 1)$

$\overrightarrow{BC}(4, 0)$

$\overrightarrow{OD} = (-5, 1) + (4, 0) = (-1, 1)$

b) Longitud de las diagonales.



$d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$ u

$d(B, D) = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$ u

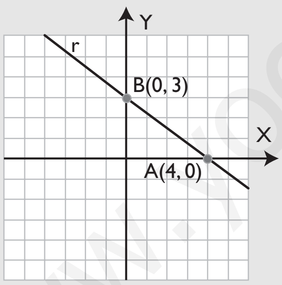
85 Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta siguiente:

$$3x + 4y = 12$$

Solución:

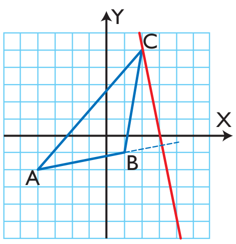
Para $y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$

Para $x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$



$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ unidades.

86 Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice C

Solución:

Se aplica la forma punto-pendiente.

Punto C(2, 5)

Pendiente: la altura es perpendicular a la base AB, luego su pendiente es inversa y opuesta de la pendiente del lado AB

$\overrightarrow{AB}(5, 1) \Rightarrow m_{AB} = 1/5$

$m_{\perp} = -5$

$y - 5 = -5(x - 2)$

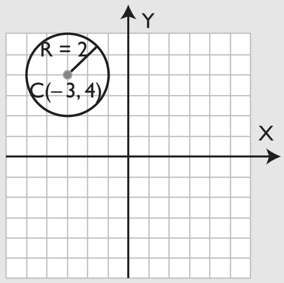
$y = -5x + 15$

87 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(–3, 4), y de radio, 2 unidades. Haz el dibujo.

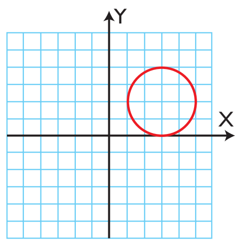
Solución:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$



88 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Solución:

Tiene el centro en el punto C(3, 2) y radio, R = 2

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

Aplica tus competencias

89 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

Solución:
C(3, 2), R = 5

90 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$

Solución:
C(– 4, 0), R = 3

91 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

Solución:
C(1, – 3), R = 2

Comprueba lo que sabes

1 Explica cómo se hallan las componentes de un vector definido por dos puntos. Pon un ejemplo.

Solución:

El **vector definido por dos puntos** $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es el que se obtiene al restar al vector de posición del extremo el del origen.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Sus coordenadas son:

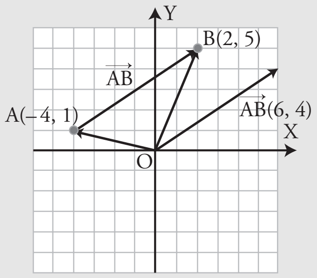
$$\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ejemplo

Dados los puntos $A(-4, 1)$ y $B(2, 5)$, calcula el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\,(2 - (-4), 5 - 1)$

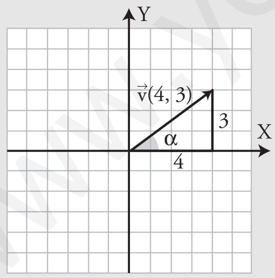
$\overrightarrow{AB}\,(6, 4)$



2 Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}(4, 3)$

Solución:

Representación gráfica:



$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{4}$

$\alpha = 36° \ 52' \ 12''$

3 Dada la recta $4x - 3y = 12$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla dos puntos, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

Solución:

Es la ecuación general.

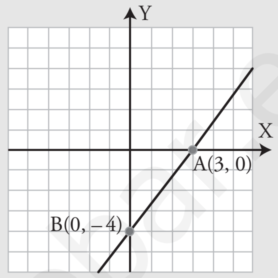
Para $y = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 0)$

Para $x = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(0, -4)$

$\vec{n}(4, -3)$

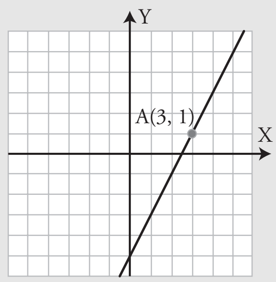
$\vec{v}(3, 4)$

$m = 4/3$



4 Dibuja la recta que pasa por el punto A(3, 1) y tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha recta.

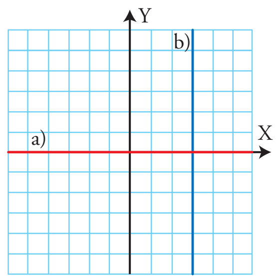
Solución:

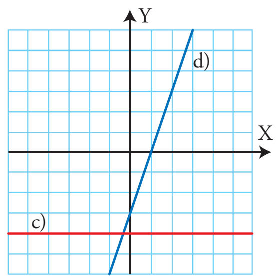


Se aplica la ecuación punto-pendiente

$y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 5$

5 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





Solución:

a) $y = 0$ b) $x = 3$

c) $y = -4$ d) $y = 3x - 3$

6 Estudia analíticamente la posición relativa del siguiente par de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

$$\left.\begin{aligned}2x + y &= 5\\ x - 3y &= 6\end{aligned}\right\}$$

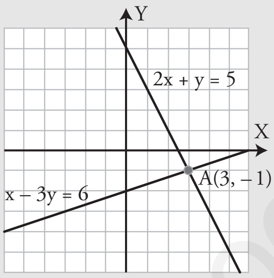
Representa ambas rectas para comprobarlo.

Solución:

Analíticamente:

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow$ Rectas secantes.

Resolviendo el sistema se halla el punto de corte: $A(3, -1)$



7 Dada la recta $2x - 3y = 6$, halla su ecuación vectorial.

Solución:

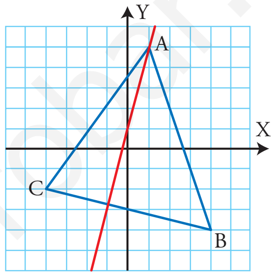
Un punto es: $P(3, 0)$

El vector normal es: $\vec{n}(2, -3) \Rightarrow \vec{v}(3, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (3, 0) + t(3, 2); t \in \mathbb{R}$

8 Dado el triángulo de la figura del margen, halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A



Solución:

Punto: $A(1, 5)$

La altura es perpendicular al lado BC; por tanto, su pendiente es la inversa y opuesta a la de dicho lado.

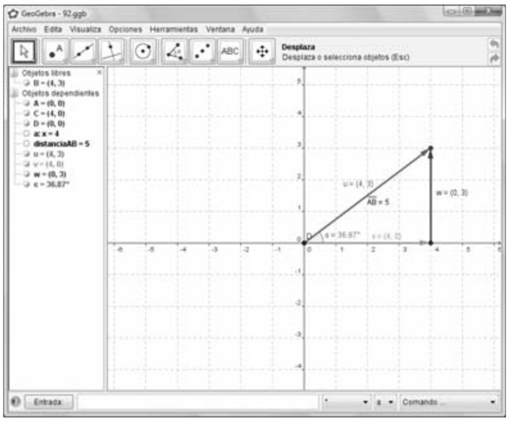
$\overrightarrow{BC}(8, -2) \parallel (4, -1) \Rightarrow m_{BC} = -1/4$

$m_{\perp} = 4$

$y - 5 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 1$

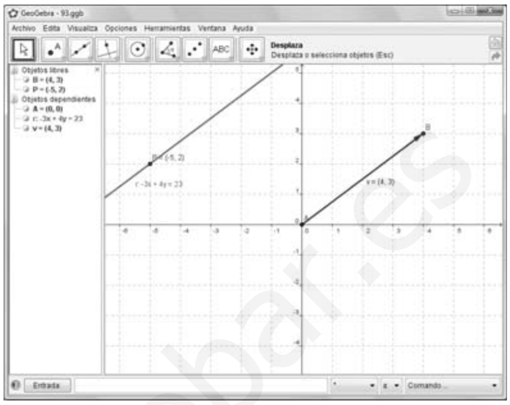
Paso a paso

92 Dibuja el vector **u(4, 3)** y sus componentes. Halla el módulo y el argumento.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

93 Dibuja la recta que pasa por el punto **P(– 5, 2)** y tiene de vector director a **v(4, 3).** Halla la ecuación de la recta.

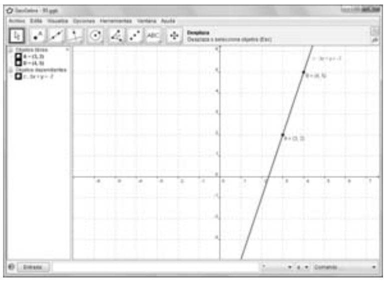


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

94 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

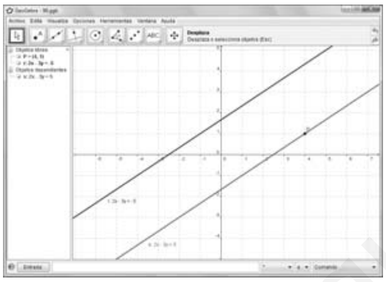
Practica

95 Dibuja la recta que pasa por los puntos **A(3, 2)** y **B(4, 5)** y halla su ecuación.



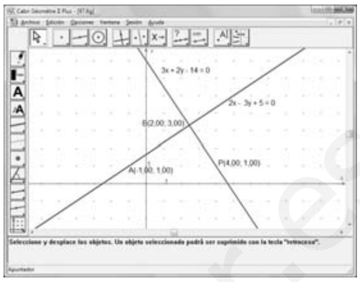
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

96 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**



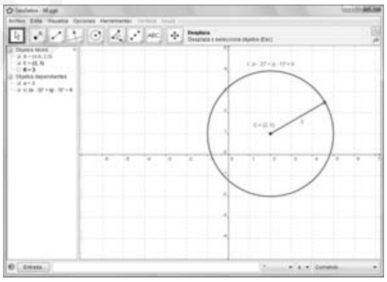
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

97 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**

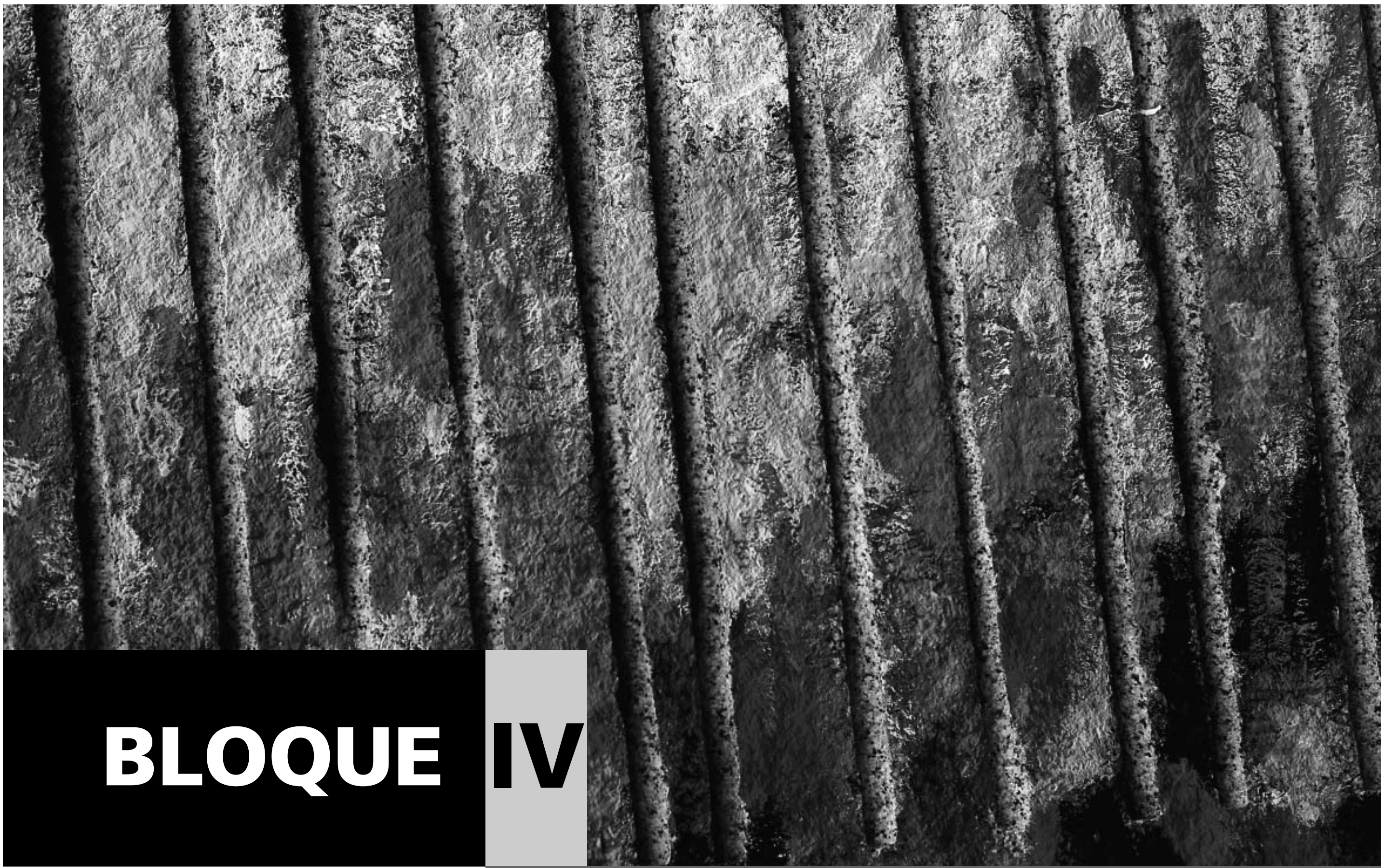


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

98 Dibuja la circunferencia de centro **C(2, 1)** y radio **R = 3.** Halla su ecuación.



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.



BLOQUE IV

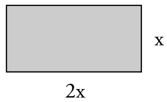
Funciones

10 Funciones. Rectas y parábolas

1. Funciones

PIENSA Y CALCULA

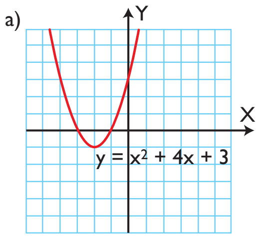
Dado el rectángulo de la figura, calcula:
a) el perímetro.
b) el área.

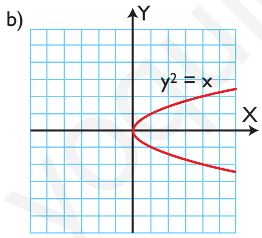


Solución:
Perímetro = 2(2x + x) = 6x
Área = $2x \cdot x = 2x^2$

APLICA LA TEORÍA

1 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:





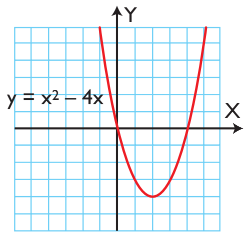
Solución:
a) Sí es función.
b) No es función. Hay valores de **x** para los que existen dos valores de **y.** Por ejemplo, para x = 4, y = –2, y = 2

2 Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 1$ b) y = log (x + 1)
c) $y = \sqrt{x + 2}$ d) y = cos 2x
e) $y = \dfrac{2}{x - 3}$ f) $y = 2^{x + 1}$

Solución:
a) Polinómica
b) Logarítmica.
c) Irracional.
d) Trigonométrica.
e) Racional.
f) Exponencial.

3 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R}$ = (–∞, +∞)
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen O(0, 0)

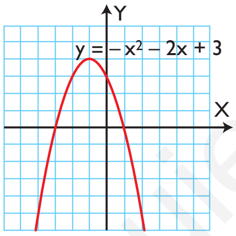
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0), A(4, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(2, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

4 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-3, 0), B(1, 0)$
   - Eje Y: $C(0, 3)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(-1, 4)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1)$
   - Decreciente (↘): $(-1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

2. Función lineal y función afín

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = 2x$, indica si es lineal o afín y calcula la pendiente.

Solución:

Función lineal.

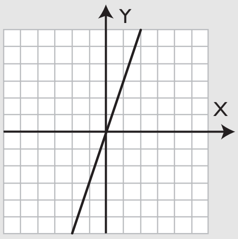
Pendiente: $m = 2$

5 Dadas las funciones lineales siguientes, halla su pendiente e indica si son crecientes o decrecientes. Represéntalas:

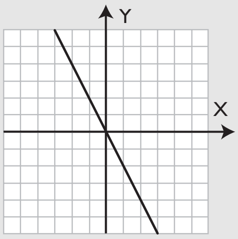
a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x/3$

Solución:

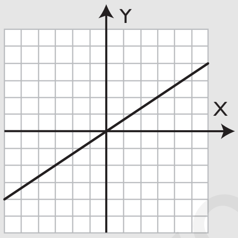
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.



b) $m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.

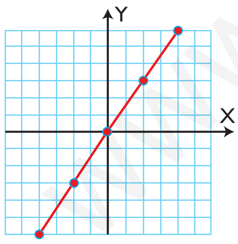


c) $m = 2/3 \Rightarrow$ Creciente.

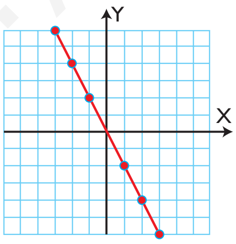


6 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

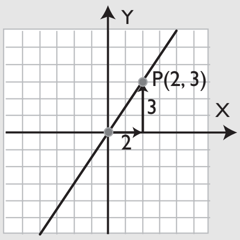


b)



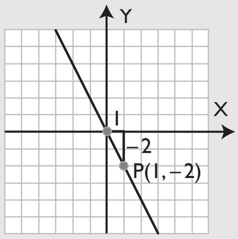
Solución:

a)



$m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

b)



$m = -2 \Rightarrow y = -2x$

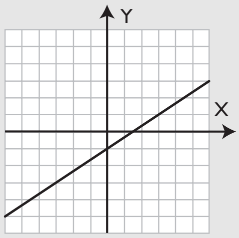
7 Dadas las funciones afines siguientes, halla su pendiente y la ordenada en el origen, e indica si son crecientes o decrecientes. Represéntalas:

a) $y = 2x/3 - 1$ b) $y = -3x/4 + 2$

Solución:

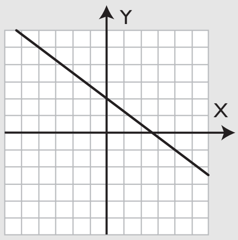
a) $m = 2/3 \Rightarrow$ Creciente.

$b = -1$



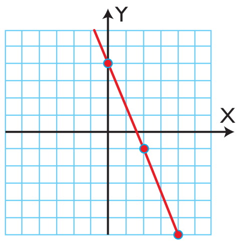
b) $m = -3/4 \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 2$

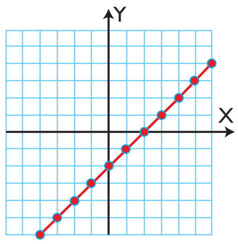


8 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

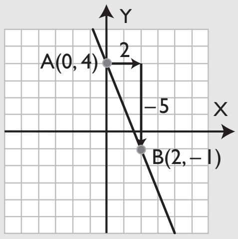


b)



Solución:

a)

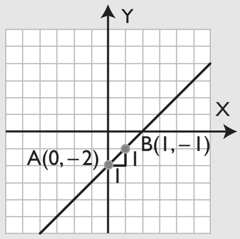


$m = \dfrac{-1-4}{2-0} = -\dfrac{5}{2}$

$b = 4$

$y = -\dfrac{5}{2}x + 4$

b)



$m = \dfrac{-1-(-2)}{1-0} = 1$

$b = -2$

$y = x - 2$

3. Función cuadrática

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 4$, representada en el margen, indica:
a) la ecuación del eje de simetría.
b) las coordenadas del vértice, y si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:
a) $x = 0$
b) $V(0, -4)$ es un mínimo.

APLICA LA TEORÍA

9 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2 - 6x - 1$　　b) $y = -2x^2 + 8x - 5$
c) $y = x^2 - 9$　　d) $y = x^2 + 2x$

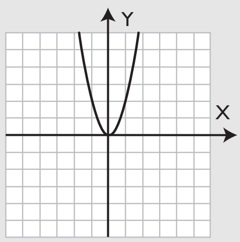
Solución:
a) Eje de simetría: $x = 1$
$V(1, -4)$ es un mínimo.
b) Eje de simetría: $x = 2$
$V(2, 3)$ es un máximo.
c) Eje de simetría: $x = 0$
$V(0, -9)$ es un mínimo.
d) Eje de simetría: $x = -1$
$V(-1, -1)$ es un mínimo.

10 Representa las siguientes parábolas:

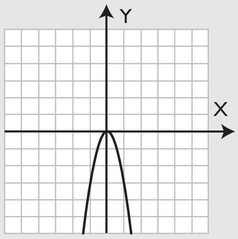
a) $y = 2x^2$　　b) $y = -3x^2$

Solución:

a)

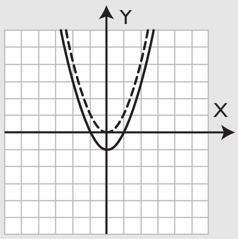


b)



11 Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = x^2 - 1$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:

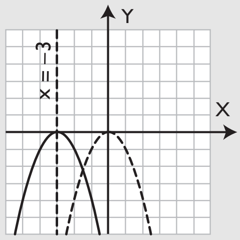


Eje de simetría: $x = 0$

$V(0, -1)$ es un mínimo.

12 Representa la parábola $y = -x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = -(x + 3)^2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:

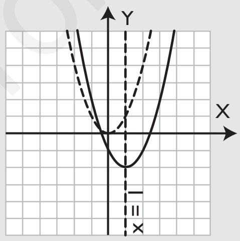


Eje de simetría: $x = -3$

$V(-3, 0)$ es un máximo.

13 Representa la parábola $y = x^2$; a partir de ella, representa la parábola $y = (x - 1)^2 - 2$. Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un mínimo.

4. La parábola

PIENSA Y CALCULA

Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$, representada en el margen, indica:

a) la ecuación del eje de simetría.

b) las coordenadas del vértice y si éste es máximo o mínimo.

Solución:

Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un mínimo.

14 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, indicando si éste es un máximo o un mínimo, de las siguientes funciones cuadráticas, y represéntalas:

a) $y = x^2 - 4x - 1$

b) $y = -3x^2 - 6x + 2$

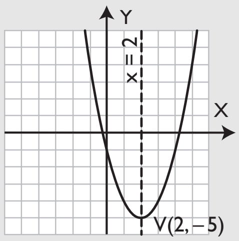
c) $y = x^2 + 4x + 3$

d) $y = -2x^2 + 8x - 5$

Solución:

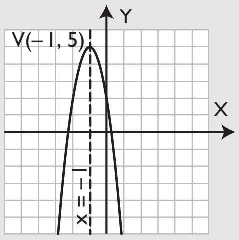
a) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -5)$ es un mínimo.



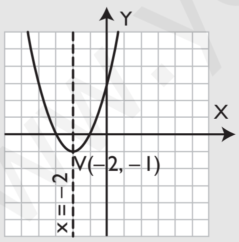
b) Eje de simetría: $x = -1$

$V(-1, 5)$ es un máximo.



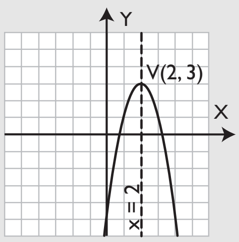
c) Eje de simetría: $x = -2$

$V(-2, -1)$ es un mínimo.

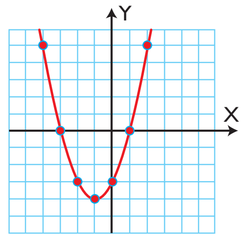


d) Eje de simetría: $x = 2$

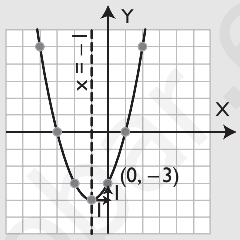
$V(2, 3)$ Es un máximo.



15 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = 1$

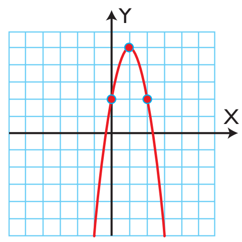
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 2$

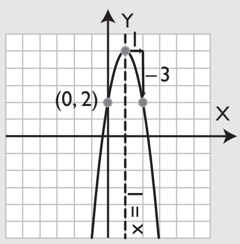
$c = -3$

$y = x^2 + 2x - 3$

16 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = -3$

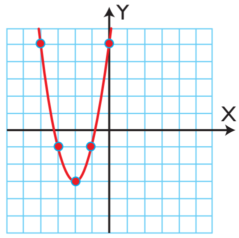
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

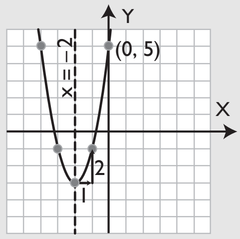
$c = 2$

$y = -3x^2 + 6x + 2$

17 Halla la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:



$a = 2$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

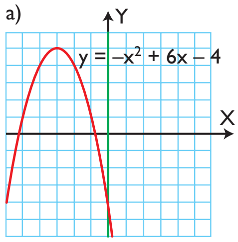
$c = 5$

$y = 2x^2 + 8x + 5$

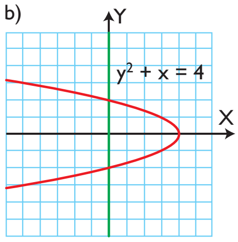
1. Funciones

18 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)



b)



Solución:

a) Sí es función.

b) No es función. Hay valores de **x** para los que existen dos valores de **y.** Por ejemplo, para $x = 0$, $y = -2, y = 2$

19 Clasifica las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - x + 2$ b) $y = \log (x - 3)$

c) $y = \sqrt{x - 5}$ d) $y = \text{sen } (x + \pi)$

e) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$ f) $y = 3^{x - 2}$

Solución:

a) Polinómica.

b) Logarítmica.

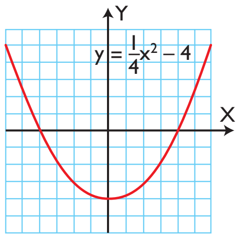
c) Irracional.

d) Trigonométrica.

e) Racional.

f) Exponencial.

20 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

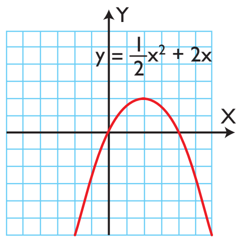
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-4, 0), B(4, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

21 Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(4, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(2, 2)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 2)$
   - Decreciente (↘): $(2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, 2]$

2. Función lineal y función afín

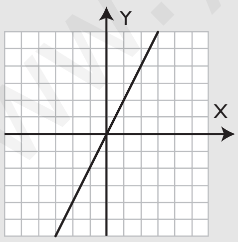
22 Halla mentalmente la pendiente de las siguientes funciones lineales o de proporcionalidad directa, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

a) $y = 2x$ b) $y = -\frac{x}{2}$

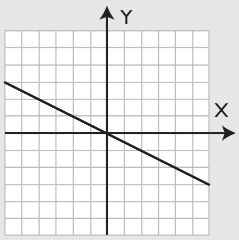
c) $y = \frac{4x}{3}$ d) $y = -\frac{5x}{4}$

Solución:

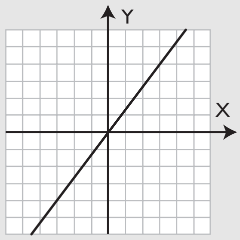
a) $m = 2 \Rightarrow$ Creciente.



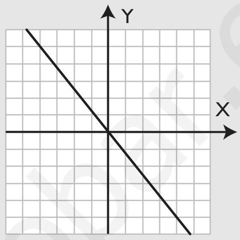
b) $m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.



c) $m = 4/3 \Rightarrow$ Creciente.

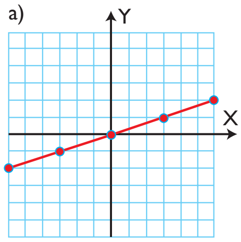


d) $m = -5/4 \Rightarrow$ Decreciente.

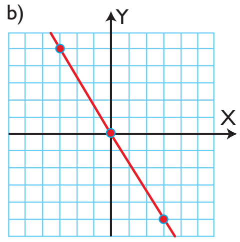


23 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

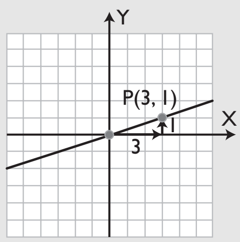


b)



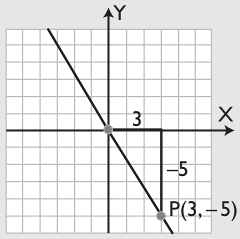
Solución:

a)



$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

b)



$$m = \frac{-5}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x$$

24 Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

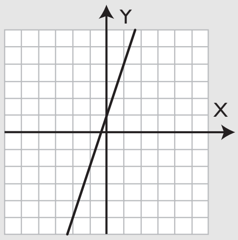
a) $y = 3x + 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 3$

c) $y = \frac{3x}{2} - 1$ d) $y = -\frac{4x}{3} + 2$

Solución:

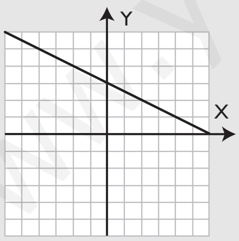
a) $m = 3 \Rightarrow$ Creciente.

$b = 1$



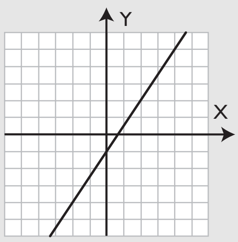
b) $m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 3$



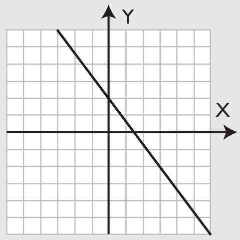
c) $m = 3/2 \Rightarrow$ Creciente.

$b = -1$



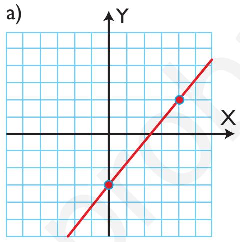
d) $m = -4/3 \Rightarrow$ Decreciente.

$b = 2$

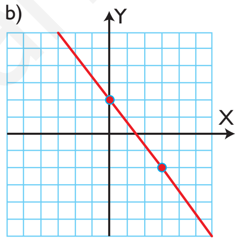


25 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a)

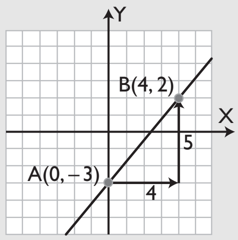


b)



Solución:

a)

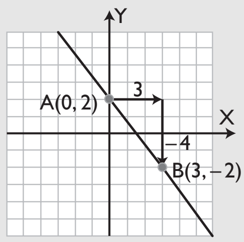


$$m = \frac{2-(-3)}{4-0} = \frac{5}{4}$$

$b = -3$

$$y = \frac{5}{4}x - 3$$

b)



$$m = \frac{-2-2}{3-0} = -\frac{4}{3}$$

$b = 2$

$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$

3. Función cuadrática

26 Halla el eje de simetría y las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo en las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 4x^2 - 16x + 11$

b) $y = -x^2 + 2x - 3$

c) $y = x^2 + 2$

d) $y = x^2 + 4x$

Solución:

a) Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -5)$ es un mínimo.

b) Eje de simetría: $x = 1$

$V(1, -2)$ es un máximo.

c) Eje de simetría: $x = 0$

$V(0, 2)$ es un mínimo.

d) Eje de simetría: $x = -2$

$V(-2, -4)$ es un mínimo.

27 Representa la siguiente parábola:

$$y = \frac{x^2}{2}$$

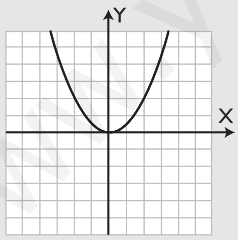
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 0$

b) $V(0, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

d) Es convexa (∪)

28 Representa la siguiente parábola:

$$y = -\frac{x^2}{3}$$

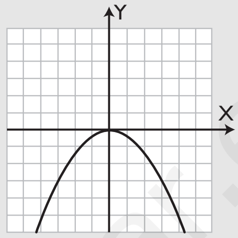
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 0$

b) $V(0, 0)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

29 Representa la parábola $y = -x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$y = -x^2 + 2$

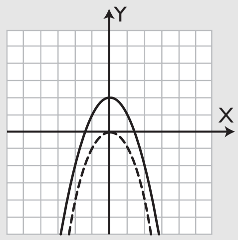
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 0$

b) $V(0, 2)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

30 Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$y = (x - 2)^2$

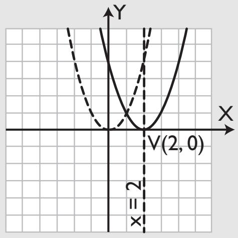
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 2$

b) $V(2, 0)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$

d) Es convexa (∪)

31 Representa la función $y = x^2$

A partir de ella, representa la siguiente parábola:

$y = (x + 2)^2 - 3$

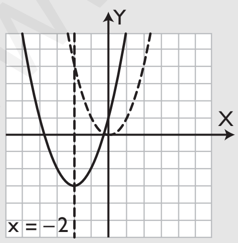
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = -2$

b) $V(-2, -3)$ es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(-2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -2)$

d) Es convexa (∪)

4. La parábola

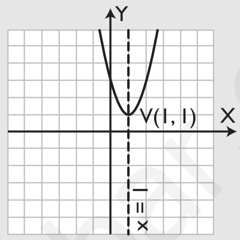
32 Representa la siguiente parábola:

$y = 2x^2 - 4x + 3$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



a) $x = 1$

b) $V(1, 1)$ es un mínimo.

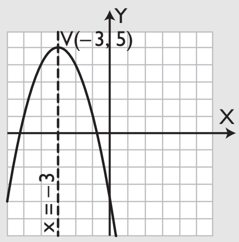
33 Representa la siguiente parábola:

$y = -x^2 - 6x - 4$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



a) $x = -3$

b) $V(-3, 5)$ es un máximo.

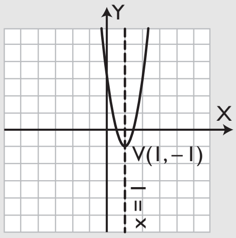
34 Representa la siguiente parábola:

$y = 4x^2 - 8x + 3$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

Solución:



a) x = 1

b) V(1, – 1) es un mínimo.

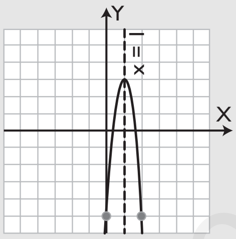
35 Representa la siguiente parábola:

$y = -8x^2 + 16x - 5$

a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

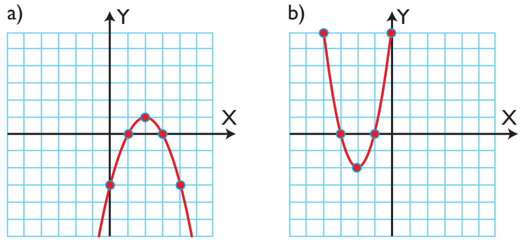
Solución:



a) x = 1

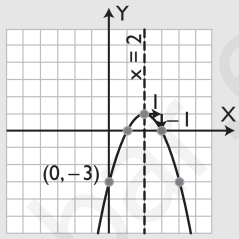
b) V(1, 3) es un máximo.

36 Halla la ecuación de las siguientes parábolas:



Solución:

a)



a = – 1

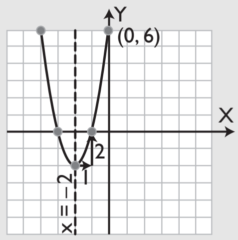
Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 4$

$c = -3$

$y = -x^2 + 4x - 3$

b)



a = 2

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$

$c = 6$

$y = 2x^2 + 8x + 6$

Para ampliar

37 Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Halla mentalmente la pendiente, di si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

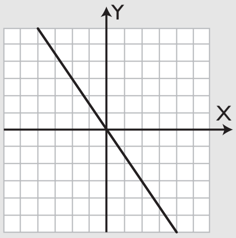
a) $y = -\dfrac{3x}{2}$ b) $y = -2x - 1$

c) $y = \dfrac{x}{3} - 4$ d) $y = \dfrac{x}{4}$

Solución:

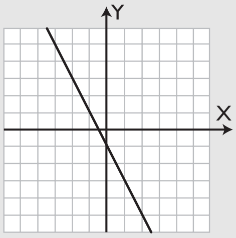
a) Función lineal.

$m = -3/2 \Rightarrow$ Decreciente.



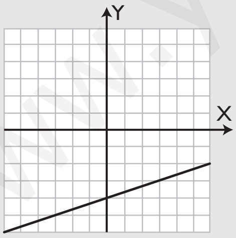
b) Función afín.

$m = -2 \Rightarrow$ Decreciente.



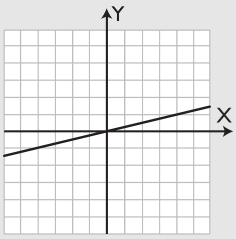
c) Función afín.

$m = 1/3 \Rightarrow$ Creciente.

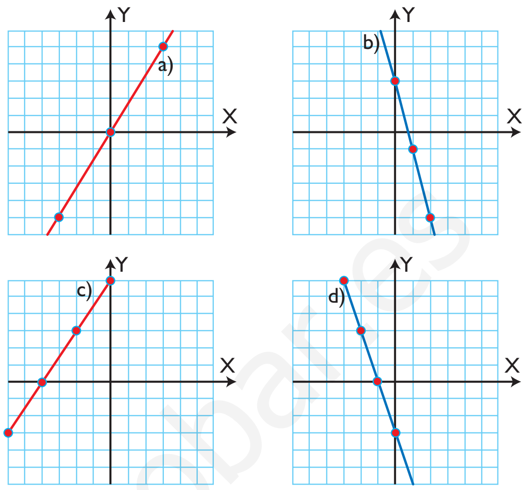


d) Función lineal.

$m = 1/4 \Rightarrow$ Creciente.



38 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:



Solución:

a) $y = \dfrac{5}{3}x$

b) $y = -4x + 3$

c) $y = \dfrac{3}{2}x + 6$

d) $y = -3x - 3$

39 Representa la siguiente parábola:

$y = 2x^2$

A partir de ella, representa la parábola:

$y = 2(x - 3)^2$

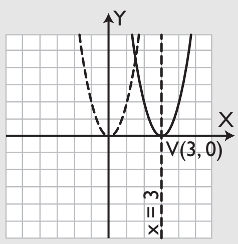
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 3$

b) V(3, 0) es un mínimo.

c) Creciente (↗): $(3, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 3)$

d) Es convexa (∪)

40 Representa la siguiente parábola: $y = -\dfrac{x^2}{4}$

A partir de ella representa la parábola:

$$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$$

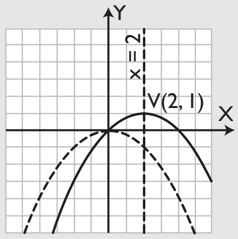
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 2$

b) $V(2, 1)$ es un máximo.

c) Creciente (↗): $(-\infty, 2)$

Decreciente (↘): $(2, +\infty)$

d) Es cóncava (∩)

41 Representa la siguiente parábola:

$$y = 3x^2 + 6x + 4$$

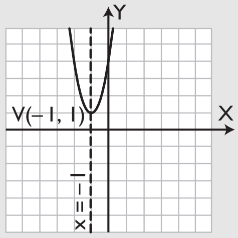
a) Halla el eje de simetría.

b) Halla las coordenadas del vértice, e indica si éste es un máximo o un mínimo.

c) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = -1$

b) $V(-1, 1)$ es un mínimo.

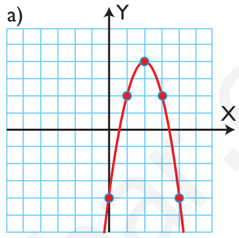
c) Creciente (↗): $(-1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1)$

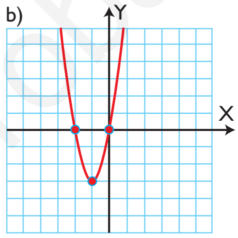
d) Es convexa (∪)

42 Halla la ecuación de las siguientes parábolas:

a)

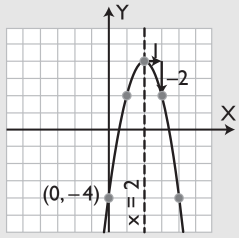


b)



Solución:

a)



$a = -2$

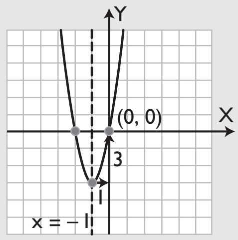
Eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 8$$

$c = -4$

$y = -2x^2 + 8x - 4$

b)



$a = 3$

Eje de simetría:

$x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

$c = 0$

$y = 3x^2 + 6x$

43 Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas con los ejes de coordenadas, representa las parábolas y comprueba el resultado.

a) $y = x^2 + 4x + 3$

b) $y = x^2 - 2x$

c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = x^2 - 2x + 2$

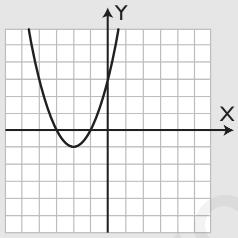
Solución:

a) Eje X:

$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$

$A(-3, 0), B(-1, 0)$

Eje Y: $C(0, 3)$

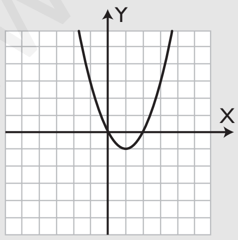


b) Eje X:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$O(0, 0), B(2, 0)$

Eje Y: $O(0, 0)$

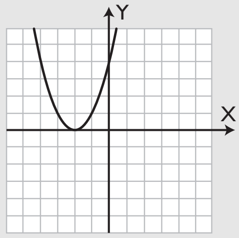


c) Eje X:

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$A(-2, 0)$

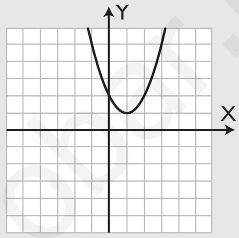
Eje Y: $B(0, 4)$



d) Eje X:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

Eje Y: $A(0, 2)$



44 Halla algebraicamente los puntos de corte de la recta y la parábola siguientes, representa las gráficas y comprueba el resultado:

$y = 2x - 5$

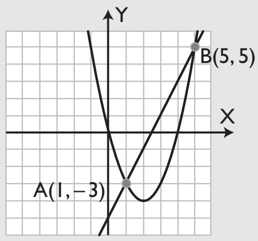
$y = x^2 - 4x$

Solución:

Se resuelve el sistema formado por la ecuación de la recta y de la parábola:

$x = 1, y = -3 \Rightarrow A(1, -3)$

$x = 5, y = 5 \Rightarrow B(5, 5)$



45 Halla algebraicamente los puntos de corte de las siguientes parábolas, representa las parábolas y comprueba el resultado:

$y = x^2 - 2x - 3$

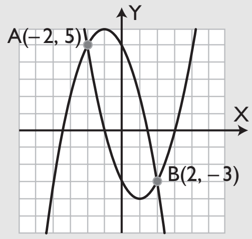
$y = -x^2 - 2x + 5$

Solución:

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos parábolas:

$x = -2, y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$

$x = 2, y = -3 \Rightarrow B(2, -3)$



Problemas

46 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas.

a) ¿Cuánto vale **c**?

b) Si la parábola pasa además por los puntos A(– 3, – 3) y B(1, 5), calcula el valor de los coeficientes **a** y **b**

c) Escribe la ecuación de la parábola.

d) Represéntala gráficamente.

Solución:

a) $c = 0$

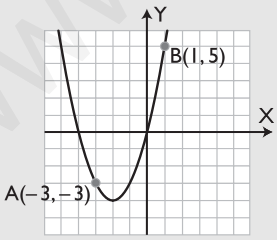
b) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 9a - 3b &= -3 \\ a + b &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$a = 1, b = 4$

c) $y = x^2 + 4x$

d)



47 Sea la parábola $y = x^2 + bx + c$

a) Calcula los valores de **b** y **c** sabiendo que pasa por los puntos A(4, 3) y B(2, – 1)

b) Escribe la ecuación de la parábola.

c) Represéntala gráficamente.

Solución:

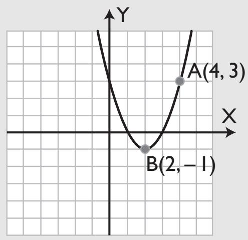
a) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 16 + 4b + c &= 3 \\ 4 + 2b + c &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$b = -4, c = 3$

b) $y = x^2 - 4x + 3$

c)



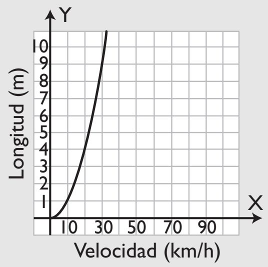
48 La distancia de seguridad que deben guardar los coches entre sí, en circulación, se recoge en la tabla siguiente:

Velocidad (km/h)	Distancia de seguridad (m)
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25
…	…

Expresa la distancia de seguridad en función de la velocidad, y representa la gráfica.

Solución:

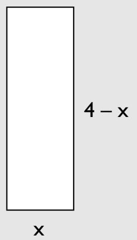
$y = \left(\dfrac{x}{10}\right)^2$



49 El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo, en función del lado **x** de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que el área se hace máxima.

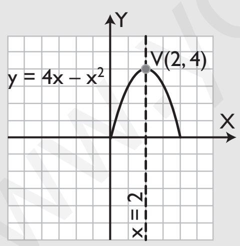
Solución:

Si el perímetro mide 8 m, la base más la altura mide 4 m



$y = x(4 - x)$

$y = 4x - x^2$

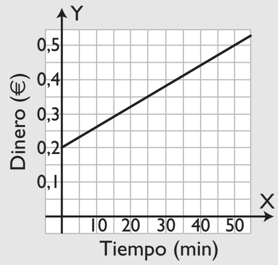


El máximo se obtiene para $x = 2$, que forma un cuadrado de área 4 m^2

50 Un servicio de telefonía cobra 0,2 € por el uso del servicio y 0,06 € por cada minuto. Escribe la fórmula de la función que expresa el dinero que se paga en función del tiempo y representa su gráfica.

Solución:

$y = 0,2 + 0,06x$



51 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a **x** € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

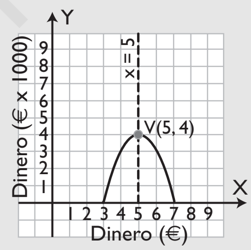
$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

a) Representa la función B(x)

b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:

a)



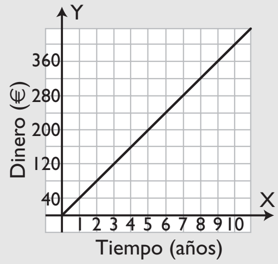
b) A 5 € la unidad, se obtiene el máximo beneficio, que es de 4 000 €

52 Se depositan 2 000 € a un 2% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

Solución:

$y = 2\,000 \cdot 0,02 \cdot x$

$y = 40x$



53 La energía cinética de un móvil de masa **m** viene dada por la siguiente fórmula:

$$E(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

donde **v** es la velocidad del móvil en m/s; **m,** la masa en kilos, y **E,** la energía en julios. Dibuja la gráfica que expresa la energía cinética en función de la velocidad de un cuerpo de 1 kg de masa. ¿Qué tipo de gráfica es?

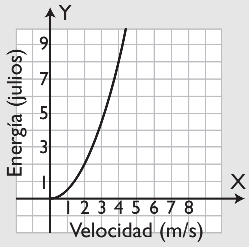
Solución:

$E = \frac{1}{2}mv^2$

Si m = 1 kg

$E = \frac{1}{2}v^2$

Velocidad (m/h)	0	1	2	3	4
Energía (julios)	0	1/2	2	9/2	8

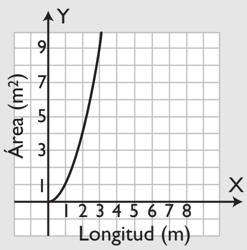


Es una parábola.

54 Halla el área de un cuadrado en función del lado **x**. Represéntala gráficamente.

Solución:

$y = x^2$



Para profundizar

55 Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en V(2, 2) y pasa por P(1, 3)

Solución:

Si el vértice es V(2, 2) y pasa por P(1, 3) ⇒ a = 1

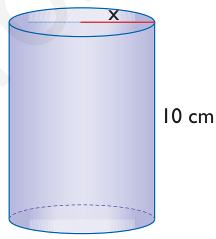
Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + 2b + c = 2 \\ 1 + b + c = 3 \end{array}\right\}$$

$b = -4, c = 6$

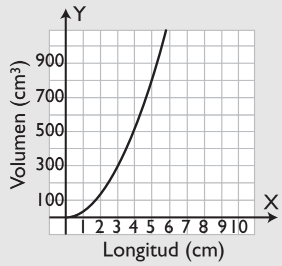
$y = x^2 - 4x + 6$

56 Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 10 cm de altura en función del radio de la base. Represéntala.



Solución:

$y = 10\pi x^2$



57 La demanda y la oferta de un determinado producto en función del precio **x** son:

Oferta: $y = \frac{1}{4}x^2$

Demanda: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

donde **x** se expresa en euros, e **y** es la cantidad ofertada o demandada.

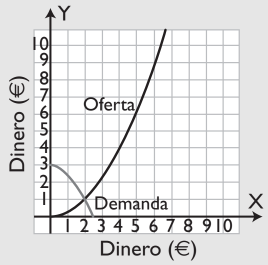
a) Halla el punto de equilibrio algebraicamente.

b) Representa las funciones y comprueba el resultado.

Solución:

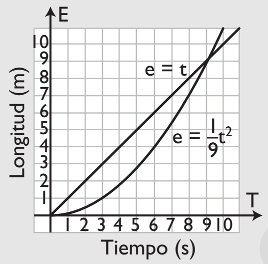
a) Se resuelve el sistema de las dos ecuaciones: $x = 2, y = 1$

b)



58 Dos móviles inician su movimiento desde un punto O. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$, y el segundo móvil, según $e = t$; donde **t** se mide en segundos, y **e,** en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado.

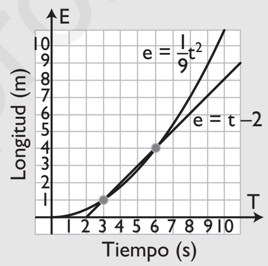
Solución:



Al principio, el 2° móvil recorre un mayor espacio en el mismo tiempo; éste se iguala a los 9 s, y a partir de los 9 s, el 1er móvil recorre un espacio mayor.

59 Dos móviles inician su movimiento desde un punto O. El primero se desplaza según la fórmula $e = \frac{1}{9}t^2$, y el segundo móvil, según $e = t$; donde **t** se mide en segundos, y **e,** en metros. Representa las gráficas de sus movimientos e interpreta el resultado sabiendo que el segundo móvil parte 2 s más tarde que el primero.

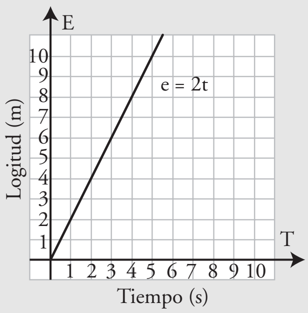
Solución:



El 2° móvil alcanza al primero a los 2 s y está por delante hasta los 6 s, cuando se vuelven a encontrar a los 4 m del recorrido. A partir de ese instante, el 1er móvil va por delante del 2°.

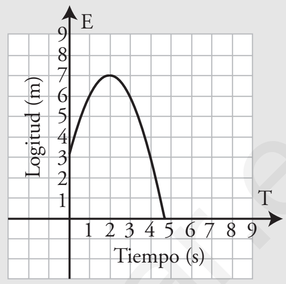
60 Un móvil se desplaza con una velocidad constante de 2 m/s. Halla la ecuación y representa la gráfica que expresa el espacio en función del tiempo.

Solución:



61 Un móvil se desplaza según la fórmula $e = -t^2 + 4t + 3$. Representa la gráfica e indica el valor del espacio inicial, la velocidad inicial y la aceleración.

Solución:



$e_0 = 3$ m

$v_0 = 4$ m/s

$a = -2$ m/s^2

Comprueba lo que sabes

1 Define función cuadrática, pon un ejemplo e indica sus características.

Solución:

Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, siendo **a, b** y **c** números reales y $\mathbf{a} \neq 0$. Su representación gráfica es una **parábola** que tiene las siguientes características:

a) Tiene un eje de simetría cuya fórmula es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

b) Corta al eje X en dos puntos, uno o ninguno, según el número de raíces reales de $ax^2 + bx + c = 0$, y corta al eje Y en el punto (0, c)

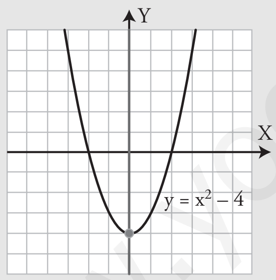
c) El vértice es un mínimo si **a > 0,** y un máximo si **a < 0;** por una parte del eje es creciente, y por la otra es decreciente.

d) Es convexa (∪) si **a > 0** y cóncava (∩) si **a < 0**

e) Al aumentar **a** en valor absoluto, se hace más estrecha.

Ejemplo

$y = x^2 - 4$



2 Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines, halla mentalmente la pendiente, indica si son crecientes o decrecientes y represéntalas:

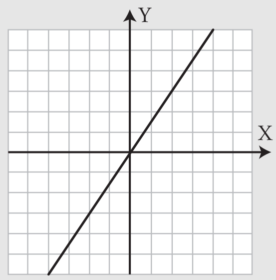
a) $y = 3x/2$

b) $y = -x/2 + 1$

Solución:

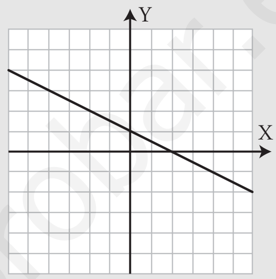
a) Función lineal.

$m = 3/2 \Rightarrow$ Creciente.

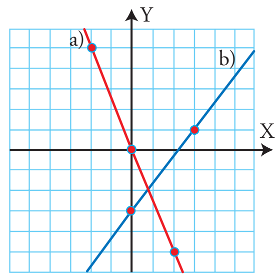


b) Función afín.

$m = -1/2 \Rightarrow$ Decreciente.

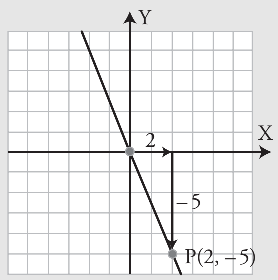


3 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas y clasifícalas.



Solución:

a)

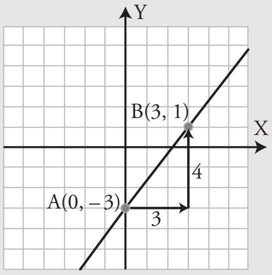


$$m = -\frac{5}{2}$$

$$y = -\frac{5}{2}x$$

Función lineal.

b)



$m = \dfrac{1 - (-3)}{3 - 0} = \dfrac{4}{3}$

$b = -3$

$y = \dfrac{4}{3}x - 3$

Función afín.

4 Representa la parábola $y = 2x^2$, y a partir de ella, dibuja la parábola:

$$y = 2(x - 1)^2 - 2$$

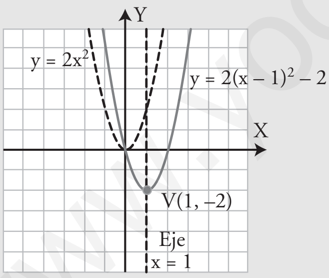
a) Halla el eje de simetría.

b) ¿Cuándo es creciente y cuándo es decreciente?

c) Halla el vértice y di si éste es un máximo o un mínimo.

d) ¿Es convexa (∪) o cóncava (∩)?

Solución:



a) $x = 1$

b) Creciente (↗): $(1, +\infty)$

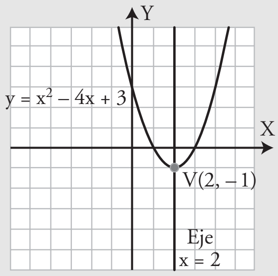
Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

c) $V(1, -2)$ es un mínimo.

d) Es convexa (∪)

5 Representa la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, halla el eje de simetría e indica si el vértice es un máximo o un mínimo.

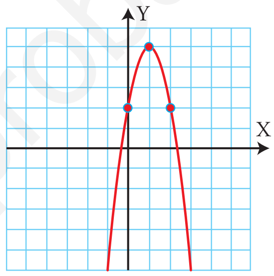
Solución:



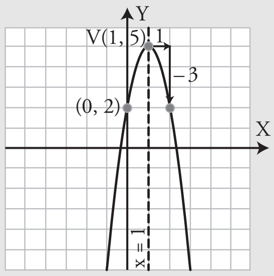
Eje de simetría: $x = 2$

$V(2, -1)$ es un mínimo.

6 Halla la fórmula de la parábola del margen.



Solución:



$a = -3$

Eje de simetría: $x = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow b = -2ax \Rightarrow b = 6$

$c = 2$

$y = -3x^2 + 6x + 2$

7 Un cristalero quiere hacer marcos rectangulares para espejos que tengan 12 m de perímetro.

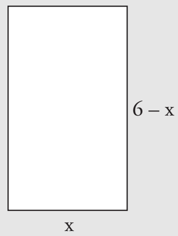
a) Escribe la fórmula que expresa el área de los rectángulos en función del lado **x**

b) Representa la gráfica.

c) ¿Para qué valor de **x** se hace máxima el área del espejo?

Solución:

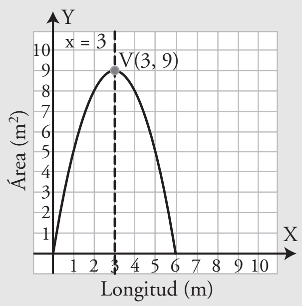
a) Si el perímetro mide 12 m, la base más la altura miden 6 m; por tanto, si la base es **x,** la altura será $6 - x$



$y = x(6 - x)$

$y = 6x - x^2$

b)

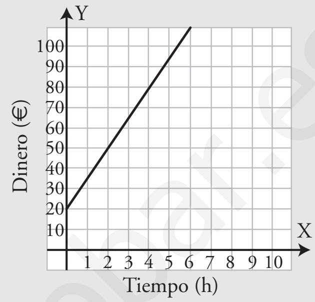


c) El máximo se alcanza cuando el rectángulo es un cuadrado de 3 m de lado y tiene un área de 9 m^2

8 Un técnico cobra 20 € por desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que calcula el dinero que cobra en función del tiempo que tarda en hacer un trabajo, y represéntala.

Solución:

$y = 15x + 20$



Paso a paso

62 Dada la función: $y = \frac{3}{2}x - 4$

clasifícala, halla su pendiente y estudia el crecimiento; calcula la ordenada en el origen. Represéntala.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

63 Representa la siguiente parábola:

$$\mathbf{y = x^2 - 2x - 4}$$

Halla el eje de simetría y dibújalo, calcula las coordenadas del vértice y di si es máximo o mínimo, halla dónde es creciente y decreciente y di si es cóncava o convexa.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Geogebra y DERIVE:

64 El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado **x** de la base. Representa la función e indica el valor del lado de la base para el que se hace máxima el área.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

65 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

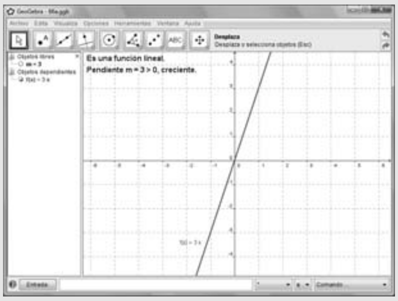
66 Dadas las funciones siguientes:

a) y = 3x b) y = – 2x c) y = 2x/3

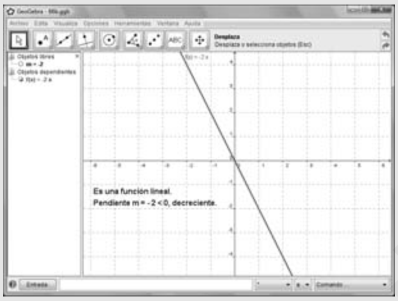
clasifícalas, halla su pendiente y estudia el crecimiento. Represéntalas.

Solución:

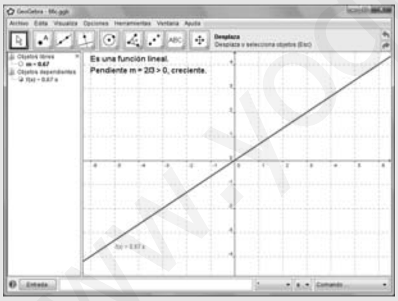
a)



b)



c)



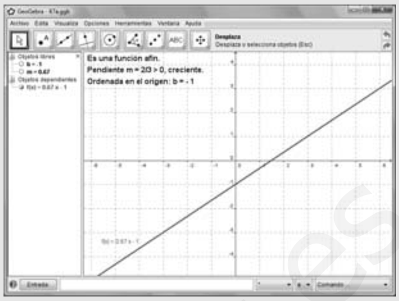
67 Dadas las funciones siguientes:

a) y = 2x/3 – 1 b) y = – 3x/4 + 2

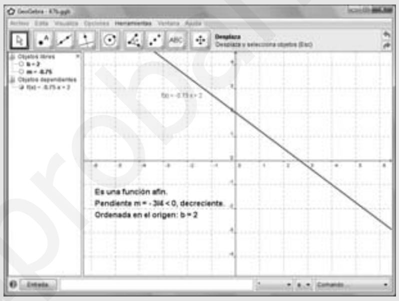
clasifícalas, halla su pendiente y estudia el crecimiento; calcula la ordenada en el origen. Represéntalas.

Solución:

a)

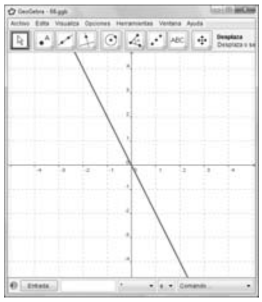


b)



Identifica las siguientes gráficas y halla mediante *ensayo-acierto* su fórmula:

68

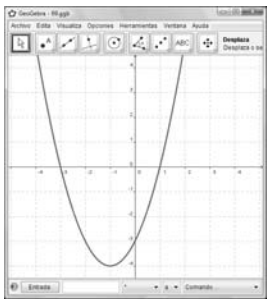


Solución:

a) Función lineal.

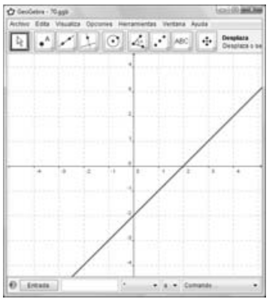
b) y = – 2x

69



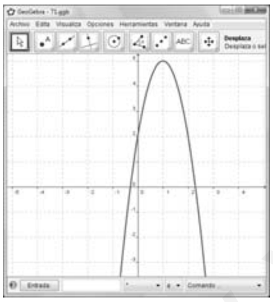
Solución:
a) Función cuadrática.
b) $y = x^2 - 2x - 3$

70



Solución:
a) Función afín.
b) $y = x - 2$

71



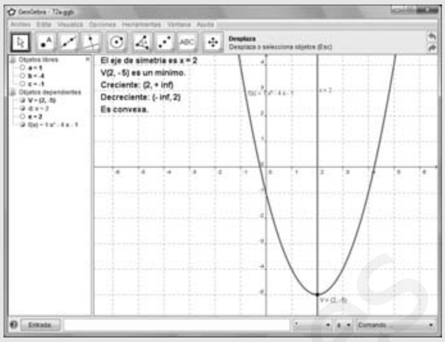
Solución:
a) Función cuadrática.
b) $y = -3x^2 + 6x + 2$

72 Halla el eje de simetría, las coordenadas del vértice indicando si es un máximo o un mínimo y representa las siguientes funciones cuadráticas:

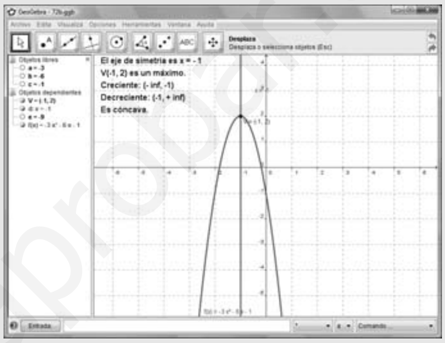
a) $y = x^2 - 4x - 1$
b) $y = -3x^2 - 6x + 2$
c) $y = x^2 + 4x + 3$
d) $y = -2x^2 + 8x - 5$

Solución:

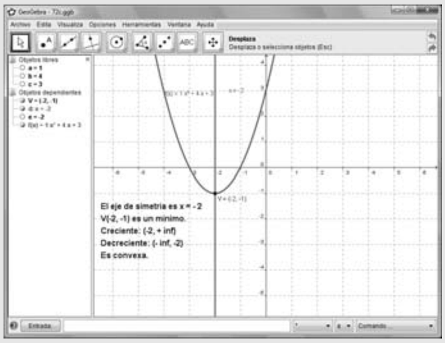
a)



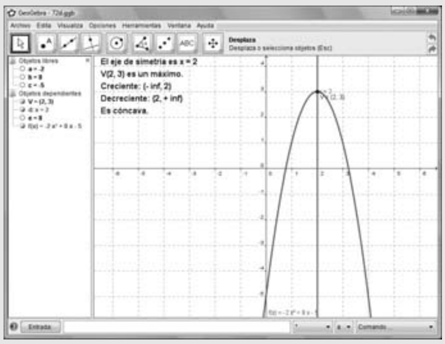
b)



c)



d)



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Geogebra o Derive:

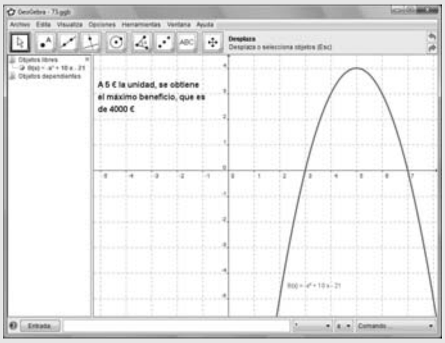
73 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a x € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula

$$B(x) = -x^2 + 10x - 21$$

a) Representa la función B(x)

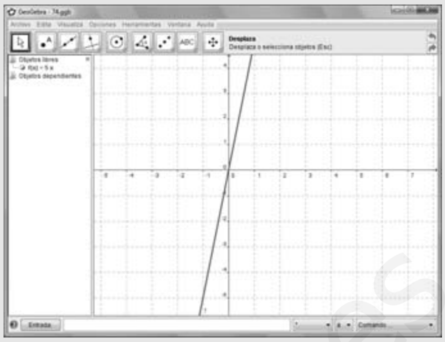
b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:



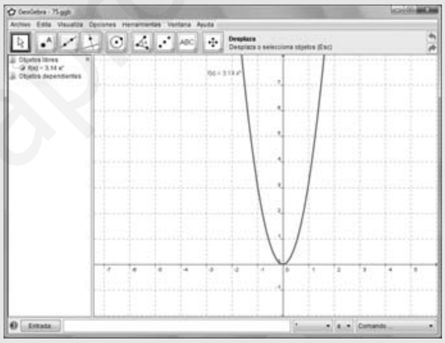
74 Se depositan 500 € a un 1% de interés simple anual. Expresa el interés en función del tiempo y representa la gráfica.

Solución:



75 Escribe la función que da el volumen de un cilindro de 1m de altura en función del radio de la base. Represéntala.

Solución:



11 Funciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas

1. Funciones racionales

PIENSA Y CALCULA

Despeja **y** de la expresión xy = 6. ¿Qué tipo de función es?

Solución:

$y = \dfrac{6}{x}$

Es una función racional que corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

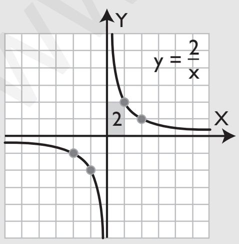
APLICA LA TEORÍA

1 Representa la gráfica de la función y = 2/x, calcula el valor de la constante de proporcionalidad e indica si ésta es creciente o decreciente.

Solución:

Tabla de valores:

x	…	–2	–1	…	1	2	…
y = 2/x	…	–1	–2	…	2	1	…



Constante de proporcionalidad

$k = 2 > 0 \Rightarrow$ decreciente

2 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

Halla:

a) su dominio.

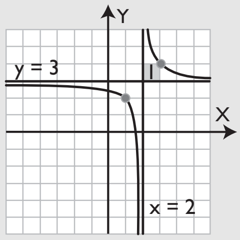
b) las ecuaciones de las asíntotas.

c) las discontinuidades.

Solución:

Haciendo la división se obtiene:

$f(x) = 3 + \dfrac{1}{x - 2}$



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

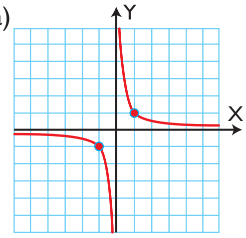
b) Asíntotas

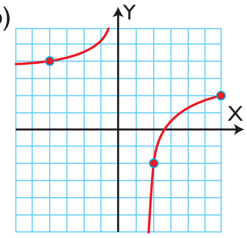
Asíntota vertical: x = 2

Asíntota horizontal: y = 3

c) Es discontinua en x = 2

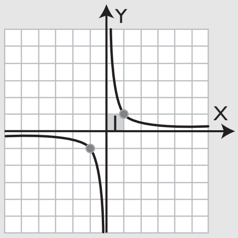
3 Halla la ecuación de las siguientes funciones:

a) 

b) 

Solución:

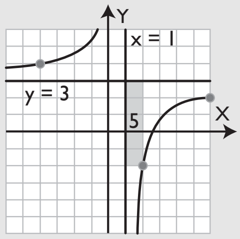
a) Se dibuja un rectángulo.



Como es decreciente **k** es positivo.

$y = \frac{1}{x}$

b) Se dibujan las asíntotas y un rectángulo.



Como es creciente **k** es negativo.

$y = 3 - \frac{5}{x - 1}$

$y = \frac{3x - 8}{x - 1}$

2. Operaciones con funciones. Funciones irracionales

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla los siguientes polinomios y calcula su suma: $(x - 3)^2 + (x + 3)(x - 3)$

Solución:

$2x^2 - 6x$

APLICA LA TEORÍA

4 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x + 5)^2$ $\qquad g(x) = (x - 5)^2$

calcula:

a) $f + g$ $\qquad$ b) $f - g$

Solución:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 + 50$

b) $(f - g)(x) = 20x$

5 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x + 1)^2$ $\qquad g(x) = (x + 1)(x - 1)$

calcula:

a) $f \cdot g$ $\qquad$ b) f/g $\qquad$ c) Dom(f/g)

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

b) $(f/g)(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

c) $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

6 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 2x + 5$ $\qquad g(x) = x^2$

calcula:

a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = (2x + 5)^2 =$
$= 4x^2 + 20x + 25$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 5$

7 Dada $f(x) = 3x + 1$, calcula f^{-1}, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

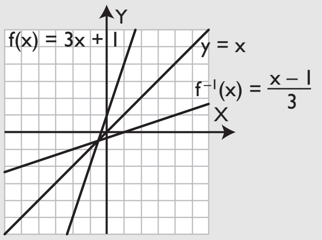
Solución:

$x = 3y + 1$

$-3y = -x + 1$

$3y = x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x - 1}{3}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{3}$



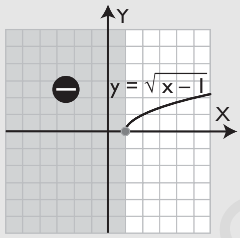
Se observa que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

8 Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x - 1}$, halla su dominio y represéntala.

Solución:

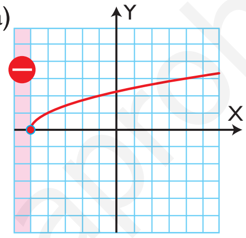
La función es irracional.

$Dom(f) = [1, +\infty)$

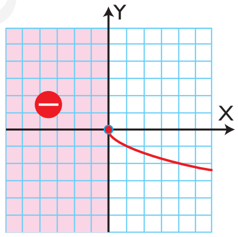


9 Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a)



b)



Solución:

a) $y = \sqrt{x + 5}$

b) $y = -\sqrt{x}$

3. Funciones exponenciales

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las 10 primeras potencias enteras positivas de 2

Solución:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024

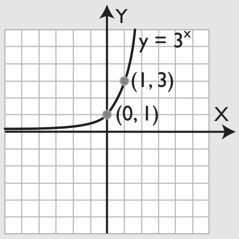
10 Representa la siguiente función:

$f(x) = 3^x$

Solución:

Tabla de valores

x	…	–2	–1	0	1	2	…
y = 3ˣ	…	1/9	1/3	1	3	9	…

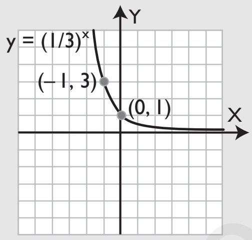


11 Representa la siguiente función:

$f(x) = (1/3)^x$

Solución:

x	…	–2	–1	0	1	2	…
y = (1/3)ˣ	…	9	3	1	1/3	1/9	…

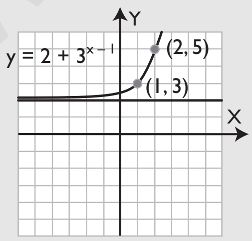


12 Representa la siguiente función:

$f(x) = 2 + 3^{x-1}$

Solución:

Es la función $y = 3^x$ trasladada 2 unidades hacia arriba y una hacia la derecha.

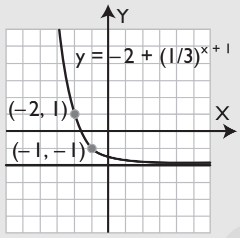


13 Representa la siguiente función:

$f(x) = -2 + (1/3)^{x+1}$

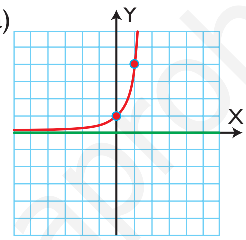
Solución:

Es la función $y = (1/3)^x$ trasladada 2 unidades hacia abajo y una hacia la izquierda.

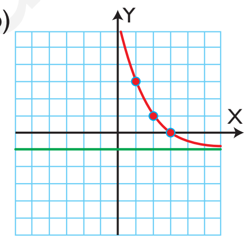


14 Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



Solución:

a) $y = 4^x$

b) $y = -1 + (1/2)^{x-3}$

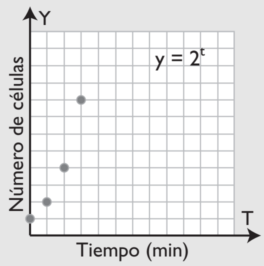
15 Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que expresa el número de células en función del tiempo, y represéntala gráficamente.

Solución:

$y = 2^t, t \geq 0$

t	0	1	2	3	4	5	…
y = 2ᵗ	1	2	4	8	16	32	…

Como no puede haber fracciones de células, será una función discreta.



4. Funciones logarítmicas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8$ b) $\log_2 1/8$ c) $\log_{1/2} 8$ d) $\log_{1/2} 1/8$ e) $\log_2 1$

Solución:

a) 3 b) – 3 c) – 3 d) 3 e) 0

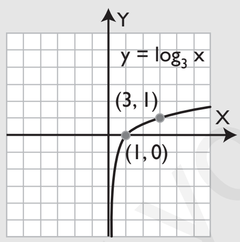
APLICA LA TEORÍA

16 Representa la siguiente función: $f(x) = \log_3 x$

Solución:

Tabla de valores

x	…	1/9	1/3	1	3	9	…
$y = \log_3 x$	…	–2	–1	0	1	2	…

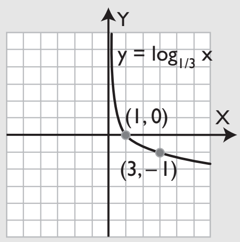


17 Representa la siguiente función: $f(x) = \log_{1/3} x$

Solución:

Tabla de valores

x	…	1/9	1/3	1	3	9	…
$y = \log_{1/3} x$	…	2	1	0	–1	–2	…

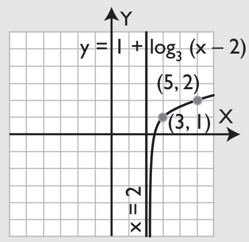


18 Representa la siguiente función:

$f(x) = 1 + \log_3 (x - 2)$

Solución:

Es la función $y = \log_3 x$ trasladada una unidad hacia arriba y dos hacia la derecha.

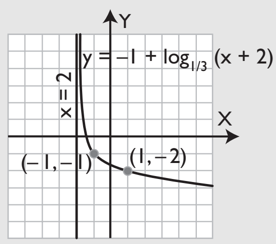


19 Representa la siguiente función:

$f(x) = -1 + \log_{1/3} (x + 2)$

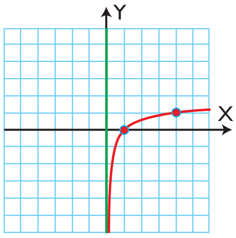
Solución:

Es la función $y = \log_{1/3} x$ trasladada una unidad hacia abajo y dos hacia la izquierda.

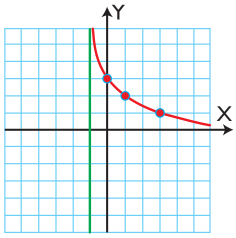


20 Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



Solución:

a) $y = \log_4 x$ b) $y = 3 + \log_{1/2} (x + 1)$

21 Halla la función inversa de $y = 3 + 2^{x-1}$. Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Se cambian las letras

$x = 3 + 2^{y-1}$

Se despeja y

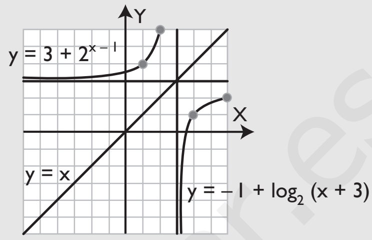
$-2^{y-1} = -x + 3$

$2^{y-1} = x - 3$

$y - 1 = \log_2 (x - 3)$

$y = 1 + \log_2 (x - 3)$

$f^{-1}(x) = 1 + \log_2 (x - 3)$



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

1. Funciones racionales

22 Representa la gráfica de la función $y = -3/x$. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad e indica si es creciente o decreciente.

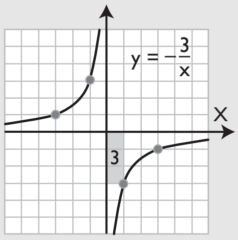
Solución:

Tabla de valores:

x	…	–3	–1	…	1	3	…
y = –3/x	…	1	3	…	–3	–1	…

Constante de proporcionalidad

$k = -3 > 0 \Rightarrow$ creciente



23 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 1}$

Halla:

a) su dominio.

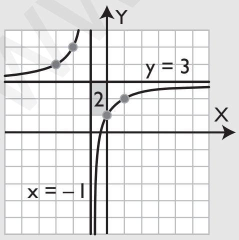
b) las ecuaciones de las asíntotas.

c) las discontinuidades.

Solución:

Haciendo la división se obtiene:

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x + 1}$$



a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

b) Asíntotas

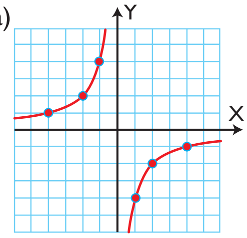
Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 3$

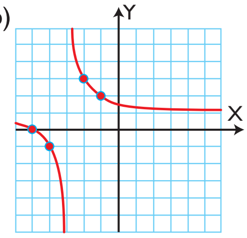
c) Es discontinua en $x = -1$

24 Halla la ecuación de las siguientes funciones:

a)

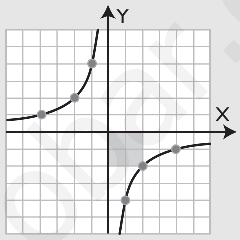


b)



Solución:

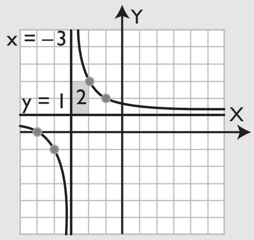
a) Se dibuja un rectángulo.



Como es creciente, **k** es negativo.

$$y = -\frac{4}{x}$$

b) Se dibujan las asíntotas y un rectángulo.



Como es decreciente, **k** es positivo.

$$y = 1 + \frac{2}{x + 3}$$

$$y = \frac{x + 5}{x + 3}$$

2. Operaciones con funciones. Funciones irracionales

25 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x - 3)^2$ $\qquad$ $g(x) = x^2 - 9$

calcula:

a) $f + g$ $\qquad$ b) $f - g$

Solución:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 - 6x$

b) $(f - g)(x) = -6x + 18$

26 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 16$ $\qquad$ $g(x) = (x + 4)^2$

calcula:

a) $f \cdot g$ $\qquad$ b) f/g $\qquad$ c) Dom(f/g)

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 + 8x^3 - 128x - 256$

b) $(f/g)(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$

c) $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$

27 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 5x - 4$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + 3x - 1$

calcula:

a) $g \circ f$ $\qquad$ b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - 4) =$

$= (5x - 4)^2 + 3(5x - 4) - 1 = 25x^2 - 25x + 3$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 1) =$

$= 5(x^2 + 3x - 1) - 4 = 5x^2 + 15x - 9$

28 Dada la siguiente función:

$f(x) = \sqrt{x + 5}$

calcula f^{-1}

Representa ambas funciones y la recta y = x. ¿Qué observas?

Solución:

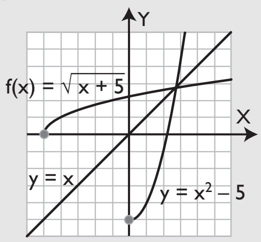
$x = \sqrt{y + 5}$

$x^2 = y + 5$

$-y = -x^2 + 5$

$y = x^2 - 5$

$f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \geq 0$



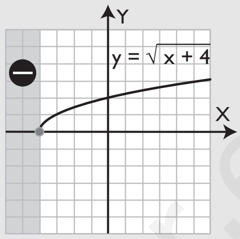
Se observa que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta y = x

29 Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x + 4}$, halla su dominio y represéntala.

Solución:

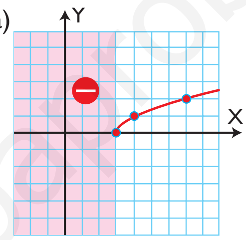
La función es irracional.

$\text{Dom}(f) = [-4, +\infty)$

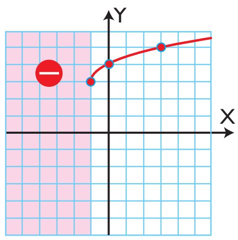


30 Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a)



b)



Solución:

a) $y = \sqrt{x - 3}$

b) $y = 3 + \sqrt{x + 1}$

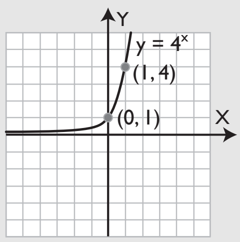
3. Funciones exponenciales

31 Representa la función $f(x) = 4^x$

Solución:

Tabla de valores

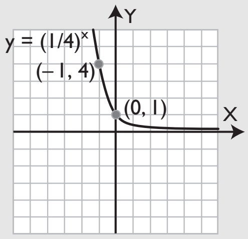
x	…	–2	–1	0	1	2	…
$y = 4^x$	…	1/16	1/4	1	4	16	…



32 Representa la función $f(x) = (1/4)^x$

Solución:

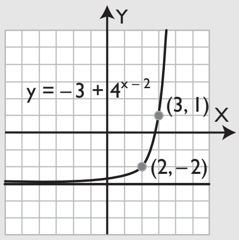
x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y = (1/4)^x$	…	16	4	1	1/4	1/16	…



33 Representa la función $f(x) = -3 + 4^{x-2}$

Solución:

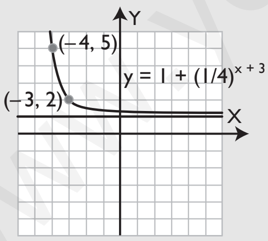
Es la función $y = 4^x$ trasladada 3 unidades hacia abajo y dos hacia la derecha.



34 Representa la función $f(x) = 1 + (1/4)^{x+3}$

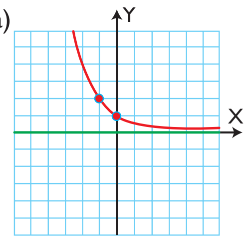
Solución:

Es la función $y = (1/4)^x$ trasladada 1 unidad hacia arriba y tres hacia la izquierda.

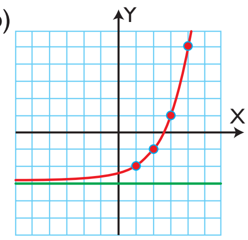


35 Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)



Solución:

a) $y = (1/2)^x$

b) $y = -3 + 2^{x-1}$

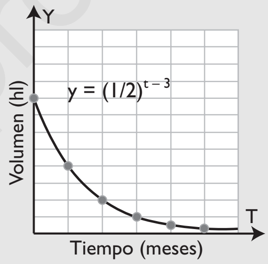
36 Un estanque contiene 8 hectolitros de agua y cada mes se gasta la mitad de su contenido. Halla la función que define la capacidad que queda en el estanque en función del tiempo y represéntala gráficamente.

Solución:

$y = (1/2)^{t-3}, t \geq 0$

t	0	1	2	3	4	5	6	…
$y = (1/2)^{t-3}$	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1

Como el agua disminuye continuamente, será una función continua.



4. Funciones logarítmicas

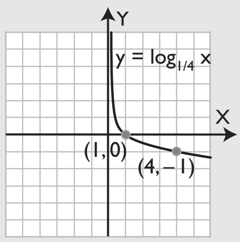
37 Representa la siguiente función:

$f(x) = \log_4 x$

Solución:

Tabla de valores

x	…	1/16	1/4	1	4	16	…
$y = \log_4 x$	…	-2	-1	0	1	2	…

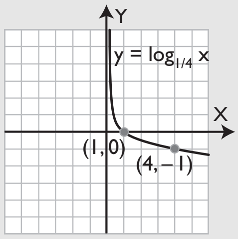


38 Representa la siguiente función:

$f(x) = \log_{1/4} x$

Solución:

x	…	1/16	1/4	1	4	16	…
$y = \log_{1/4} x$	…	2	1	0	–1	–2	…

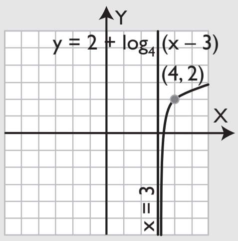


39 Representa la siguiente función:

$f(x) = 2 + \log_4 (x - 3)$

Solución:

Es la función $y = \log_4 x$ trasladada dos unidades hacia arriba y tres hacia la derecha.

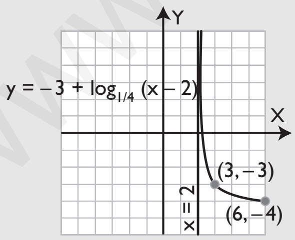


40 Representa la siguiente función:

$f(x) = -3 + \log_{1/4} (x - 2)$

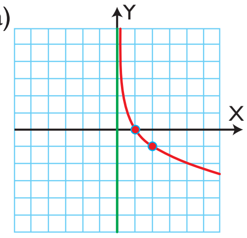
Solución:

Es la función $y = \log_{1/4} x$ trasladada tres unidades hacia abajo y dos hacia la derecha.

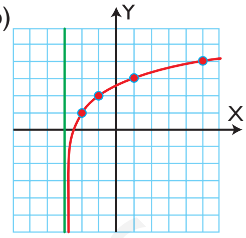


41 Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



Solución:

a) $y = \log_{1/2} x$

b) $y = 1 + \log_2 (x + 3)$

42 Halla la función inversa de $y = 3 + \log_2 (x - 1)$, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Se cambian las letras

$x = 3 + \log_2 (y - 1)$

Se despeja y

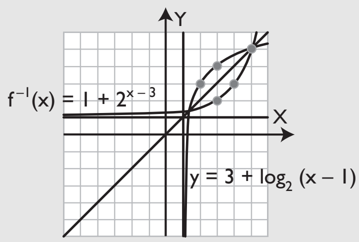
$-\log_2 (y - 1) = -x + 3$

$\log_2 (y - 1) = x - 3$

$y - 1 = 2^{x-3}$

$y = 1 + 2^{x-3}$

$f^{-1}(x) = 1 + 2^{x-3}$



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

Para ampliar

43 Halla el dominio de las funciones:

a) $y = \dfrac{2x - 7}{x - 3}$

b) $y = \sqrt{x - 2}$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = [2, +\infty)$

44 Halla el dominio de las funciones:

a) $y = 3^{x + 5}$ b) $y = \log_2 (x - 1)$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = (1, +\infty)$

45 Halla las discontinuidades de las funciones:

a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 4}$ b) $y = \dfrac{x - 5}{x + 3}$

Solución:

a) $x = 4$

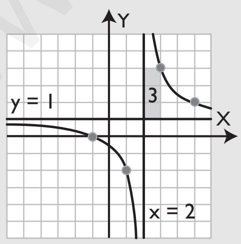
b) $x = -3$

Clasifica las siguientes funciones. Represéntalas y halla su crecimiento:

46 a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ b) $y = \sqrt{x - 2}$

Solución:

a) Función racional.

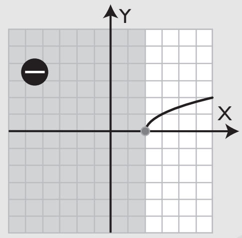


$$y = \frac{x + 1}{x - 2} \Rightarrow y = 1 + \frac{3}{x - 2}$$

Creciente (↗) : $\varnothing$

Decreciente (↘) : $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Función irracional.



Creciente (↗) : $[2, +\infty)$

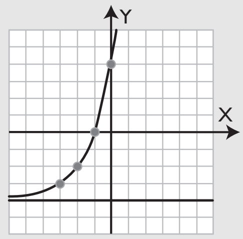
Decreciente (↘) : $\varnothing$

47 a) $y = -4 + 2^{x + 3}$

b) $y = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$

Solución:

a) Función exponencial.

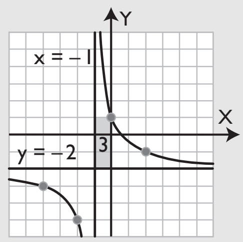


Creciente (↗) : $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (↘) : $\varnothing$

b) Función racional.

$$y = \frac{-2x + 1}{x + 1} \Rightarrow y = -2 + \frac{3}{x + 1}$$



Creciente (↗) : $\varnothing$

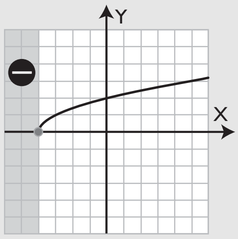
Decreciente (↘) : $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

48 a) $y = \sqrt{x + 4}$

b) $y = 3 + \log_2 (x + 2)$

Solución:

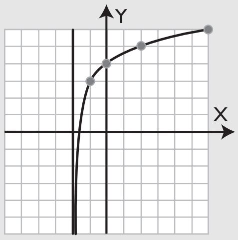
a) Función irracional.



Creciente (↗) : $[-4, +\infty)$

Decreciente (↘) : $\varnothing$

b) Función logarítmica.



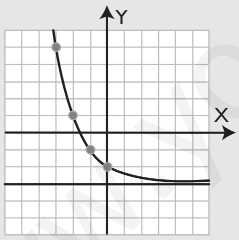
Creciente (↗) : $(-2, +\infty)$

Decreciente (↘) : $\varnothing$

49 a) $y = -3 + (1/2)^x$ b) $y = \log_{1/2}(x - 3)$

Solución:

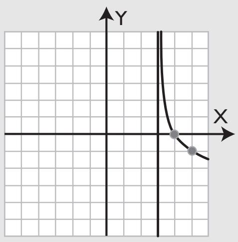
a) Función exponencial.



Creciente (↗) : $\varnothing$

Decreciente (↘) : $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Función logarítmica.



Creciente (↗) : $\varnothing$

Decreciente (↘) : $(3, +\infty)$

50 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 7x^2 - 3x$ $g(x) = -5x^2 + 6x - 1$

calcula:

a) $f + g$ b) $f - g$

Solución:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 + 3x - 1$

b) $(f - g)(x) = 12x^2 - 9x + 1$

51 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x - 7$ $g(x) = x + 7$

calcula:

a) $f \cdot g$ b) f/g c) el dominio de f/g

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = x^2 - 49$

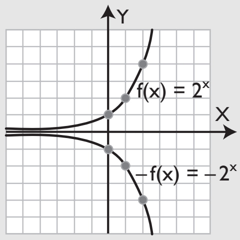
b) $(f/g)(x) = \dfrac{x - 7}{x + 7}$

c) $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-7\} = (-\infty, -7) \cup (-7, +\infty)$

52 Representa la función $f(x) = 2^x$, multiplica dicha función por -1 y represéntala en los mismos ejes coordenados. ¿Qué observas en las gráficas de ambas funciones?

Solución:

La gráfica de la función $-f(x) = -2^x$ es la simétrica de la función $f(x) = 2^x$ respecto del eje X



53 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x - 3$ $g(x) = 5x^2 + 1$

calcula: a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

Solución:

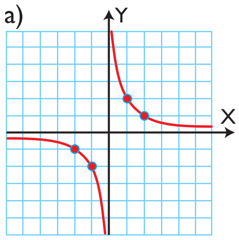
a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = 5(x - 3)^2 + 1 =$
$= 5x^2 - 30x + 46$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x^2 + 1) = 5x^2 + 1 - 3 =$
$= 5x^2 - 2$

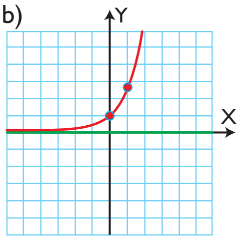
Ejercicios y problemas

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

54 a)

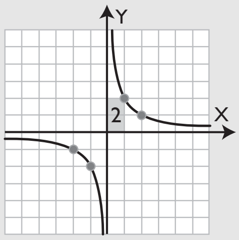


b)



Solución:

a) Función racional.

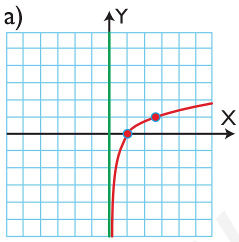


$$y = \frac{2}{x}$$

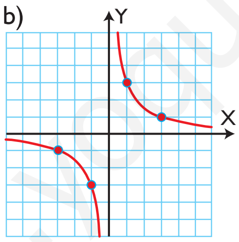
b) Función exponencial.

$y = e^x$

55 a)



b)

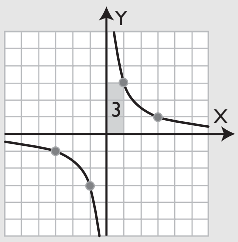


Solución:

a) Función logarítmica

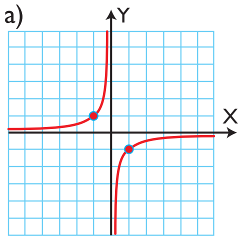
$y = L\,x$

b) Función racional.

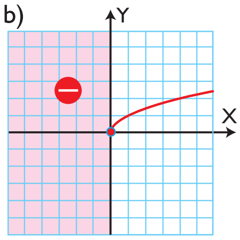


$$y = \frac{3}{x}$$

56 a)

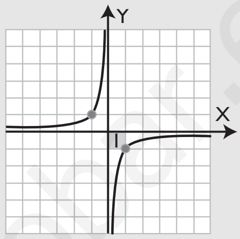


b)



Solución:

a) Función racional.

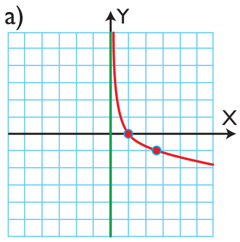


$$y = -\frac{1}{x}$$

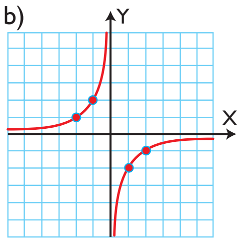
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x}$

57 a)



b)

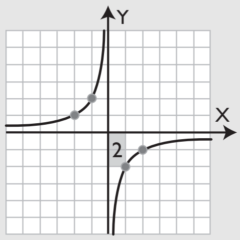


Solución:

a) Función logarítmica.

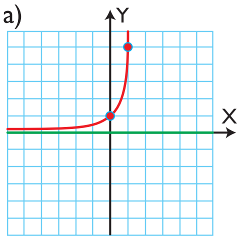
$y = \log_{1/e} x$

b) Función racional.

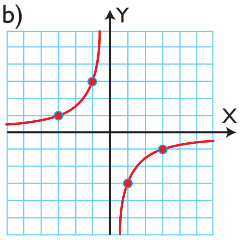


$$y = -\frac{2}{x}$$

58 a)



b)

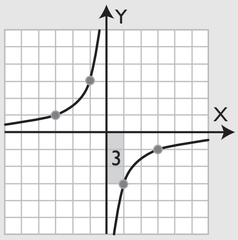


Solución:

a) Función exponencial.

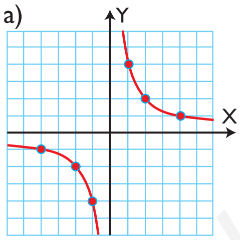
$y = 5^x$

b) Función racional.

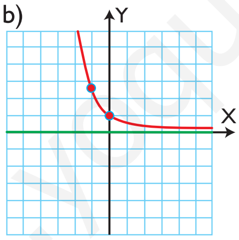


$y = -\dfrac{3}{x}$

59 a)

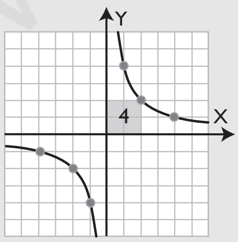


b)



Solución:

a) Función racional.

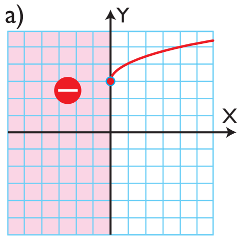


$y = \dfrac{4}{x}$

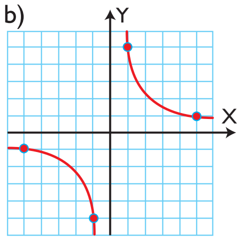
b) Función exponencial.

$y = (1/e)^x$

60 a)



b)

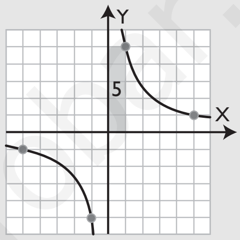


Solución:

a) Función irracional.

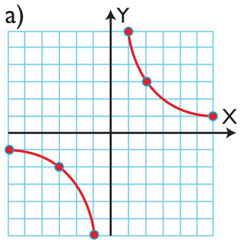
$y = 3 + \sqrt{x}$

b) Función racional.

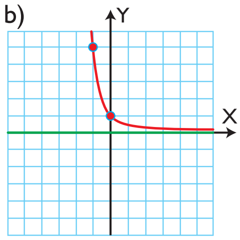


$y = \dfrac{5}{x}$

61 a)

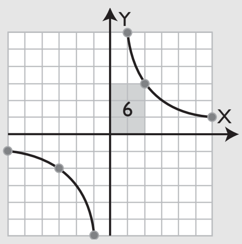


b)



Solución:

a) Función racional.

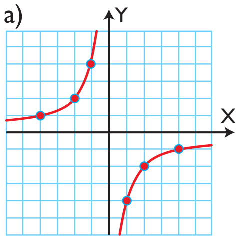


$y = \dfrac{6}{x}$

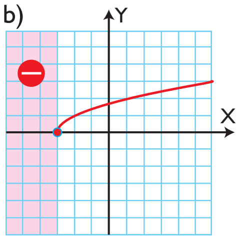
b) Función exponencial.

$y = (1/5)^x$

62 a)

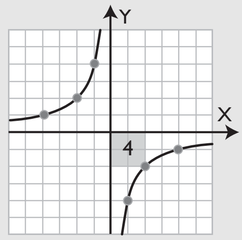


b)



Solución:

a) Función racional.



$y = -\dfrac{2}{x}$

b) Función irracional.

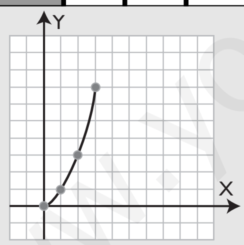
$y = \sqrt{x+3}$

Problemas

63 Un árbol crece durante los tres primeros años, según la función $y = 2^x - 1$. Representa dicha función en los tres primeros años de vida del árbol.

Solución:

x	0	1	2	3
$y = 2^x - 1$	0	1	3	7



64 Dadas las funciones:

$f(x) = x^2 + 1$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x-1}, x \ge 1$

calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 1} =$
$= \sqrt{x^2} = x$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) =$
$= (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x$

c) Que las funciones f y g son una inversa de la otra.

65 Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

calcula:

a) $f \circ f$

b) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

Solución:

a) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$

b) Que la función f es inversa de sí misma.

66 Calcula la función inversa de $f(x) = x^2 - 5$, $x \ge 0$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Solución:

$y = x^2 - 5, x \ge 0$

Se cambian las letras.

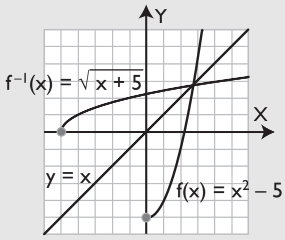
$x = y^2 - 5$

Se despeja la y

$-y^2 = -x - 5$

$y = \sqrt{x+5}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta y = x

67 Calcula la función inversa de $f(x) = \sqrt{x+1}$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta y = x. ¿Qué observas?

Solución:

$y = \sqrt{x+1}$

Se cambian las letras.

$x = \sqrt{y+1}$

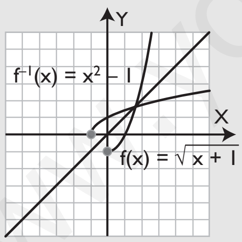
Se despeja la y

$x^2 = y + 1$

$-y = -x^2 + 1$

$y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta y = x

Representa en unos mismos ejes coordenados las siguientes funciones y luego halla los puntos de corte:

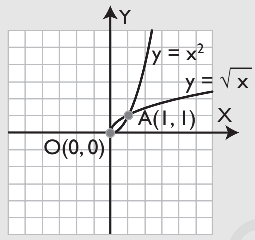
68 $y = x^2$

$y = \sqrt{x}$

Solución:

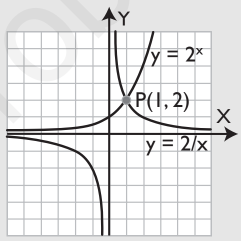
Los puntos de corte son:

O(0, 0) y A(1, 1)



69 $y = 2^x$ $\qquad$ $y = \dfrac{2}{x}$

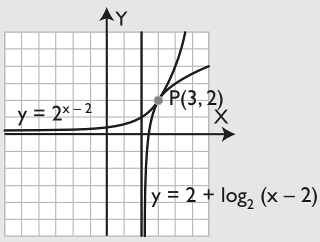
Solución:



El único punto de corte es P(1, 2)

70 $y = 2^{x-2}$ $\qquad$ $y = 2 + \log_2 (x - 2)$

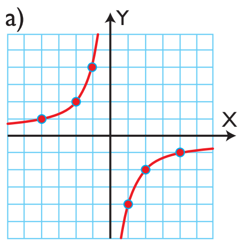
Solución:



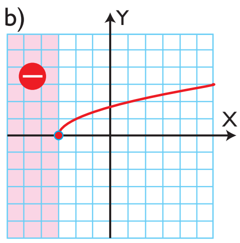
El único punto de corte es P(3, 2)

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

71 a)

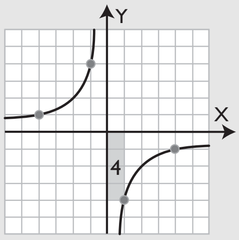


b)



Solución:

a) Función racional.

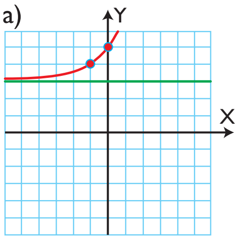


$$y = -\frac{4}{x}$$

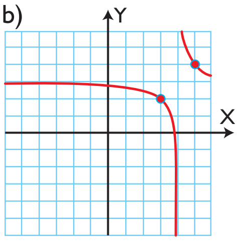
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x + 3}$

72 a)



b)

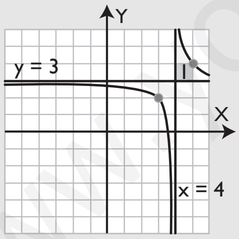


Solución:

a) Función exponencial.

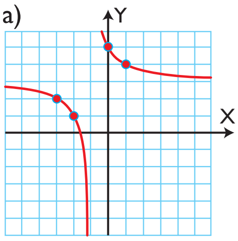
$y = 3 + 2^{x + 1}$

b) Función racional.

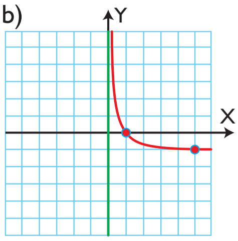


$$y = 3 + \frac{1}{x - 4} = \frac{3x - 11}{x - 4}$$

73 a)

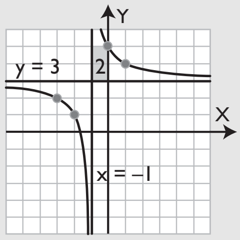


b)



Solución:

a) Función racional.

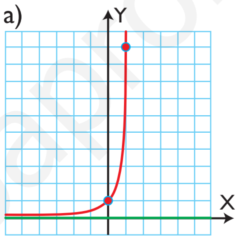


$$y = 3 + \frac{2}{x + 1} = \frac{3x + 5}{x + 1}$$

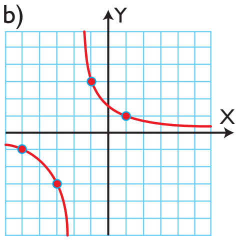
b) Función logarítmica.

$y = \log_{1/5} x$

74 a)



b)

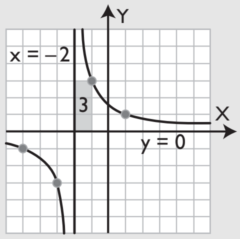


Solución:

a) Función exponencial.

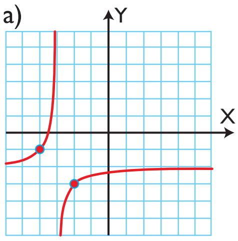
$y = 10^x$

b) Función racional.

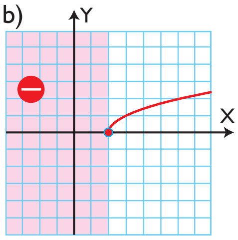


$$y = \frac{3}{x + 2}$$

75 a)

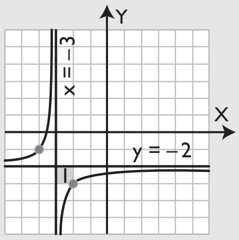


b)



Solución:

a) Función racional.

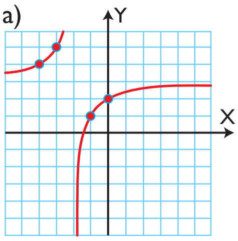


$$y = -2 - \frac{1}{x+3} = -\frac{2x+7}{x+3}$$

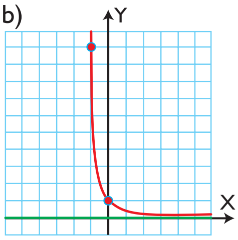
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x-2}$

76 a)

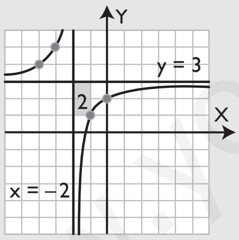


b)



Solución:

a) Función racional.

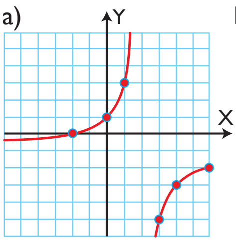


$$y = 3 - \frac{2}{x+2} = \frac{3x+4}{x+2}$$

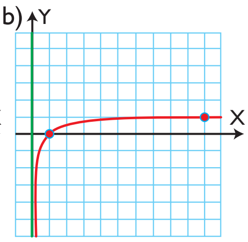
b) Función exponencial.

$y = (1/10)^x$

77 a)

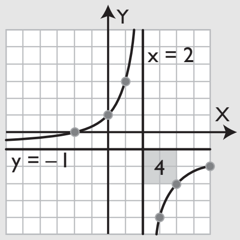


b)



Solución:

a) Función racional.

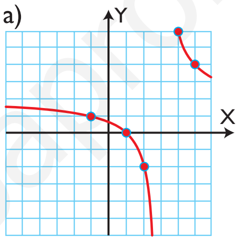


$$y = -1 - \frac{4}{x-2} = -\frac{x+2}{x-2}$$

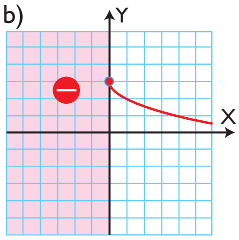
b) Función logarítmica.

$y = \log x$

78 a)

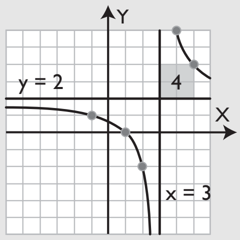


b)



Solución:

a) Función racional.

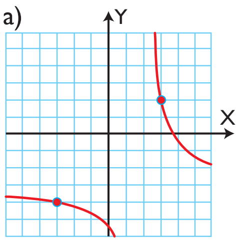


$$y = 2 + \frac{4}{x-3} = \frac{2x-2}{x-3}$$

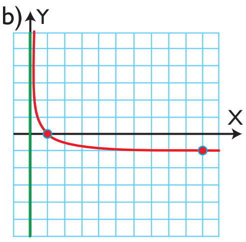
b) Función irracional.

$y = 3 - \sqrt{x}$

79 a)

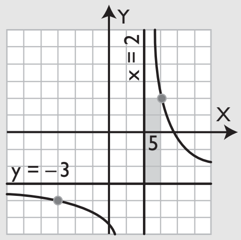


b)



Solución:

a) Función racional.



$y = -3 - \dfrac{5}{x-2} = -\dfrac{3x+1}{x-2}$

b) Función logarítmica.

$y = \log_{1/10} x$

80 En una granja hay pienso para alimentar 1 000 pollos durante 40 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de pollos. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$xy = 40\,000 \Rightarrow y = \dfrac{40\,000}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

81 Halla la función que calcula la longitud del lado de un cuadrado de área **x** m^2. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$y = \sqrt{x}$

Es una función irracional.

82 Los ingresos y gastos, en millones de euros, de una empresa en función del número de años que llevan funcionando vienen dados por:

$i(x) = 8x - x^2 \qquad g(x) = 3x$

a) Calcula la función que da los beneficios de dicha empresa.

b) ¿Cuándo empieza a ser deficitaria la empresa?

Solución:

a) $b(x) = i(x) - g(x)$

$b(x) = 5x - x^2$

b) Empieza a ser deficitaria a partir de que los beneficios sean cero.

$5x - x^2 = 0$

$x(5 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$

Para x = 0 es cuando empieza a funcionar.

A partir de los 5 años empezará a ser deficitaria.

83 Las diferencias de presiones, que aparecen al ascender por una montaña, son la causa del mal de montaña y del dolor de oídos. Se ha probado experimentalmente que la presión viene dada por la fórmula $y = 0{,}9^x$, donde **y** se mide en atmósferas, y **x,** en miles de metros.

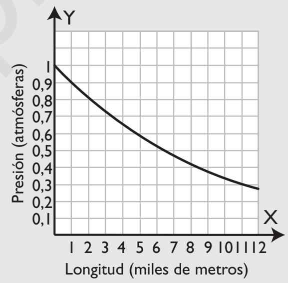
a) Representa dicha función.

b) ¿Qué presión hay a 3 000 m de altura?

c) ¿A qué altura tendremos que ascender para que la presión sea de 0,59 atmósferas?

Solución:

a) Gráfica



b) $y = 0{,}9^3 = 0{,}729$ atmósferas.

c) $0{,}9^x = 0{,}59$

$x \log 0{,}9 = \log 0{,}59$

$x = \dfrac{\log 0{,}59}{\log 0{,}9} = 5$

Altura = 5 000 m

84 La bacteria *Eberthella typhosa* se reproduce por bipartición cada hora. Si partimos de un millón de bacterias, calcula:

a) la función que expresa el número de bacterias en función del tiempo.

b) cuántas bacterias habrá al cabo de 24 horas. Da el resultado en notación científica.

c) qué tiempo tiene que transcurrir para tener 1 024 millones de bacterias.

Solución:

a) $y = 10^6 \cdot 2^x$

b) $y = 10^6 \cdot 2^{24} = 1{,}6777216 \cdot 10^{13}$

c) $10^6 \cdot 2^x = 1\,024 \cdot 10^6$

$2^x = 1\,024$

$2^x = 2^{10}$

$x = 10$ horas.

85 Un barco de vela deportivo cuesta un millón de euros. Si se devalúa un 18% anualmente, calcula:

a) la función que expresa el valor en función del número de años.

b) el valor que tendrá al cabo de 10 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que valga la mitad del precio inicial.

Solución:

a) $y = 10^6 \cdot 0{,}82^x$

b) $y = 10^6 \cdot 0{,}82^{10} = 137\,448$ €

c) $10^6 \cdot 0{,}82^x = 0{,}5 \cdot 10^6$

$0{,}82^x = 0{,}5$

$x \log 0{,}82 = \log 0{,}5$

$x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}82} = 3{,}49$ años

Aproximadamente 3 años y medio.

86 El alquiler de un piso es de 500 € mensuales. Si en el contrato se hace constar que se subirá un 3% anual, calcula:

a) la función que expresa el precio del alquiler en función del número de años.

b) el precio del alquiler al cabo de 10 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el alquiler.

Solución:

a) $y = 500 \cdot 1{,}03^x$

b) $y = 500 \cdot 1{,}03^{10} = 671{,}96$ €

c) $500 \cdot 1{,}03^x = 1\,000$

$1{,}03^x = 2$

$x \log 1{,}03 = \log 2$

$x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}03} = 23{,}45$ años.

87 Un bosque tiene 5 m^3 de madera. Si el ritmo de crecimiento es de un 10% al año, calcula:

a) la función que expresa el volumen de madera en función del número de años.

b) el volumen que tendrá al cabo de 15 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que se triplique el volumen.

Solución:

a) $y = 5 \cdot 1{,}1^x$

b) $y = 5 \cdot 1{,}1^{15} = 20{,}89\ m^3$

c) $5 \cdot 1{,}1^x = 15$

$1{,}1^x = 3$

$x \log 1{,}1 = \log 3$

$x = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}1} = 11{,}53$ años.

Para profundizar

88 Calcula la función inversa de $f(x) = e^x$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

$y = e^x$

Se cambian las letras.

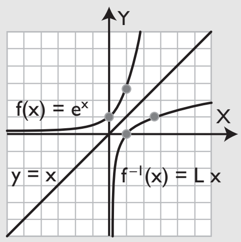
$x = e^y$

Se despeja la y

$e^y = x$

$y = L\,x$

$f^{-1}(x) = L\,x$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$

89 Calcula la función inversa de $f(x) = \dfrac{4}{x}$. ¿Qué puedes afirmar viendo el resultado que has obtenido?

Solución:

$y = \dfrac{4}{x}$

Se cambian las letras.

$x = \dfrac{4}{y}$

Se despeja la y

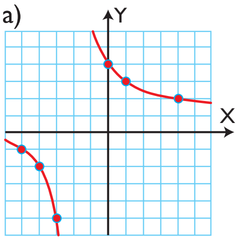
$y = \dfrac{4}{x}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$

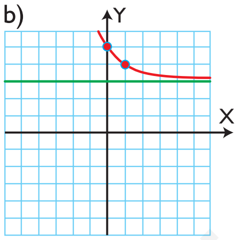
Se puede afirmar que dicha función coincide con su inversa.

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

90 a)

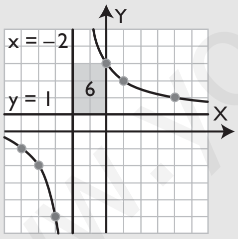


b)



Solución:

a) Función racional.

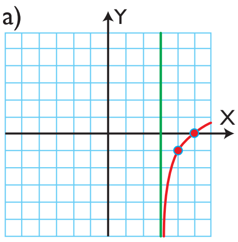


$$y = 1 + \frac{6}{x+2} = \frac{x+8}{x+2}$$

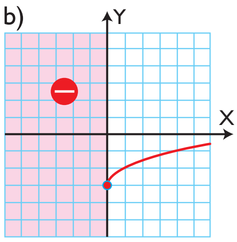
b) Función exponencial.

$y = 3 + (1/2)^{x-1}$

91 a)



b)



Solución:

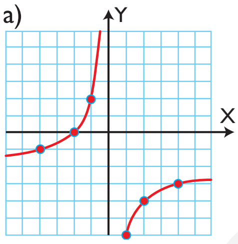
a) Función logarítmica.

$y = -1 + \log_2 (x - 3)$

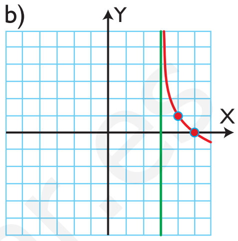
b) Función irracional.

$y = -3 + \sqrt{x}$

92 a)

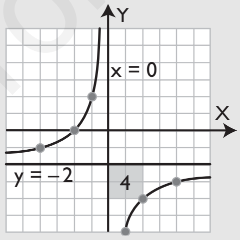


b)



Solución:

a) Función racional.

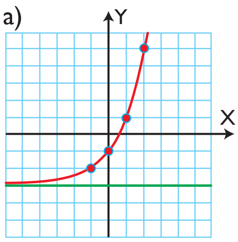


$$y = -2 - \frac{4}{x} = -\frac{2x+4}{x}$$

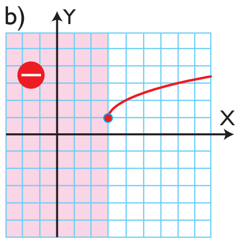
b) Función logarítmica.

$y = 1 + \log_{1/2} (x - 3)$

93 a)



b)



Solución:

a) Función exponencial.

$y = -3 + 2^{x+1}$

b) Función irracional.

$y = 1 + \sqrt{x-3}$

94 Para recolectar las fresas de una huerta, 20 trabajadores tardan 5 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de trabajadores. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$xy = 100$

$y = \dfrac{100}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

95 Halla la función que calcula la longitud del radio de un círculo de área **x** m^2. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$\pi R^2 = x$

$R^2 = x/\pi$

$R = \sqrt{x/\pi}$

$f(x) = \sqrt{x/\pi}$

Función irracional.

96 Se define el período radioactivo como el tiempo necesario para que la mitad de los átomos de un isótopo se hayan desintegrado, emitiendo radiaciones. El actinio tiene un período de desintegración de 30 años. Escribe la función que calcula la cantidad de actinio en función del número de años. Si tenemos inicialmente 25 g de actinio, al cabo de 150 años ¿cuánto actinio tendremos?

Solución:

$y = 25 \cdot (1/2)^{t/30}$

$y = 25 \cdot (1/2)^{150/30} = 0{,}78$ g

97 Un capital de 30 000 € se deposita en un banco a interés compuesto del 5%. Calcula:

a) la función que expresa el valor del capital en función del número de años.

b) el valor que tendrá al cabo de 15 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el capital inicial.

Solución:

a) $C = 30\,000 \cdot 1{,}05^t$

b) $C = 30\,000 \cdot 1{,}05^{15} = 62\,368$ €

c) $30\,000 \cdot 1{,}05^t = 60\,000$

$1{,}05^t = 2$

$t \log 1{,}05 = \log 2$

$t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}2$ años.

Aplica tus competencias

98 Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, y clasifícala.

Solución:
PV = k

$P = \dfrac{k}{V}$

Es una función racional; es de proporcionalidad inversa.

99 Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, sabiendo que para una determinada cantidad de gas P = 3 atmósferas, V = 4 litros. Represéntala gráficamente.

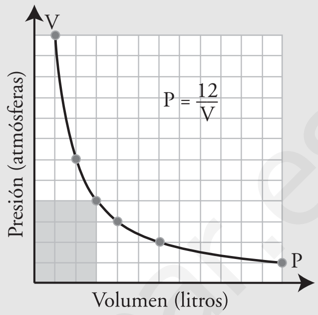
Solución:
PV = 12

$P = \dfrac{12}{V}$

Tabla de valores:

V	1	2	3	4	6	12
P	12	6	4	3	2	1

Gráfica:



Comprueba lo que sabes

1 Define función exponencial y pon un ejemplo.

Solución:

Una **función es exponencial** si la variable independiente está en el exponente. Es de la forma:

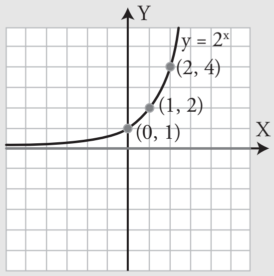
$$f(x) = a^x \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \pi 1$$

Ejemplo:

Representa la función $f(x) = 2^x$

Se hace una tabla de valores:

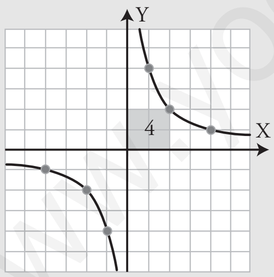
x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
$y = 2^x$	…	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	…



2 Clasifica y representa la función $y = 4/x$, calcula el valor de la constante de proporcionalidad, indica si la función es creciente o decreciente y di si es continua.

Solución:

Es una función racional.



$k = 4 > 0 \Rightarrow$ decreciente.

Es discontinua en $x = 0$

3 Halla la función inversa de $f(x) = x^2 - 1$, $x \geq 0$. Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Solución:

Se cambian las letras.

$x = y^2 - 1$

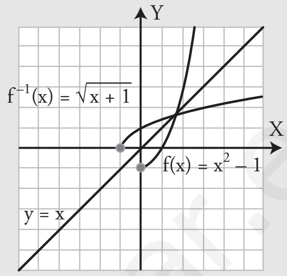
Se despeja la **y**

$-y^2 = -x - 1$

$y^2 = x + 1$

$y = \sqrt{x + 1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$



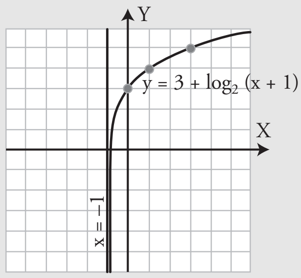
Ambas son simétricas respecto de la recta $y = x$

4 Clasifica, halla el dominio y representa la función $f(x) = 3 + \log_2 (x + 1)$

Solución:

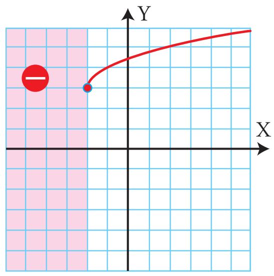
Es una función logarítmica.

$\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$

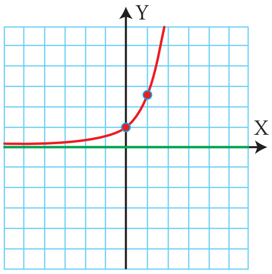


5 Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)



Solución:

a) Función irracional.

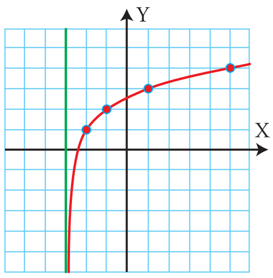
$y = 3 + \sqrt{x + 2}$

b) Función exponencial.

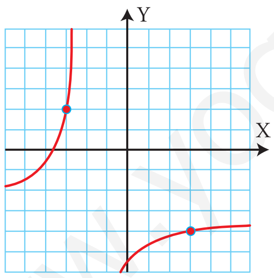
$y = e^x$

6 Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)

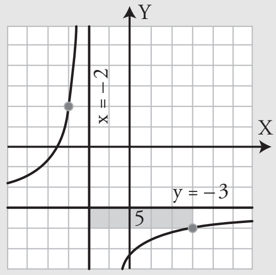


Solución:

a) Función logarítmica.

$y = 1 + \log_2 (x + 3)$

b) Función racional.



$$y = -3 - \frac{5}{x + 2} = -\frac{3x + 11}{x + 2}$$

7 Para hacer la revista del centro, 8 alumnos tardan 6 días. Calcula la función que expresa el número de días en función del número de alumnos. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$xy = 48 \Rightarrow y = \dfrac{48}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

8 Una ciudad tiene un índice de crecimiento de población del 0,5%. Si en el año 2000 tenía 3 millones de habitantes, escribe la función que calcula la población en función del número de años. ¿Cuántos habitantes tendrá en el año 2050?

Solución:

$P = 3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^{t - 2000}$

$P = 3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^{50} = 3{,}849677 \cdot 10^6 =$

$= 3\,849\,677$ habitantes.

Paso a paso

100 Dada la función: $y = 1 + \dfrac{2}{x - 3}$
clasifícala. Represéntala. Descríbela como traslación. Halla y representa las asíntotas. Halla el dominio, las discontinuidades y el crecimiento.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

101 Representa en los mismos ejes las funciones:
$y = 2^x$ $y = \log_2 x$ $y = x$
¿Qué observas?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

102 Clasifica la siguiente función dada por su gráfica y mediante *ensayo-acierto* halla su fórmula o ecuación:

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

103 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

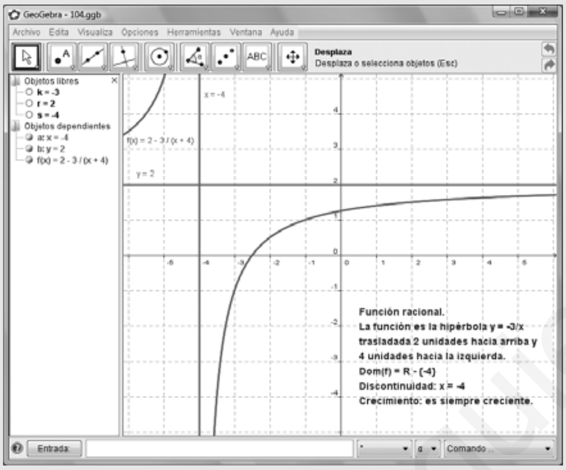
Practica

104 Dada la función:

$$y = 2 + \frac{-3}{x+4}$$

a) clasifícala.
b) represéntala.
c) descríbela como traslación.
d) halla y representa las asíntotas.
e) halla el dominio.
f) halla las discontinuidades.
g) halla el crecimiento.

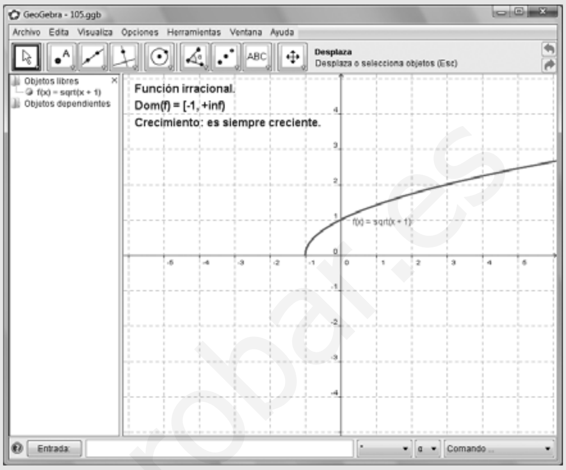
Solución:



Dadas las siguientes funciones:
a) clasifícalas.
b) represéntalas.
c) halla el dominio.
d) halla el crecimiento.

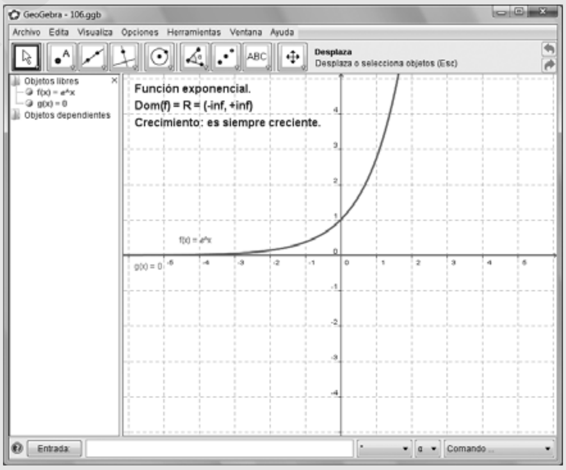
105 $y = \sqrt{x+1}$

Solución:



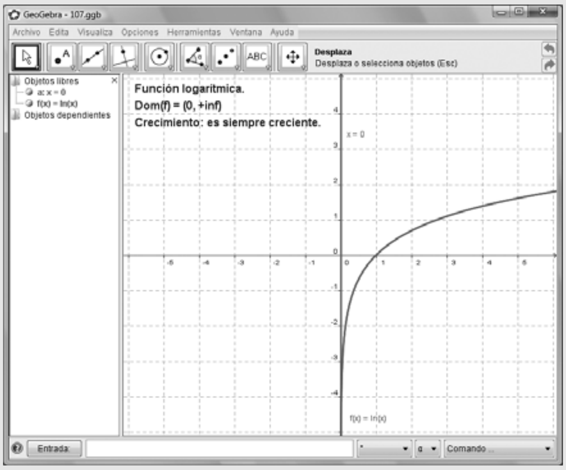
106 $y = e^x$

Solución:



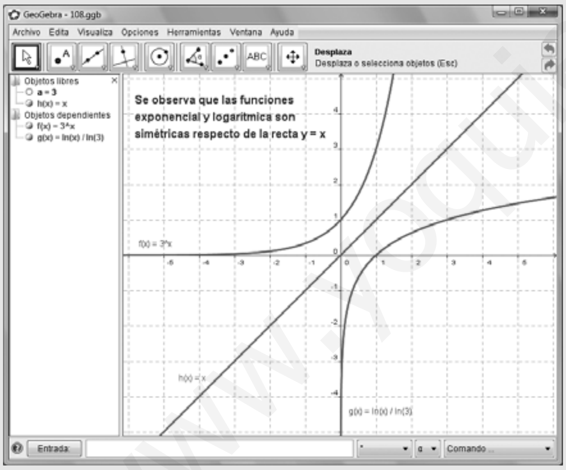
107 $y = \log_2 x$

Solución:



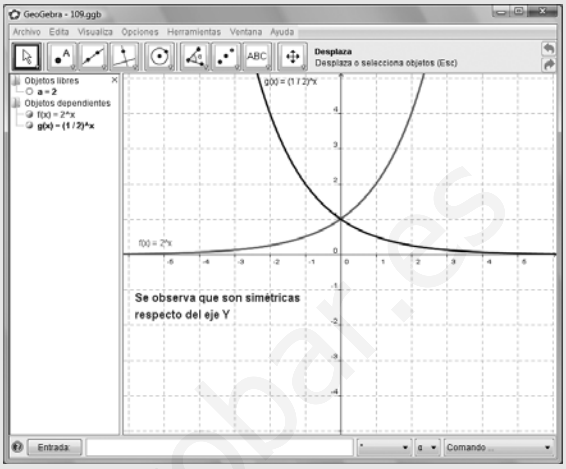
108 Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = 3^x$, $y = \log_3 x$, $y = x$. ¿Qué observas?

Solución:



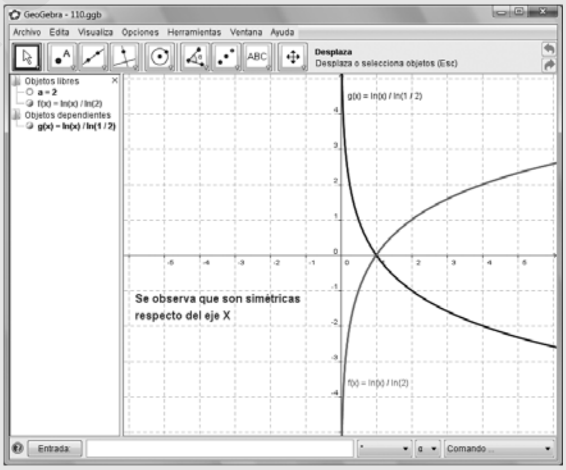
109 Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$. ¿Qué observas?

Solución:



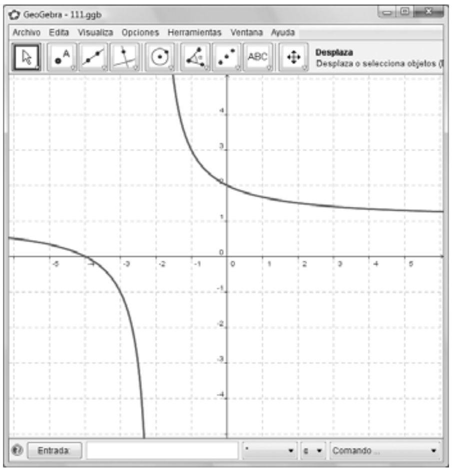
110 Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = \log_2 x$, $y = \log_{1/2} x$. ¿Qué observas?

Solución:



Clasifica y halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

111

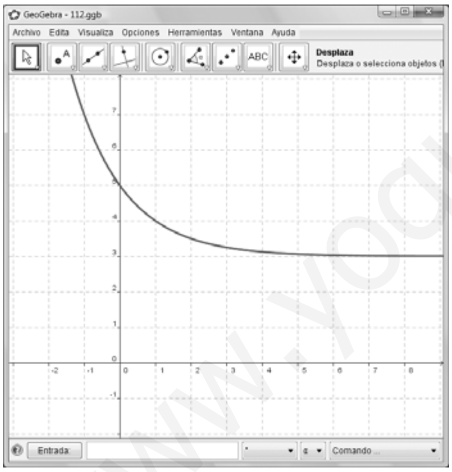


Solución:

a) Función racional.

b) $y = 1 + \dfrac{2}{x + 2}$

112

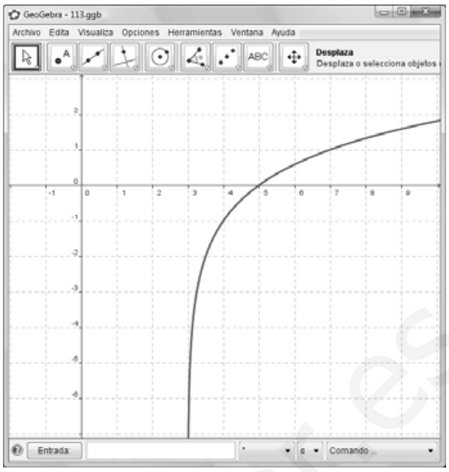


Solución:

a) Función exponencial.

b) $y = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$

113

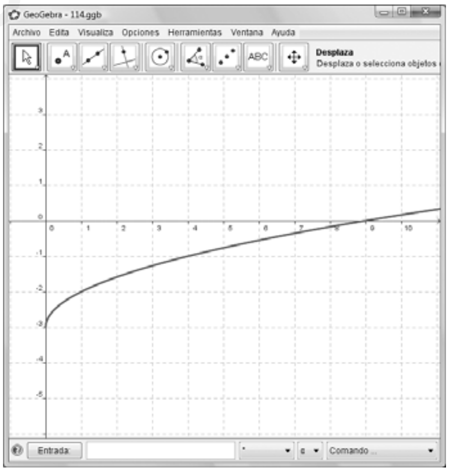


Solución:

a) Función logarítmica.

b) $y = -1 + \log_2 (x - 3)$

114



Solución:

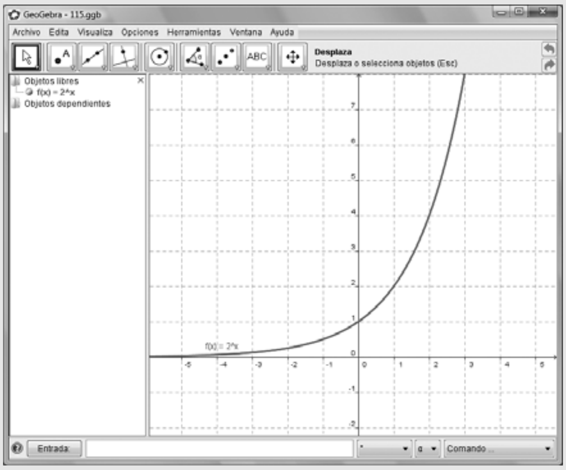
a) Función irracional.

b) $y = -3 + \sqrt{x}$

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Geogebra o Derive:

115 Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que define el número de células y represéntala gráficamente.

Solución:



12 Límites y derivadas

1. Funciones especiales

PIENSA Y CALCULA

Completa la tabla siguiente:

x	–3,6	3,6	0,8	–0,8
Ent(x)				
Dec(x)				
|x|				
Signo(x)				

Solución:

x	–3,6	3,6	0,8	–0,8
Ent(x)	–4	3	0	–1
Dec(x)	0,4	0,6	0,8	0,2
|x|	3,6	3,6	0,8	0,8
Signo(x)	–1	1	1	–1

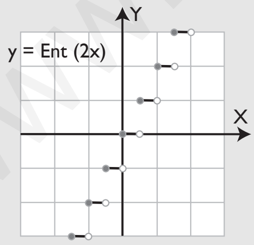
APLICA LA TEORÍA

1 Representa las siguientes funciones:

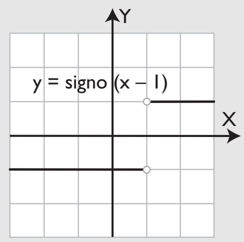
a) $y = \text{Ent}(2x)$ b) $y = \text{signo}(x - 1)$

Solución:

a)



b)

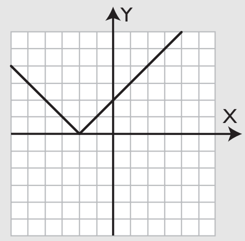


2 Representa las siguientes funciones:

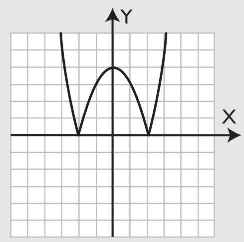
a) $y = |x + 2|$ b) $y = |-x^2 + 4|$

Solución:

a)



b)

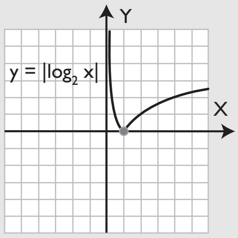


3 Representa las siguientes funciones:

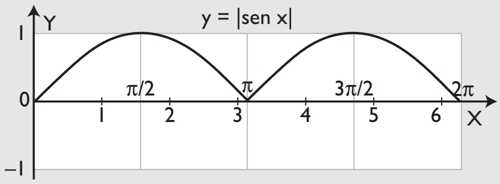
a) $y = |\log_2 x|$ b) $y = |\text{sen } x|$

Solución:

a)



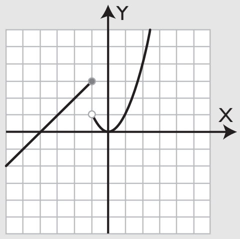
b)



4 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

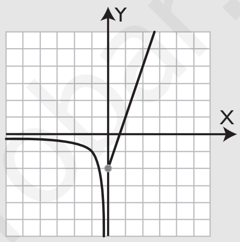
Solución:



5 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



2. Límites

PIENSA Y CALCULA

Completa la tabla y estima el valor al que tiende la función cuando **x** tiende al infinito:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…	$x \to +\infty$
y = 1/x								$y \to$

Solución:

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…	$x \to +\infty$
y = 1/x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	…	$y \to 0$

APLICA LA TEORÍA

6 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 7x^3 + x - 5) = \infty$

7 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

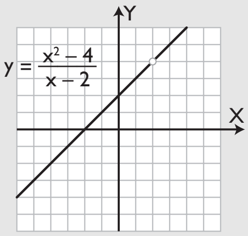
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

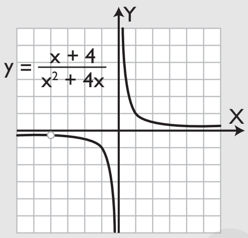
Gráfica:



b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\cancel{x + 4}}{x\cancel{(x + 4)}} =$

$= \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Gráfica:



8 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n^3 + 1}{2n^3 - 3}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4}$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5}{4n^3 - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = +\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n^3 + 1}{2n^3 - 3} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 5x}{7x^3 - 4} = -\infty$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5}{4n^3 - 3} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 + 4x}{2x^3 + 1} = \dfrac{5}{2}$

3. La derivada

PIENSA Y CALCULA

Un coche va de Asturias a Andalucía; recorre 800 km en 8 horas. ¿Cuál es su velocidad media?

Solución:

Velocidad media $= \dfrac{800}{8} = 100$ km/h

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

9 $f(x) = 3x + 1$ en $[2, 4]$

Solución:

$$TVM[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{13 - 7}{2} = 3$$

10 $f(x) = x^2 - 1$ en $[2, 3]$

Solución:

$$TVM[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{8 - 3}{1} = 5$$

11 $f(x) = \frac{2}{x}$ en $[1, 3]$

Solución:

$$TVM[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2/3 - 2}{2} = -\frac{2}{3}$$

12 $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 4]$

Solución:

$$TVM[0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

13 $f(x) = 2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = 2$

14 $f(x) = -3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = -3$

15 $f(x) = x^2$ en $x = 3$

Solución:

$f'(3) = 6$

16 $f(x) = -x^2 + 3$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = -4$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

17 $y = 3$

Solución:

$y' = 0$

18 $y = x$

Solución:

$y' = 1$

19 $y = x^2$

Solución:

$y' = 2x$

20 $y = x^5$

Solución:

$y' = 5x^4$

21 $y = x^5 + x^2 + x + 3$

Solución:

$y' = 5x^4 + 2x + 1$

22 $y = 5x^2 - 7x + 3$

Solución:

$y' = 10x - 7$

23 $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x - 4$

24 $y = (3x + 5)^4$

Solución:

$y' = 12(3x + 5)^3$

25 $y = e^x$

Solución:

$y' = e^x$

26 $y = e^{3x - 5}$

Solución:
$y' = 3e^{3x-5}$

27 $y = L\,x$

Solución:
$y' = \frac{1}{x}$

28 $y = L\,(3x - 1)$

Solución:
$y' = \frac{3}{3x-1}$

29 $y = L\,(x^2 + 5x - 6)$

Solución:
$y' = \frac{2x+5}{x^2+5x-6}$

30 $y = 7x$

Solución:
$y' = 7$

31 $y = x\,e^x$

Solución:
$y' = (x + 1)e^x$

32 $y = x\,L\,x$

Solución:
$y' = 1 + L\,x$

33 $y = e^x\,L\,x$

Solución:
$y' = e^x\,L\,x + \frac{e^x}{x}$

34 $y = \frac{e^x}{x}$

Solución:
$y' = \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}$

35 $y = \frac{2x+3}{x}$

Solución:
$y' = -\frac{3}{x^2}$

36 $y = \frac{5x-1}{3x+2}$

Solución:
$y' = \frac{13}{(3x+2)^2}$

4. Aplicaciones de la derivada

PIENSA Y CALCULA

Si la pendiente de una recta es m = 2, calcula la pendiente $m_\perp$ de cualquier recta perpendicular.

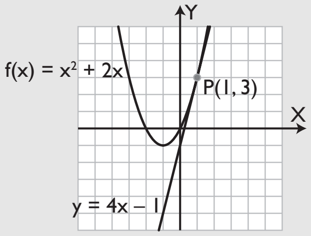
Solución:

Las pendientes son inversas y opuestas, $m_\perp = -\frac{1}{2}$

37 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x$ para $x = 1$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

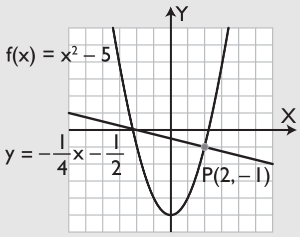
Recta tangente: $y = 4x - 1$



38 Calcula la recta normal a la curva $y = x^2 - 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

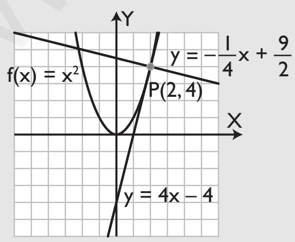


39 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 4x - 4$

Recta normal: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$



40 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 6x + 5$. Dibuja la función.

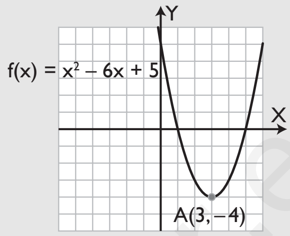
Solución:

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0, x = 3, y = -4, A(3, -4)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -4)$ mínimo relativo.



41 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 4x$. Dibuja la función.

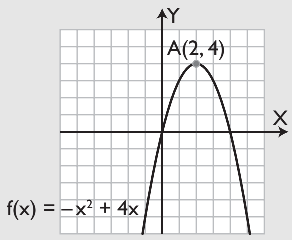
Solución:

$y' = -2x + 4$

$-2x + 4 = 0, x = 2, y = 4, A(2, 4)$

$y'' = -2$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 4)$ Máximo relativo.



42 Calcula el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x - 2$

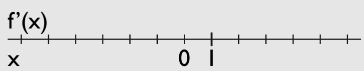
$2x - 2 = 0, x = 1, y = -4, A(1, -4)$

$y'' = 2$

$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow A(1, -4)$ mínimo relativo.

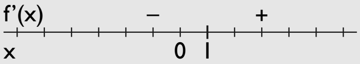
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



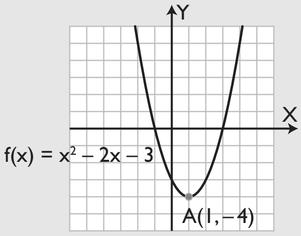
$y' = 2x - 2$

$f'(0) = -$



$(\nearrow) = (1, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 1)$



43 Halla el crecimiento de la función $y = -x^2 + 6x - 4$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = -2x + 6$

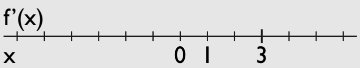
$-2x + 6 = 0, x = 3, y = 5, A(3, 5)$

$y'' = -2$

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow A(3, 5)$ Máximo relativo.

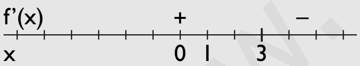
Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.



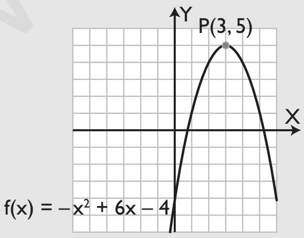
$y' = -2x + 6$

$f'(0) = +$



$(\nearrow) = (-\infty, 3)$

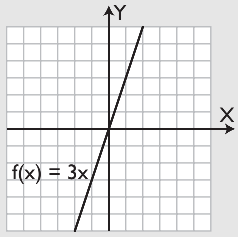
$(\searrow) = (3, +\infty)$



44 Calcula el crecimiento de la función $y = 3x$. Dibuja la función.

Solución:

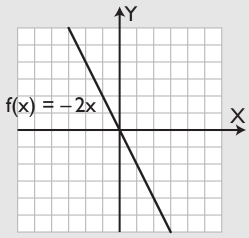
$y' = 3 > 0$, es siempre creciente.



45 Halla el crecimiento de la función $y = -2x$. Dibuja la función.

Solución:

$y' = -2 < 0$, es siempre decreciente.



46 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$

$x = 1, y = -2, A(1, -2)$

$x = -1, y = 2, B(-1, 2)$

$y'' = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2)$ Mínimo relativo.

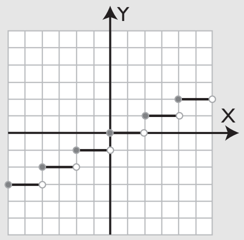
$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2)$ Máximo relativo.

Ejercicios y problemas

1. Funciones especiales

47 Representa la siguiente función: $y = \text{Ent}(x/2)$

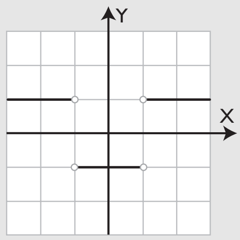
Solución:



48 Representa la siguiente función:

$$y = \text{Signo}(x^2 - 1)$$

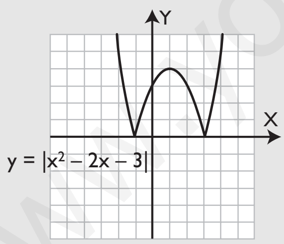
Solución:



49 Representa la siguiente función:

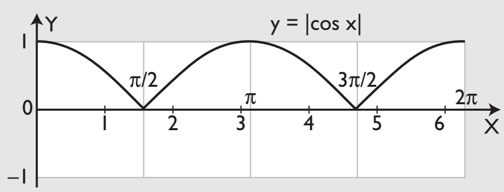
$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

Solución:



50 Representa la siguiente función en el intervalo $[0, 2\pi]$: $y = |\cos x|$

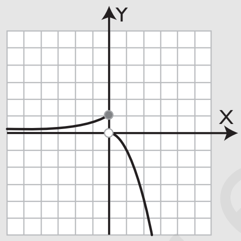
Solución:



51 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

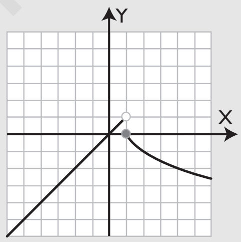
Solución:



52 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \log_{1/2} x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:



2. Límites

53 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 3)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 3) = +\infty$

54 Calcula el siguiente límite:

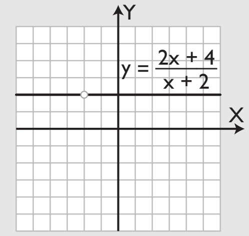
$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x + 2}$$

Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x + 4}{x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} = \lim_{x \to 2} 2 = 2$$

Gráfica:



55 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - x - 6}$$

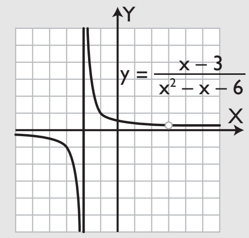
Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x - 3}}{(x + 2)\cancel{(x - 3)}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{5}$$

Gráfica:



56 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x + 7}{x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x + 7}{x^2 + 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x + 7}{x^2 + 1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x + 7}{x^2 + 1} = 0$

57 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x} = -5$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^4 - 1}{-x^4 + 2x} = -5$

58 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 5}{n^4 + 2n}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3 + n}{-n^3 - 2n}$

Solución:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 5}{n^4 + 2n} = 0$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3 + n}{-n^3 - 2n} = -1$

59 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^5 + x^2}{x^2 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^5 + x^2}{x^2 - x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^5 + x^2}{x^2 - x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^5 + x^2}{x^2 - x} = +\infty$

3. La derivada

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

60 $f(x) = 2x - 4$ en $[1, 3]$

Solución:

$$\text{TVM}[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

61 $f(x) = x^2 + 4x$ en $[0, 2]$

Solución:

$$\text{TVM}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 0}{2} = 6$$

62 $f(x) = \dfrac{6}{x}$ en $[2, 3]$

Solución:

$$TVM[2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{2 - 3}{1} = -1$$

63 $f(x) = \sqrt{x + 5}$ en $[-1, 4]$

Solución:

$$TVM[-1, 4] = \frac{f(4) - f(-1)}{4 + 1} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

64 $f(x) = 3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = 3$

65 $f(x) = -2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = -2$

66 $f(x) = x^2$ en $x = -3$

Solución:

$f'(-3) = -6$

67 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = -2$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

68 $y = 9$

Solución:

$y' = 0$

69 $y = -x^3$

Solución:

$y' = -3x^2$

70 $y = x^7$

Solución:

$y' = 7x^6$

71 $y = x^7 - x^3 + x + 9$

Solución:

$y' = 7x^6 - 3x^2 + 1$

72 $y = 3x^2 - 4x + 1$

Solución:

$y' = 6x - 4$

73 $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$

Solución:

$y' = 3x^2 - 10x + 3$

74 $y = (2x - 3)^5$

Solución:

$y' = 10(2x - 3)^4$

75 $y = e^{-2x + 3}$

Solución:

$y' = -2e^{-2x + 3}$

76 $y = L\,(5x + 2)$

Solución:

$$y' = \frac{5}{5x + 2}$$

77 $y = L\,(x^2 - 3x + 1)$

Solución:

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

78 $y = 9x$

Solución:

$y' = 9$

79 $y = (x + 1)\,e^x$

Solución:

$y' = (x + 2)\,e^x$

80 $y = x\,L\,(x - 5)$

Solución:

$y' = L\,(x - 5) + \dfrac{x}{x - 5}$

81 $y = e^{3x}\,L\,x$

Solución:

$y' = 3e^{3x}\,L\,x + \dfrac{e^{3x}}{x}$

82 $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{(2x - 1)\,e^{2x}}{x^2}$

83 $y = \dfrac{x}{x - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$

84 $y = \dfrac{3x + 5}{2x - 1}$

Solución:

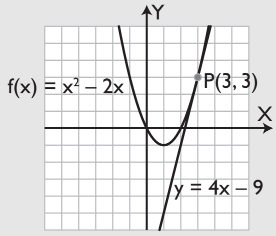
$y' = \dfrac{-13}{(2x - 1)^2}$

4. Aplicaciones de la derivada

85 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ para $x = 3$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

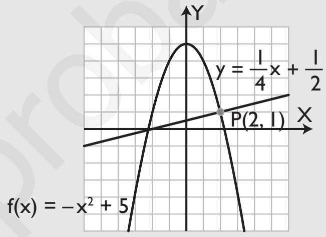
Recta tangente: $y = 4x - 9$



86 Calcula la recta normal a la curva $y = -x^2 + 5$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

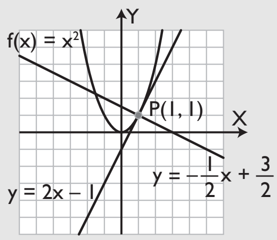


87 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 1$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 2x - 1$

Recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$



88 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x$. Dibuja la función.

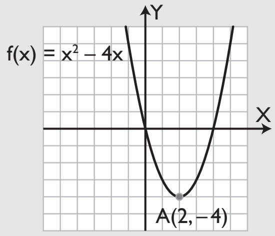
Solución:

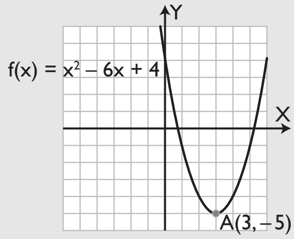
$y' = 2x - 4$

$2x - 4 = 0, x = 2, y = -4, A(2, -4)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -4)$ mínimo relativo.





89 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 + 6x - 5$. Dibuja la función.

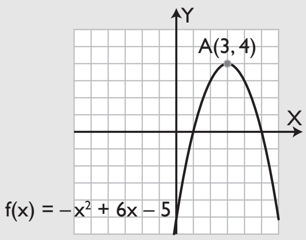
Solución:

$y' = -2x + 6$

$-2x + 6 = 0, x = 3, y = 4, A(3, 4)$

$y'' = -2$

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow P(3,\ 4)$ Máximo relativo.



90 Calcula el crecimiento de la función siguiente: $y = x^2 - 6x + 4$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0, x = 3, y = -5, A(3, -5)$

$y'' = 2$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x 0 1 3

$y' = 2x - 6$

$f'(0) = -$

f'(x) – +
x 0 1 3

$(\nearrow) = (3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 3)$

91 Halla el crecimiento de la función siguiente: $y = -x^2 + 2x + 3$. Dibuja la función.

Solución:

Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = -2x + 2$

$-2x + 2 = 0, x = 1, y = 4, A(1, 4)$

$y'' = -2$

$f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow A(1, 4)$ Máximo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x 0 1

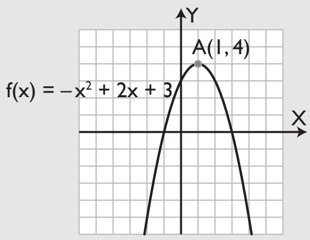
$y' = -2x + 2$

$f'(0) = +$

f'(x) + –
x 0 1

$(\nearrow) = (-\infty, 1)$

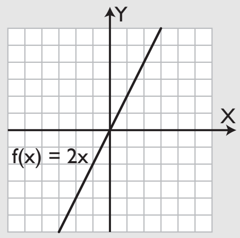
$(\searrow) = (1, +\infty)$



92 Calcula el crecimiento de la función $y = 2x$. Dibuja la función.

Solución:

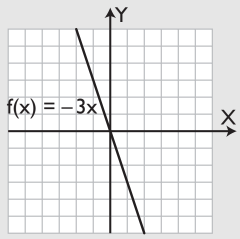
$y' = 2 > 0$, es siempre creciente.



93 Halla el crecimiento de la función $y = -3x$. Dibuja la función.

Solución:

$y' = -3 < 0$, es siempre decreciente.



94 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^3 + 3x$

Solución:

$y' = -3x^2 + 3$

$-3x^2 + 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$

$x = 1, y = 2, A(1, 2)$

$x = -1, y = -2, B(-1, -2)$

$y'' = -6x$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow A(1, 2)$ Máximo relativo.

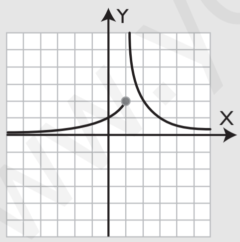
$f''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow B(-1, -2)$ mínimo relativo.

Para ampliar

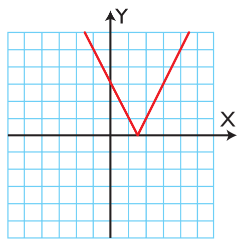
95 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:



96 Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:

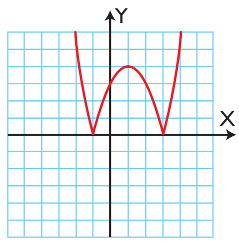


¿Puede haber más de una ecuación?

Solución:

$y = |2x - 3|$ o bien $y = |-2x + 3|$

97 Halla la ecuación de una función cuyo valor absoluto tenga como representación la siguiente gráfica:

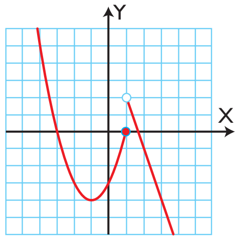


¿Puede haber más de una ecuación?

Solución:

$y = |x^2 - 2x - 3|$ o bien $y = |-x^2 + 2x + 3|$

98 Halla la ecuación de una función definida a trozos cuya representación sea la siguiente gráfica:



Solución:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \le 1 \\ -3x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

99 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 5x^2 - x + 7)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 + 2x^2 - 3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 5x^2 - x + 7) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 + 2x^2 - 3} = -2$

100 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x + 3)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 5x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x + 3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 5x) = -\infty$

101 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = -\dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{5x^2 - x} = -\dfrac{3}{5}$

102 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 + 1}{5n^2 - 7n}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5n}{n^2 - 3n}$

Solución:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 + 1}{5n^2 - 7n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 5n}{n^2 - 3n} = 1$

103 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3} = -3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x^3 + 9}{2x^3 - 3} = -3$

104 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{-7x^3 + x} = 0$

105 Calcula el siguiente límite:

$$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{(x + 1)}(x + 2)} =$$

$$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x - 1}{x + 2} = \dfrac{-2}{1} = -2$$

106 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-2)}} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x} = 0$$

107 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{x^{\cancel{2}}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{4}$$

108 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x+1} = 0$$

109 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 7} \frac{2(x-7)}{x^2 - 2x - 35}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 7} \frac{2(x-7)}{x^2 - 2x - 35} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 7} \frac{2\cancel{(x-7)}}{(x+5)\cancel{(x-7)}} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

110 $f(x) = 2x - 1$ en $[-2, 1]$

Solución:

$$TVM[-2, 1] = \frac{f(1) - f(-2)}{1 + 2} = \frac{1 + 5}{3} = 2$$

111 $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

Solución:

$$TVM[-1, 1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 + 1} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

112 $f(x) = 4x - 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = 4$

113 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 3$

Solución:

$f'(3) = -6$

Calcula la función derivada aplicando la tabla de derivadas:

114 $y = 4x^4 - 5x^2 - 6x + 2$

Solución:

$y' = 16x^3 - 10x - 6$

115 $y = (5x + 1)^4$

Solución:

$y' = 20(5x + 1)^3$

116 $y = e^{5x - 2}$

Solución:

$y' = 5e^{5x - 2}$

117 $y = L(x^2 + 5x)$

Solución:

$$y' = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

118 $y = -x$

Solución:

$y' = -1$

119 $y = (x - 1)e^x$

Solución:

$y' = x\ e^x$

120 $y = (2x + 1)\ L\ x$

Solución:

$y' = 2\ L\ x + \dfrac{2x + 1}{x}$

121 $y = \dfrac{2x + 3}{4x - 5}$

Solución:

$y' = \dfrac{-22}{(4x - 5)^2}$

122 $y = \dfrac{-2x + 1}{3x + 4}$

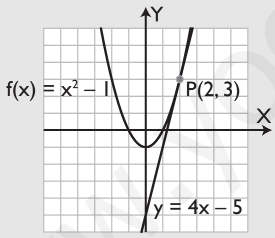
Solución:

$y' = \dfrac{-11}{(3x + 4)^2}$

123 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

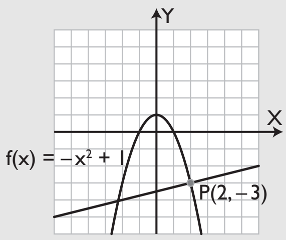
Recta tangente: $y = 4x - 5$



124 Halla la recta normal a la curva $y = -x^2 + 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta normal.

Solución:

Recta normal: $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$



125 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2$. Dibuja la función.

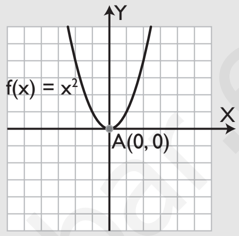
Solución:

$y' = 2x$

$2x = 0, x = 0, y = 0, A(0, 0)$

$y'' = 2$

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow A(0, 0)$ mínimo relativo.



126 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2$. Dibuja la función.

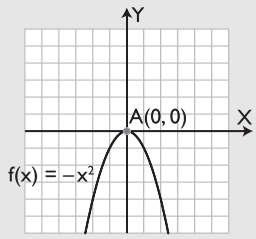
Solución:

$y' = -2x$

$-2x = 0, x = 0, y = 0, A(0, 0)$

$y'' = -2$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow A(0, 0)$ Máximo relativo.



127 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función $y = e^x$

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$y' = e^x$

$e^x \neq 0$ siempre, no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Crecimiento:

$y' = e^x > 0$ siempre, es creciente siempre.

$(\nearrow) = (-\infty, +\infty)$

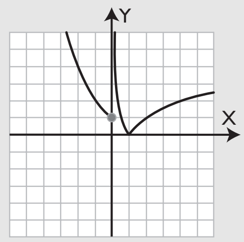
$(\searrow) = \varnothing$

Problemas

128 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si } x \le 0 \\ |\log_{1/2} x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:



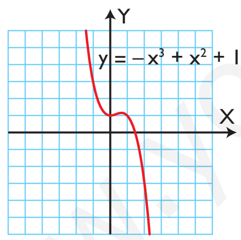
129 Calcula el valor de **k** para que se verifique:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + x}{2x^3 - 4x} = 5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$$

130 Observando la siguiente gráfica:



calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 1)$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 1) = +\infty$$

131 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x - 3)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x + 2)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} =$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

132 Dibuja la siguiente función afín:

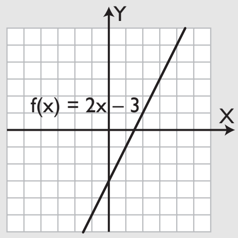
$$y = 2x - 3$$

a) Halla mentalmente la pendiente.

b) Halla la pendiente derivando.

c) La función ¿es creciente o decreciente?

Solución:



a) $m = 2$

b) $y' = 2$

c) Como $m = y' = 2 > 0$ siempre, la función siempre es creciente.

133 Dibuja la siguiente función afín:

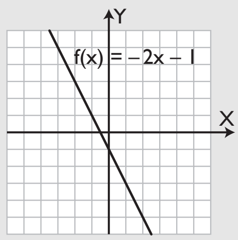
$$y = -2x + 1$$

a) Halla mentalmente la pendiente.

b) Halla la pendiente derivando.

c) La función ¿es creciente o decreciente?

Solución:



a) $m = -2$

b) $y' = -2$

c) Como $m = y' = -2 < 0$ siempre, la función siempre es decreciente.

134 Dibuja la siguiente parábola:

$$y = x^2 - 4x + 1$$

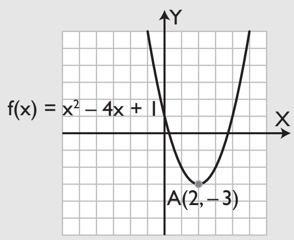
a) Viendo la gráfica, halla el máximo o mínimo relativo.

b) Viendo la gráfica, halla el crecimiento.

c) Halla el máximo relativo o mínimo relativo derivando.

d) Halla el crecimiento derivando.

Solución:



a) $A(2, -3)$ es un mínimo relativo.

b) $(\nearrow) = (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 2)$

c) $y' = 2x - 4$

$2x - 4, x = 2, y = -3, A(2, -3)$

$y'' = 2$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow A(2, -3)$ mínimo relativo.

d) Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x 0 1 2

$y' = 2x - 4$

$f'(0) = -$

f'(x) – +
x 0 1 2

$(\nearrow) = (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 2)$

135 Halla las rectas tangente y normal a la curva:

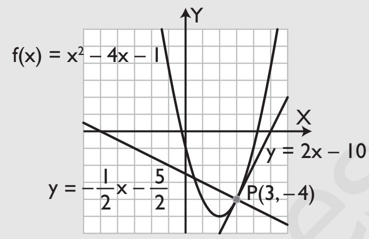
$$y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3$$

Dibuja la función, así como las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 2x - 10$

Recta normal: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

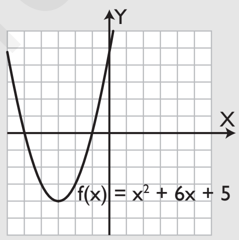


136 Halla el crecimiento de la función:

$$y = x^2 + 6x + 5$$

Dibuja la función.

Solución:



Hay que hallar previamente los máximos y mínimos relativos:

$y' = 2x + 6$

$2x + 6 = 0, x = -3, y = -4, A(-3, -4)$

$y'' = 2$

$f''(-3) = 2 > 0 \Rightarrow A(-3, -4)$ mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x –3 0 1

$y' = 2x + 6$

$f'(0) = +$

f'(x) – +
x –3 0 1

$(\nearrow) = (-3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, -3)$

137 Halla el crecimiento de la función:

$$y = \frac{6}{x}$$

Dibuja la función.

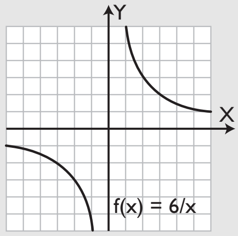
Solución:

$y' = -\dfrac{6}{x^2} < 0$, es siempre negativa, decreciente.

Discontinuidades: $x = 0$

$(\nearrow) = \varnothing$

$(\searrow) = (-\infty, +\infty)$



138 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = x^2 - 6x + 4$$

Solución:

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0, x = 3, y = -5, A(3, -5)$

$y'' = 2$

$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow A(3, -5)$ mínimo relativo.

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x 0 1 3

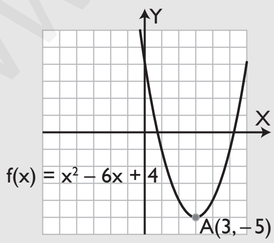
$y' = 2x - 6$

$f'(0) = -$

f'(x) – +
x 0 1 3

$(\nearrow) = (3, +\infty)$

$(\searrow) = (-\infty, 3)$



139 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$y' = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0, x^2 = 2, x = 2, x = -2$

$x = 2, y = -16/3, A(2, -16/3)$

$x = -2, y = 16/3, B(-2, 16/3)$

$y'' = 2x$

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow A(2, -16/3)$ mínimo relativo.

$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow B(-2, 16/3)$ Máximo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x –2 0 2

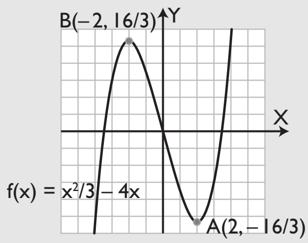
$y' = x^2 - 4$

$f'(1) = -$

f'(x) + – +
x –2 0 2

$(\nearrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$(\searrow) = (-2, 2)$



140 Halla los máximos y mínimos relativos y el crecimiento de la función:

$$y = -\frac{x^3}{3} + 4x$$

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Máximos y mínimos relativos:

$y' = -x^2 + 4$

$-x^2 + 4 = 0, x^2 - 4 = 0, x^2 = 2, x = 2, x = -2$

$x = 2, y = 16/3, A(2, 16/3)$

$x = -2, y = -16/3, B(-2, -16/3)$

$y'' = -2x$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 16/3)$ Máximo relativo.

$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow B(-2, -16/3)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x –2 0 2

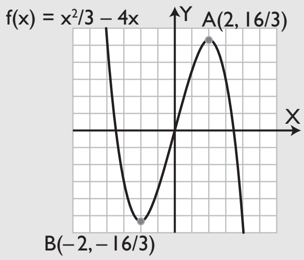
$y' = x^2 - 4$

$f'(1) = -$

f'(x) – + –
x –2 0 2

$(\nearrow) = (-2, 2)$

$(\searrow) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



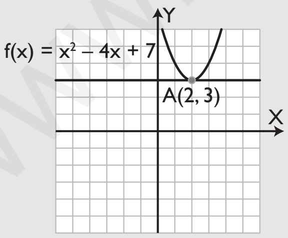
141 Halla la recta tangente a la curva:

$$y = x^2 - 4x + 7$$

para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

Recta tangente: $y = 3$



142 Los beneficios de una empresa en millones de euros vienen dados por la fórmula:

$$y = -x^2 + 18x - 20$$

donde **x** indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza los máximos beneficios?

Solución:

$y' = -2x + 18$

$-2x + 18 = 0, 2x - 18 = 0, x = 9, y = 61$

$y'' = -2$

$f''(9) = -2 < 0 \Rightarrow A(9, 61)$ Máximo relativo.

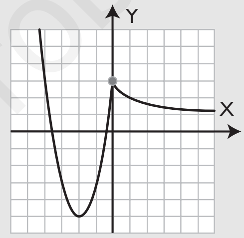
Los máximos beneficios los alcanza en el 9º año y son 61 millones de euros.

Para profundizar

143 Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 8x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



144 Halla el crecimiento de la función $y = x^3 - 3x$. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

Primero hay que hallar los máximos y mínimos relativos.

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = 1, x = -1$

$x = 1, y = -2, A(1, -2)$

$x = -1, y = 2, B(-1, 2)$

$y'' = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1, -2)$ Máximo relativo.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1, 2)$ mínimo relativo.

Crecimiento:

Discontinuidades: no hay.

f'(x)
x –1 0 1

$y' = 3x^2 - 3$

$f'(0) = -$

f'(x) + – +
x –1 0 1

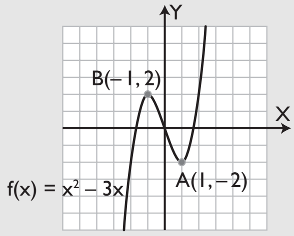
$(\nearrow) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$(\searrow) = (-1, 1)$

Límites:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x = -\infty$



145 Halla el crecimiento de la función $y = \dfrac{2}{x^2}$.
Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, esboza la gráfica de la función.

Solución:

$y' = -\dfrac{4}{x^3}$

Discontinuidades de la derivada: x = 0 de orden 3, que es impar, luego cambia de crecimiento.

f'(x)
x 0 1

f'(1) = –4

f'(x) + –
x 0 1

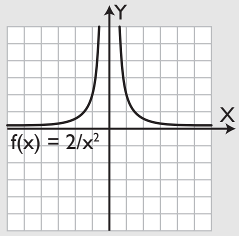
$(\nearrow) = (-\infty, 0)$

$(\searrow) = (0, +\infty)$

Límites:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} = +\infty$



146 Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula:

$$y = -x^2 + 8x$$

donde **x** indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

Solución:

$y' = -2x + 8$

$-2x + 8 = 0, x - 4 = 0, x = 4, y = 16$

$y'' = -2$

$f''(4) = -2 < 0 \Rightarrow A(4, 16)$ Máximo relativo.

Las máximas pérdidas las alcanza en el 4º año y son 16 millones de euros.

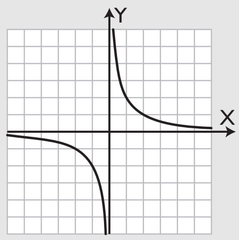
147 Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1, x > 0$$

donde **x** es el número de años y f(x) son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

Solución:



$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

La población tiende a cero, por tanto está en vías de extinción.

Aplica tus competencias

148 El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 3t^2 + 2t + 5$, donde **t** se expresa en segundos, y $e(t)$, en metros. Calcula la velocidad que lleva en el instante $t = 4$ s

Solución:

$v(t) = e'(t) = 6t + 2$

$v(4) = 6 \cdot 4 + 2 = 24 + 2 = 26$ m/s

149 El espacio que recorre un móvil es $e(t) = 5t^2 - 3t + 1$, donde **t** se expresa en segundos, y $e(t)$, en metros. Calcula la aceleración que lleva en el instante $t = 2$ s

Solución:

$v(t) = e'(t) = 10t - 3$

$a(t) = v'(t) = 10$

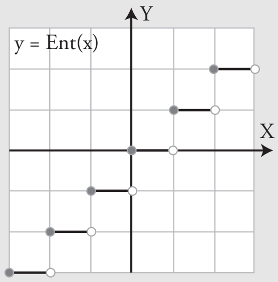
$a(2) = 10$ m/s^2

Comprueba lo que sabes

1 Define función parte entera y represéntala.

Solución:

La **función parte entera de x** asigna a cada **x** su parte entera. Se representa por y = Ent(x)

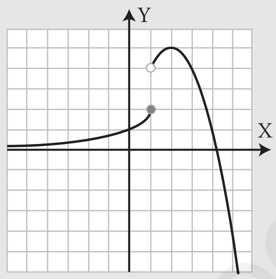


2 Representa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.



3 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

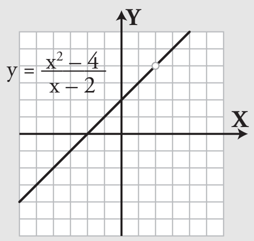
a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

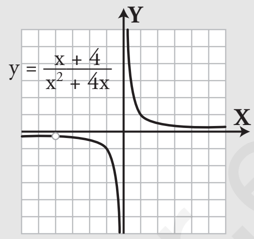
Gráfica:



b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x(x + 4)} =$

$= \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Gráfica:



4 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 4}{-x^2 + 7x}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-5n^2 + 3n}{n^3 + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^2 + 3x}{x^3 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 6x}{x^2 - 7}$

Solución:

a) -2

b) -2

c) 0

d) 0

e) $-\infty$

f) $+\infty$

5 Calcula las derivadas siguientes:

a) $y = (3x - 5)^4$ b) $y = e^{5x+1}$

c) $y = L\,(7x - 2)$ d) $y = x^2e^x$

e) $y = \dfrac{x}{x + 1}$

Solución:

a) $y' = 12(3x - 5)^3$

b) $y' = 5e^{5x + 1}$

c) $y' = \dfrac{7}{7x - 2}$

d) $y' = 2x\,e^x + x^2e^x = xe^x(2 + x)$

e) $y' = \dfrac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

6 Estudia el crecimiento de la función $y = x^2 - 2x - 3$

Solución:

Primero hay que hallar lo máximos y mínimos relativos:

$y = x^2 - 2x - 3$

$y' = 2x - 2$

$y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Si $x = 1 \Rightarrow y = -4$

$A(1, -4)$

$y'' = 2$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -4)$ es un mínimo relativo

Crecimiento:

f'(x)	–	+
x	0 1	

Creciente: $(\nearrow) = (1, +\infty)$

Decreciente: $(\searrow) = (-\infty, 1)$

7 El número de enfermos de gripe que se contabilizan en una localidad durante una epidemia sigue la función:

$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde **x** se expresa en semanas, y f(x), en miles de personas. Calcula el número medio de enfermos de gripe durante la 2ª y la 4ª semanas; y entre la 4ª y la 6ª semanas. Interpreta los resultados.

Solución:

$$TVM[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{8 - 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como $TVM[2, 4] = 1 > 0$, es creciente; es decir, el número medio de enfermos está subiendo.

$$TVM[4, 6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6 - 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Como $TVM[4, 6] = -1 < 0$, es decreciente; es decir, el número medio de enfermos está bajando.

8 Halla las rectas tangente y normal a la curva:

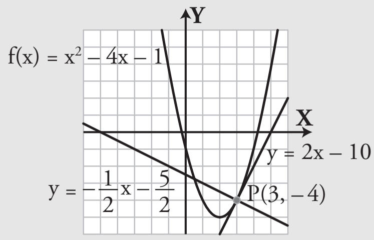
$$y = x^2 - 4x - 1 \text{ para } x = 3$$

Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Recta tangente: $y = 2x - 10$

Recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$



Paso a paso

150 Representa la función parte decimal de **x,** indica si es periódica y halla el período.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

151 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

152 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

153 Halla las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^2 + 2$ para $x = 1$. Dibuja la curva y las rectas.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

154 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

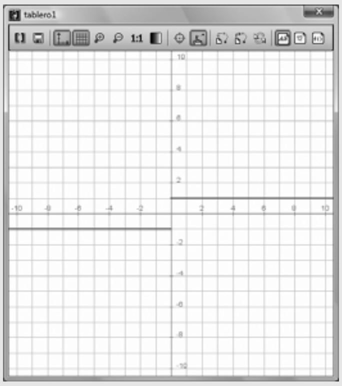
155 Representa la función signo de **x.** Halla cuándo no es continua.

Solución:

Ejercicio 155

dibujar(signo(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Es discontinua en x = 0



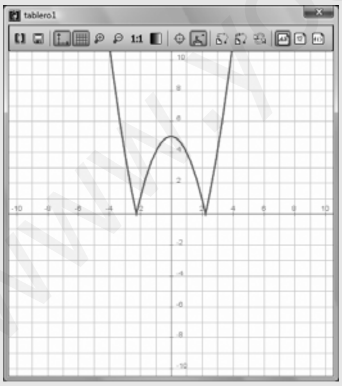
156 Representa la función $y = |x^2 - 5|$

Solución:

Ejercicio 156

dibujar(|x² − 5|, {color = rojo, anchura_línea = 2})

Es discontinua en x = 0



157 Representa la siguiente función y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

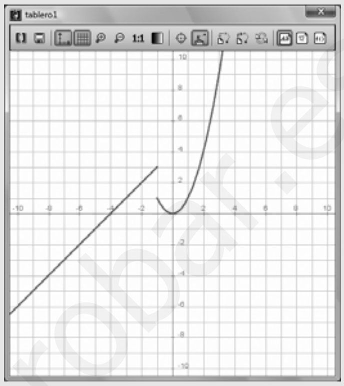
Solución:

Ejercicio 157

dibujar(x + 4, −∞..−1, {color=rojo, anchura_línea=2})

dibujar(x², −1..+∞, {color=rojo, anchura_línea=2})

Es discontinua en x = − 1



158 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to 2} (x + 1)$$

Solución:

Ejercicio 158

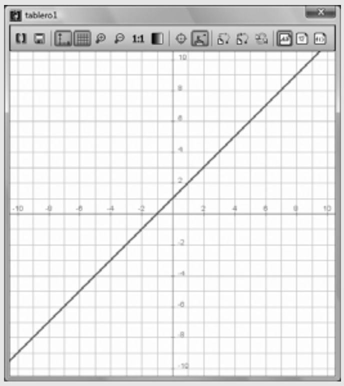
f(x) =x + 1 ➞ x↦x+1

a = 2 ➞ 2

lim f(x) ➞ 3
x→a

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

Se observa que cuando x → 2 y → 3

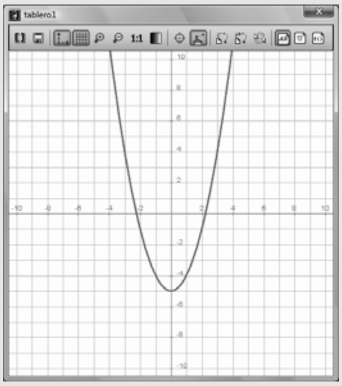


159 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)$$

Solución:

Ejercicio 159
$f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow x \mapsto x^2 - 5$
$a = 3 \Rightarrow 3$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow 4$
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Se observa que cuando $x \to 3$, $y \to 4$

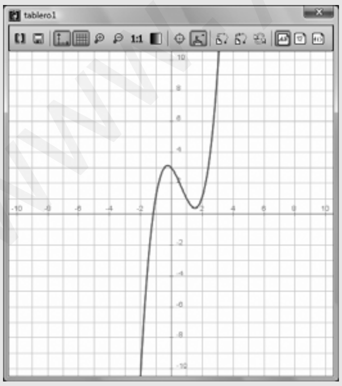


160 Halla el siguiente límite y dibuja la función para comprobarlo.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 3)$$

Solución:

Ejercicio 160
$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 3$
$a = -\infty \Rightarrow -\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow -\infty$
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Se observa que cuando $x \to -\infty$, $y \to -\infty$



Calcula las siguientes derivadas

161 $y = 5x^2 - 7x + 3$

Solución:

Ejercicio 161
$f(x) = 5x^2 - 7x + 3 \Rightarrow x \mapsto 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3$
$f'(x) \Rightarrow 10 \cdot x - 7$

162 $y = e^{3x - 5}$

Solución:

Ejercicio 162
$f(x) = e^{3x - 5} \Rightarrow x \mapsto e^{3 \cdot x - 5}$
$f'(x) \Rightarrow 3 \cdot e^{3 \cdot x - 5}$

163 $y = L\,(x^2 + 5x - 6)$

Solución:

Ejercicio 163
$f(x) = \ln(x^2 + 5x - 6) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2 + 5 \cdot x - 6)$
$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x + 5}{x^2 + 5 \cdot x - 6}$

164 $y = x\,e^x$

Solución:

Ejercicio 164
$f(x) = x \cdot e^x \Rightarrow x \mapsto x \cdot e^x$
$f'(x) \Rightarrow (x + 1) \cdot e^x$

165 $y = x\,L\,x$

Solución:

Ejercicio 165
$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow x \mapsto x \cdot \ln(x)$
$f'(x) \Rightarrow \ln(x) + 1$

166 $y = e^x\,L\,x$

Solución:

Ejercicio 166
$f(x) = e^x \cdot \ln(x) \Rightarrow x \mapsto e^x \cdot \ln(x)$
$f'(x) \Rightarrow e^x \cdot \ln(x) + \dfrac{e^x}{x}$

167 $y = \dfrac{e^x}{x}$

Solución:

Ejercicio 167

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{x} \cdot e^x$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{(x-1) \cdot e^x}{x^2}$

168 $y = \dfrac{5x-1}{3x+2}$

Solución:

Ejercicio 168

$f(x) = \dfrac{5x-1}{3x+2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{5 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 2}$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{13}{9 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 4}$

169 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ para $x = 2$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

Solución:

Ejercicio 169

$f(x) = x^2 \Rightarrow x \mapsto x^2$

$f(2) \Rightarrow 4$

P(2, 4)

$f'(x) \Rightarrow 2 \cdot x$

$f'(2) \Rightarrow 4$

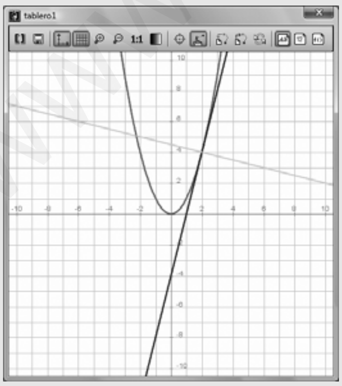
resolver({y − 4 = 4(x − 2)}, {y}) $\Rightarrow$ {{y=4·x−4}}

resolver$\left(\left\{y - 4 = -\dfrac{1}{4}(x-2)\right\}, \{y\}\right) \Rightarrow \left[\left[y = -\dfrac{1}{4} \cdot x + \dfrac{9}{2}\right]\right]$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

dibujar(4·x−4, {color=azul, anchura_línea=2})

dibujar$\left(-\dfrac{1}{4} \cdot x + \dfrac{9}{2}\right.$, {color=verde, anchura_línea=2}$\left.\right)$



170 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^2 - 4x + 5$. Dibuja la función.

Solución:

Ejercicio 170

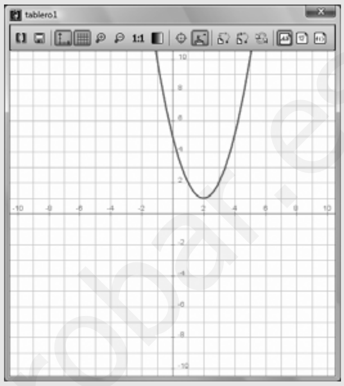
$f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x \mapsto x^2 - 4 \cdot x + 5$

resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=2}}

$f(2) \Rightarrow 1$

A(2, 1) mínimo relativo.

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})



171 Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3x$

Solución:

Ejercicio 171

$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow x \mapsto x^3 - 3 \cdot x$

resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=−1},{x=1}}

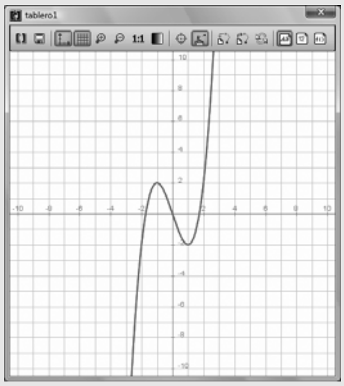
$f(1) \Rightarrow -2$

A(1, − 2) mínimo relativo.

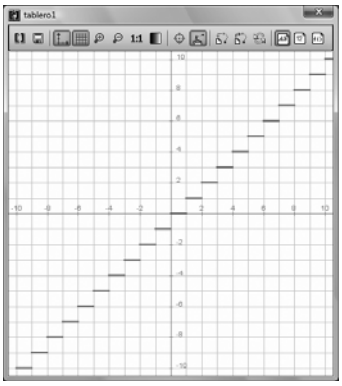
$f(-1) \Rightarrow 2$

A(−1, 2) máximo relativo.

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})

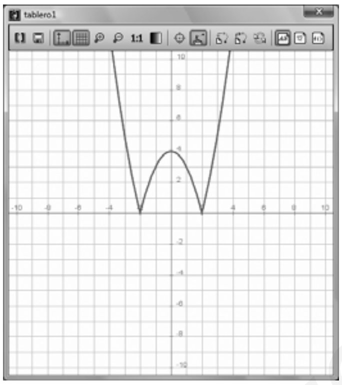


Halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

172 

Solución:

Ejercicio 172
dibujar(suelo(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Es la función parte entera.
y = Ent(x)

173 

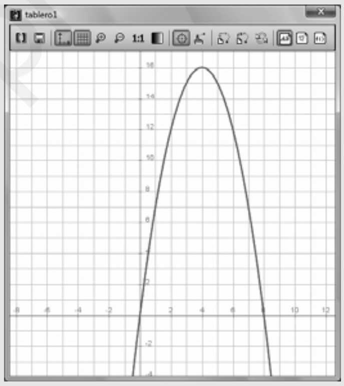
Solución:

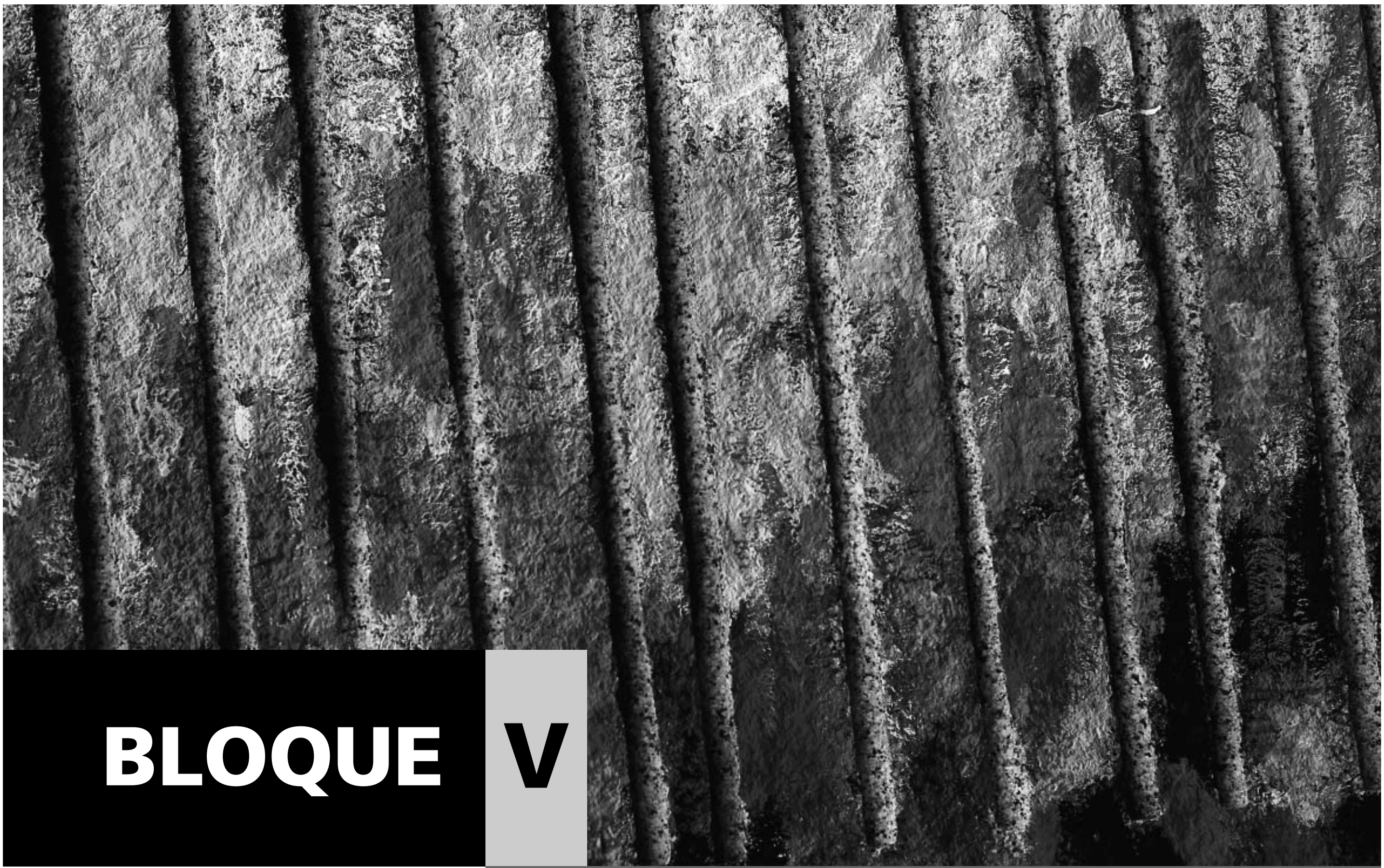
Ejercicio 173
dibujar(|x^2-4|, {color=rojo, anchura_línea=2})

174 Las pérdidas de una empresa en millones de euros vienen dadas por la fórmula: $y = -x^2 + 8x$, donde **x** indica el número de años que lleva funcionando. ¿Qué año alcanza las máximas pérdidas?

Solución:

Ejercicio 174
$f(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow x \mapsto -x^2 + 8 \cdot x$
resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=4}}
f(4) $\Rightarrow$ 16
A(4, 16) máximo relativo.
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_línea=2})
Las máximas pérdidas se alcanzan el 4º año y son de 16 millones de euros

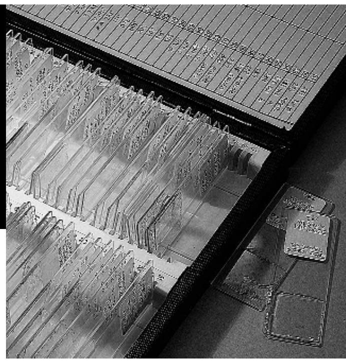




BLOQUE V

Estadística y probabilidad

13 Estadística



1. Caracteres estadísticos

PIENSA Y CALCULA

Se ha realizado un estudio sobre distintos coches, recogiéndose datos sobre: consumo, cilindrada, potencia, peso, aceleración, cilindros, año, país y color.
De los datos que se han recogido, indica cuáles son cualitativos, cuáles cuantitativos discretos y cuáles cuantitativos continuos.

Solución:
Cualitativos: país, color.
Cuantitativos discretos: cilindros, año de fabricación.
Cuantitativos continuos: consumo, cilindrada, potencia, peso, aceleración.

APLICA LA TEORÍA

1 Se ha realizado un estudio sobre el número de personas activas que hay por familia con el mismo número de miembros con posibilidad de trabajar, obteniéndose los siguientes resultados:

2	1	2	2	1	2	4	2	1	1
2	3	2	1	1	1	3	4	2	2
2	2	1	2	1	1	1	3	2	2
3	2	3	1	2	4	2	1	4	1
1	3	4	3	2	2	2	1	3	3

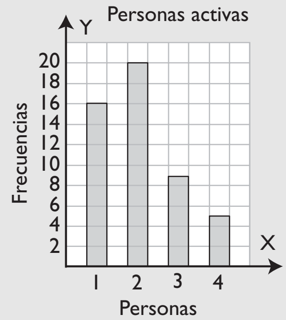
a) Clasifica el carácter estadístico.
b) Haz una tabla de frecuencias.
c) Representa los datos en un diagrama de barras.
d) Dibuja el polígono de frecuencias.
e) Interpreta los resultados.

Solución:
a) Cuantitativo discreto.

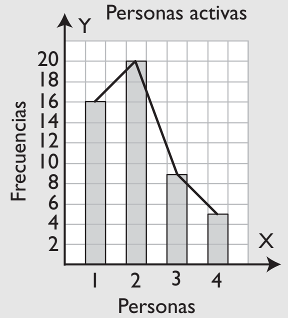
b)

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
1	16	16	32	0,32	32	0,32
2	20	36	72	0,40	40	0,72
3	9	45	90	0,18	18	0,90
4	5	50	100	0,10	10	1,00
Total	**50**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



d)



Como las familias tienen el mismo número de miembros, se ve que más de la mitad (36 familias de 50), el 72%, tienen 1 o 2 miembros activos. Es decir, en el 72% de las familias, solo trabajan 1 o 2 miembros de los 4 que pueden trabajar.

2 En 4º curso de un centro escolar se han estudiado las calificaciones de Lengua, obteniéndose los siguientes resultados:

Insuficiente	12
Suficiente	15
Bien	10
Notable	8
Sobresaliente	5

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de barras.

d) Interpreta los resultados.

Solución:

a) Cualitativo.

b)

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
Insuficientes	12	12	24	0,24	24	0,24
Suficientes	15	27	54	0,30	30	0,54
Bien	10	37	74	0,20	20	0,74
Notables	8	45	90	0,16	16	0,90
Sobresalientes	5	50	100	0,10	10	1,00
Total	**50**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.

d) Un 24% suspende la asignatura, mientras que un 76% supera la asignatura.

2. Caracteres continuos. Datos agrupados

PIENSA Y CALCULA

En un test psicotécnico, se han obtenido las siguientes puntuaciones de 0 a 100: 60, 65, 50, 89, 45, 40, 78, 92, 75, 23, 80, 60, 70, 75, 45, 78, 60, 80, 90, 98, 45, 62, 58, 50, 60

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula el recorrido.

c) Si los datos se agrupan en 5 intervalos, ¿cuál es la longitud aproximada de cada intervalo?

Solución:

a) Cuantitativo discreto.

b) 98 – 23 = 75

c) 75 : 5 = 15

3 El peso de 25 personas es el siguiente:

56	76	52	58	74
46	77	68	77	50
66	67	88	60	82
94	66	70	72	65
74	80	70	60	64

a) Agrupa los datos en intervalos.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un histograma.

Solución:

a) El recorrido es: 94 – 46 = 48

El número de intervalos: $\sqrt{25} = 5$

Longitud de cada intervalo:

50 : 5 = 10

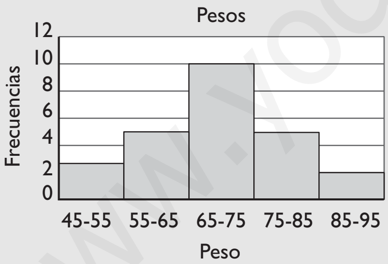
El extremo inferior del 1er intervalo se toma:

$(50 - 48) : 2 = 1 \Rightarrow 46 - 1 = 45$

b) Tabla de frecuencias:

Intervalo	X_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
45-55	50	3	3	12	0,12	12	0,12
55-65	60	5	8	32	0,20	20	0,32
65-75	70	10	18	72	0,40	40	0,72
75-85	80	5	23	92	0,20	20	0,92
85-95	90	2	25	100	0,08	8	1,00
Total		**25**			**1,00**	**100**	

c) Histograma



Se observa que un 40% de los datos se encuentra en el intervalo central de 65 a 75 kg, distribuyéndose de una forma muy «normal». Hay pocas personas en los intervalos extremos y más en los centrales.

4 Una empresa dedica a la inversión publicitaria en distintos medios las siguientes cantidades:

Medio	Televisión	Prensa	Radio	Otros
Dinero (miles €)	50	38	9	23

Representa los datos en un diagrama de sectores. Interpreta los resultados.

Solución:

$\frac{360°}{120} = 3°$

Medio	Euros	Amplitud
Televisión	50	3° · 50 = 150°
Prensa	38	3° · 38 = 114°
Radio	9	3° · 9 = 27°
Otros	23	3° · 23 = 69°
Total	120	360°

Más de la mitad del gasto se hace en televisión y en prensa.

5 El número de horas que dedican a ver la televisión una muestra de personas se distribuye así:

Intervalo (h)	Frecuencias
0 - 1	10
1 - 2	40
2 - 3	25
3 - 4	15
4 - 5	10

a) Haz una tabla de frecuencias.

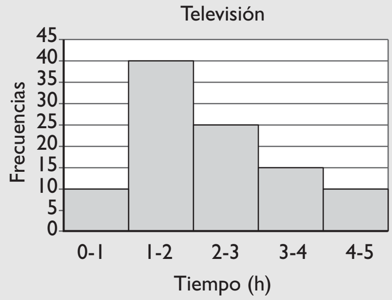
b) Representa los datos en un histograma. Interpreta los resultados.

Solución:

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
0-1	0,5	10	10	10	0,10	10	0,10
1-2	1,5	40	50	50	0,40	40	0,50
2-3	2,5	25	75	75	0,25	25	0,75
3-4	3,5	15	90	90	0,15	15	0,90
4-5	4,5	10	100	100	0,10	10	1,00
Total		**100**			**1,00**	**100**	

b)



Un 50% ve entre 0 y 2 horas la televisión. El otro 50% lo hace en el intervalo entre 2 y 5 horas. Un 25% de la población ve entre 3 y 5 horas la televisión.

3. Parámetros de centralización

PIENSA Y CALCULA

Carmen ha anotado en los últimos partidos de baloncesto los siguientes puntos: 10, 12, 14, 8, 16
Calcula la media aritmética y explica su significado.

Solución:

La media de Carmen es 12 puntos.

Esto significa que los puntos se distribuyen alrededor de 12; es decir, ha conseguido el mismo total que si en cada partido hubiese marcado 12 puntos.

APLICA LA TEORÍA

6 Se ha hecho un estudio del número de veces que los alumnos de una clase han ido al cine durante el último mes, obteniéndose los siguientes resultados:

Nº de veces	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	3	2	7	5	4	4	3	2

Calcula los parámetros de centralización que sea posible.

Solución:

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0	3	3	0
1	2	5	2
2	7	12	14
3	5	17	15
4	4	21	16
5	4	25	20
6	3	28	18
7	2	30	14
Total	**30**		**99**

Como el carácter es cuantitativo discreto, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = \dfrac{99}{30} = 3,3$

Moda: 2

Mediana: 3

Los datos se agrupan en torno a 3,3, siendo el más frecuente el 2

7 Se ha realizado un sondeo sobre el dinero que llevan 30 alumnos de un centro, obteniéndose los siguientes resultados:

6	4	3	5,3	2,5	4,2
0,5	9	3,25	12	5,5	3,2
6,2	1,2	9,5	4,1	14,5	2
4	6,5	3,1	1,3	4,2	7
3,8	3	4,5	10	5	2,25

a) Agrupa los datos en intervalos.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

Solución:

Dinero (€)	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0-3	1,5	6	6	9,0
3-6	4,5	15	21	67,5
6-9	7,5	4	25	30,0
9-12	10,5	3	28	31,5
12-15	13,5	2	30	27,0
Total		**30**		**165**

Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma\, x_i \cdot n_i}{N} = \dfrac{165}{30} = 5{,}5$

Moda: es el intervalo 3-6

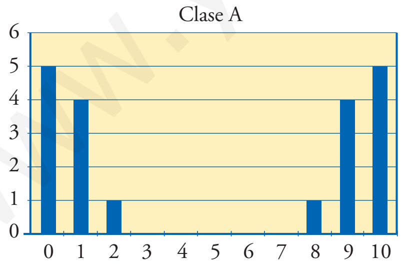
Mediana: es el intervalo 3-6

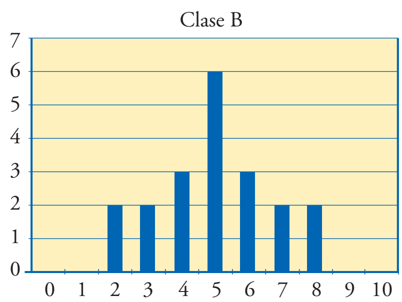
Los datos se agrupan en torno a 5,5, que es un valor que se encuentra en el intervalo de la moda y de la mediana.

4. Parámetros de dispersión

PIENSA Y CALCULA

Los gráficos adjuntos representan los datos de las calificaciones que dos clases han tenido en la misma asignatura.





a) Si Rocío desea sacar un diez, ¿a qué clase debería ir?

b) Si lo que quiere es asegurar el aprobado, ¿a qué clase debería ir?

Solución:

a) Si Rocío desea sacar un diez, debe ir a la clase A, que es en la que algunos alumnos sacan esa nota.

b) Si lo que quiere es asegurar el aprobado, debe ir a la clase B, en la que no hay notas extremas, pero en la que la mayoría de los alumnos aprueban.

8 El número de personas que ha acudido diariamente a la consulta de un médico en el último mes ha sido:

Nº de pacientes	8	10	12	14	15	20
Nº de días	5	4	6	6	3	1

Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Solución:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
8	5	40	64	320
10	4	40	100	400
12	6	72	144	864
14	6	84	196	1 176
15	3	45	225	675
20	1	20	400	400
Total	**25**	**301**		**3 835**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = \frac{301}{25} = 12,04$$

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 8,44$$

$\sigma = 2,9$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,24 \Rightarrow 24\%$$

Los datos se distribuyen alrededor de 12,04, con un 24% de dispersión.

9 Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación del dinero que gastan mensualmente 28 alumnos de 4º cuyos datos se han recogido en la siguiente distribución:

Intervalo	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25
Frecuencia	10	8	5	4	3

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
5 - 9	7	10	70	49	490
9 - 13	11	8	88	121	968
13 - 17	15	5	75	225	1 125
17 - 21	19	4	76	361	1 444
21 - 25	23	3	69	529	1 587
Total		**30**	**378**		**5 614**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 12,6$$

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 28,37$$

$\sigma = 5,33$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,42 \Rightarrow 42\%$$

Los datos se distribuyen alrededor de 12,6 con un 42% de dispersión. Los datos están muy dispersos.

10 Las calificaciones que han obtenido en Matemáticas dos clases distintas han sido:

Clasificación	Clase A	Clase B
0	5	0
1	4	0
2	1	2
3	0	2
4	0	3
5	0	6
6	0	3
7	0	2
8	1	2
9	4	0
10	5	0

Calcula el coeficiente de variación y analiza el resultado.

Solución:

Clase A

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	5	0	0
1	4	4	4
2	1	2	4
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	1	8	64
9	4	36	324
10	5	50	500
Total	**20**	**100**	**896**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 5$$

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 19,8$$

$\sigma = 4,45$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}89 \Rightarrow 89\%$

Clase B

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	0	0	0
1	0	0	0
2	2	4	8
3	2	6	18
4	3	12	48
5	6	30	150
6	3	18	108
7	2	14	98
8	2	16	128
9	0	0	0
10	0	0	0
Total	**20**	**100**	**558**

$\overline{x} = \frac{\Sigma\, x_i \cdot n_i}{N} = 5$

$V = \frac{\Sigma\, x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 2{,}9$

$\sigma = 1{,}7$

$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}34 \Rightarrow 34\%$

Es más homogénea la clase B, que tiene un 34% de dispersión, mientras que la clase A tiene un 89%. Si se quiere aprobar y no sacar muy buena nota, conviene la clase B. Si se desea sacar muy buena nota, hay que arriesgar en la clase A

Ejercicios y problemas

1. Caracteres estadísticos

11 Durante los últimos 20 días, el número de alumnos que faltó a clase en 4° ha sido:

N° de alumnos	N° de días
0	5
1	6
2	4
3	2
4	2
5	1

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de barras.

d) Interpreta los resultados.

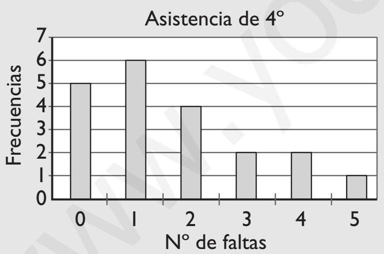
Solución:

a) Cuantitativo discreto.

b) Tabla de frecuencias.

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
0	5	5	25	0,25	25	0,25
1	6	11	55	0,30	30	0,25
2	4	15	75	0,20	20	0,75
3	2	17	85	0,10	10	0,85
4	2	19	95	0,10	10	0,95
5	1	20	100	0,05	5	1,00
Total	**20**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



d) Un 75% de los días han faltado como mucho 2 alumnos; y en un 25%, entre 3 a 5 personas. Es una clase en la que hay bastantes faltas de asistencia.

12 El número de medallas que cinco centros han conseguido en unas pruebas escolares ha sido:

Centro	N° de medallas
Algaida	12
Betara	10
Kiner	8
Vicencio	6
Tizer	4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz la tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de barras.

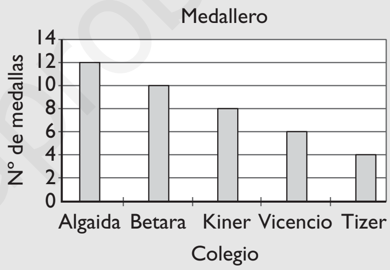
Solución:

a) Carácter cualitativo.

b) Tabla de frecuencias.

x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
Algaida	12	12	30	0,30	30	0,30
Betara	10	22	55	0,25	25	0,55
Kiner	8	30	75	0,20	20	0,75
Vicencio	6	36	90	0,15	15	0,90
Tizer	4	40	100	0,10	10	1,00
Total	**50**			**1,00**	**100**	

c) Diagrama de barras.



2. Caracteres continuos. Datos agrupados

13 Las edades de los asistentes a una conferencia se han agrupado en intervalos, tal y como se recoge en la siguiente tabla:

Intervalo	Frecuencia
38 - 44	8
44 - 50	12
50 - 56	20
56 - 62	16
62 - 68	12
68 - 74	8
74 - 80	4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un histograma.

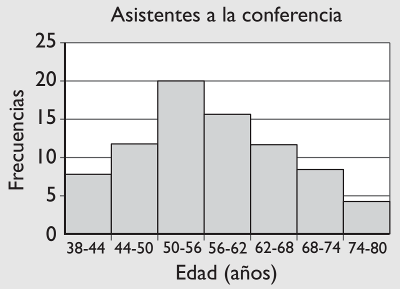
Solución:

a) Cuantitativo continuo.

b) Tabla de frecuencias.

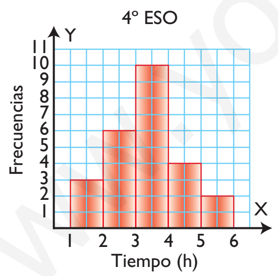
Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
38 - 44	41	8	8	10	0,10	10	0,10
44 - 50	47	12	20	25	0,15	15	0,25
50 - 56	53	20	40	50	0,25	25	0,50
56 - 62	59	16	56	70	0,20	20	0,70
62 - 68	65	12	68	85	0,15	15	0,85
68 - 74	71	8	76	95	0,10	10	0,95
74 - 80	77	4	80	100	0,05	5	1,00
Total		**90**			**1,00**	**100**	

c) Histograma.



El 25% de los asistentes pertenece al intervalo entre 50 y 56 años, y los datos se distribuyen de una forma bastante normal.

14 El siguiente histograma recoge los datos del tiempo en horas que ha dedicado al estudio diario un grupo de estudiantes:



Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
1 - 2	1,5	3	3	0,12	0,12	12	0,12
2 - 3	2,5	6	9	0,36	0,24	24	0,36
3 - 4	3,5	10	19	0,76	0,40	40	0,76
4 - 5	4,5	4	23	0,92	0,16	16	0,92
5 - 6	5,5	2	25	1,00	0,08	8	1,00
Total		**25**			**1,00**	**100**	

15 En un barrio se ha realizado una encuesta sobre el grado de malestar que produciría la instalación de un centro de atención a drogodependientes, obteniéndose los siguientes resultados:

Actitud de los vecinos	Frecuencia
Se oponen activamente	10
Se sentirían molestos	5
Resto	25

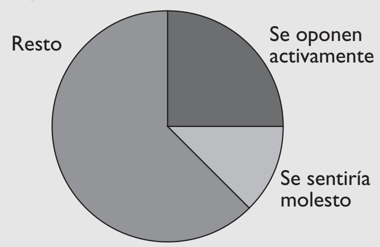
Haz un diagrama de sectores que represente los datos.

Solución:

$$\frac{360°}{40} = 9°$$

Actitud de los vecinos	Frecuencia	Amplitud
Se oponen activamente	10	9° · 10 = 90°
Se sentirían molestos	5	9° · 5 = 45°
Resto	25	9° · 25 = 225°
Total	**40**	**360°**

Centro de asistencia a drogodependientes



Una cuarta parte se opone activamente, mientras que más de la mitad ni se siente molesto ni se opone al centro.

16 Las precipitaciones medias anuales en milímetros recogidas en una estación meteorológica han sido en los últimos años:

251	495	355	520	430	490
280	452	460	700	749	400
300	500	560	458	530	500
490	565	540	480	400	660
360	460	380	600	485	455

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Agrupa los datos y haz una tabla de frecuencias.

c) Representa los datos en un histograma e interpreta el resultado.

Solución:

a) Cuantitativo continuo.

b) El recorrido es: 749 – 251 = 498

El número de intervalos: $\sqrt{30} \approx 5$

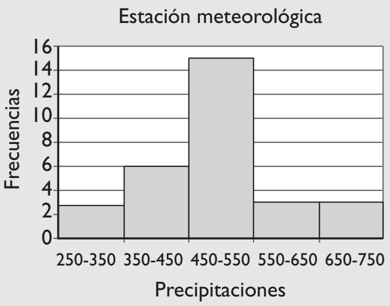
Longitud de cada intervalo: 500 : 5 = 100

El extremo inferior del 1^er^ intervalo se toma:

(500 – 498) : 2 = 1 ⇒ 251 – 1 = 250

Intervalo	x_i	n_i	N_i	N_i (%)	f_i	f_i (%)	F_i
250 - 350	300	3	3	10	0,1	10	0,1
350 - 450	400	6	9	30	0,2	20	0,3
450 - 550	500	15	24	80	0,5	50	0,8
550 - 650	600	3	27	90	0,1	10	0,9
650 - 750	700	3	30	100	0,1	10	1
Total		**30**			**1,0**	**100**	

c) Histograma:



El 50% de las precipitaciones está en el intervalo central y el otro 50% se distribuye alrededor de este intervalo.

3. Parámetros de centralización

17 Se ha registrado la duración en años de un modelo de batería para coches, obteniéndose los siguientes datos:

2,6	2,8	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,6
3,6	3,6	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9
4,1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,4	4,7	4,9	

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

Solución:

El recorrido es: 4,9 – 2,6 = 2,3

El número de intervalos: $\sqrt{26} \approx 5$

Longitud de cada intervalo: 2,5 : 5 = 0,5

El extremo inferior del 1^er^ intervalo se toma:

(2,5 – 2,3) : 2 = 0,1 ⇒ 2,6 – 0,1 = 2,5

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
2,5 - 3	2,75	2	2	5,5
3 - 3,5	3,25	6	8	19,5
3,5 - 4	3,75	10	18	37,5
4 - 4,5	4,25	6	24	25,5
4,5 - 5	4,75	2	26	9,5
Total		**26**		**97,5**

Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma\, x_i \cdot n_i}{N} = 3,75$

Moda: es el intervalo 3,5 - 4

Mediana: es el intervalo 3,5 - 4

Los datos se agrupan en torno a 3,75, que es un valor que se encuentra en el intervalo de la moda.

18 Se ha registrado el peso de unos recién nacidos, obteniéndose los siguientes resultados:

Peso en kg	2 - 2,5	2,5 - 3	3 - 3,5	3,5 - 4	4 - 4,5
n_i	6	14	16	10	4

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
2 - 2,5	2,25	6	6	13,5
2,5 - 3	2,75	14	20	38,5
3 - 3,5	3,25	16	36	52,0
3,5 - 4	3,75	10	46	37,5
4 - 4,5	4,25	4	50	17,0
Total		**50**		**158,5**

Como el carácter es cuantitativo continuo, se pueden calcular:

Media: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma\, x_i \cdot n_i}{N} = 3,17$

Moda: es el intervalo 3 - 3,5

Mediana: es el intervalo 3 - 3,5

Los datos se agrupan en torno a 3,17, que es un valor que se encuentra en el intervalo de la moda y de la mediana.

4. Parámetros de dispersión

19 En un centro de cálculo, el número de veces que un ordenador se detiene por un error interno se ha recogido durante los últimos 50 días en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	3	6	8	12	10	8	3

Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta el resultado.

Solución:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	3	0	0	0
1	6	6	1	6
2	8	16	4	32
3	12	36	9	108
4	10	40	16	160
5	8	40	25	200
6	3	18	36	108
Total	**50**	**156**		**614**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 3,12$$

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 2,55$$

$\sigma = 1,6$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,51 \Rightarrow 51\%$$

Los datos se agrupan en torno a 3,12 con una dispersión del 51%. Los datos están muy dispersos.

20 Las edades de una muestra de personas que acuden a la biblioteca de un barrio se han recogido en la siguiente tabla:

Intervalo	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Frecuencia	6	15	10	6	8	5

Calcula la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta el resultado.

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
10 - 20	15	6	90	225	1 350
20 - 30	25	15	375	625	9 375
30 - 40	35	10	350	1 225	12 250
40 - 50	45	6	270	2 025	12 150
50 - 60	55	8	440	3 025	24 200
60 - 70	65	5	325	4 225	21 125
Total		**50**	**1 850**		**80 450**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 37$$

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 240$$

$\sigma = 15,49$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,42 \Rightarrow 42\%$$

Los datos se agrupan en torno a 37 años, con una dispersión del 42%. Los datos están muy dispersos.

21 En los últimos 10 días se han registrado las cotizaciones de dos valores bursátiles. Calcula el coeficiente de variación e interpreta el resultado.

Valor A	3,8	3,7	3,8	3,7	3,8	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7
Valor B	5,9	6,2	6,5	5,7	6	6,2	6,5	5,7	5,5	6

Solución:

Valor A

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 3,76$$

$\sigma = 0,05$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,01 \Rightarrow 1\%$$

Valor B

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 6,02$$

$\sigma = 0,32$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,05 \Rightarrow 5\%$$

Es más homogéneo el valor A, con un 1% de dispersión, frente al valor B, que tiene un 5%

Para ampliar

22 El número de viajes que un grupo de personas ha realizado al extranjero en el último año ha sido el siguiente:

Nº de viajes	0	1	2	3	4
Frecuencia	8	10	12	6	4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) Calcula el coeficiente de variación.

e) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

Solución:

a) Cuantitativo discreto.

b) Parámetros de centralización.

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	8	8	0	0	0
1	10	18	10	1	10
2	12	30	24	4	48
3	6	36	18	9	54
4	4	40	16	16	64
Total	**40**		**68**		**176**

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 1{,}7$$

Moda: 2

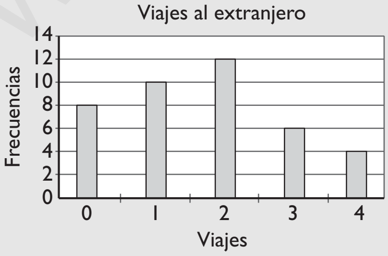
Mediana: 2

c) $$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 1{,}51$$

$\sigma = 1{,}23$

d) $$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}72 \Rightarrow 72\%$$

e) Diagrama de barras.



Los datos se agrupan en torno a 1,7 viajes, con una dispersión del 72%, que es muy grande.

23 Se ha realizado una encuesta sobre el lugar donde se utiliza el acceso a Internet diariamente, obteniéndose los siguientes resultados:

Lugar	Frecuencia
En casa	15
En el trabajo	14
En el centro escolar	5
Cibercafés	3
En otros	3

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Representa los datos en un diagrama de sectores.

Solución:

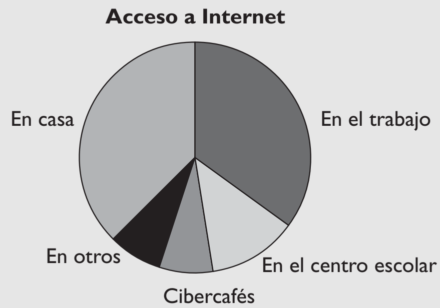
a) Carácter cualitativo.

b) Como el carácter es cualitativo no ordenable, solo se puede calcular la moda, que es: en casa.

c) Diagrama de sectores.

$$\frac{360°}{40} = 9°$$

Acceso a Internet	Frecuencia	Amplitud
En casa	15	$9° \cdot 15 = 135°$
En el trabajo	14	$9° \cdot 14 = 126°$
En el centro escolar	5	$9° \cdot 5 = 45°$
Cibercafés	3	$9° \cdot 3 = 27°$
En otros	3	$9° \cdot 3 = 27°$
Total	**40**	**360°**



En el gráfico se ve que casi 3/4 partes se conectan en casa o el trabajo, quedando solo 1/4 para el resto.

24 En una empresa se distribuye una prima por productividad. El número de trabajadores y la cantidad de la prima se recogen en la tabla siguiente:

Intervalo	Nº de trabajadores
90 - 120	2
120 - 150	10
150 - 180	12
180 - 210	4
210 - 240	2

a) Clasifica el carácter estadístico.
b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.
c) Calcula la varianza y la desviación típica.
d) Calcula el coeficiente de variación.
e) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

Solución:

a) Cuantitativo discreto.

b) Parámetros de centralización.

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
90 - 120	105	2	2	210	11 025	22 050
120 - 150	135	10	12	1 350	18 225	182 250
150 - 180	165	12	24	1 980	27 225	326 700
180 - 210	195	4	28	780	38 025	152 100
210 - 240	225	2	30	450	50 625	101 250
Total		**30**		**4 770**		**784 350**

$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 159$

Moda: el intervalo 150 - 180

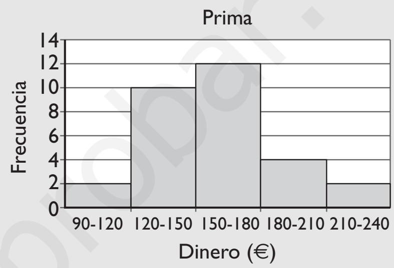
Mediana: el intervalo 150 - 180

c) $V = \dfrac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 864$

$\sigma = 29{,}39$

d) $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}18 \Rightarrow 18\%$

e) Histograma:



Los datos se distribuyen en torno a 136 €, con una dispersión pequeña del 18%

Problemas

25 Se ha realizado una encuesta entre unos usuarios de una piscina municipal sobre el grado de satisfacción de las instalaciones, obteniéndose los siguientes resultados:

Grado se satisfacción	Frecuencia
Muy poco	6
Poco	10
Regular	14
Bueno	15
Muy bueno	5

a) Clasifica el carácter estadístico.
b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.
c) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

Solución:

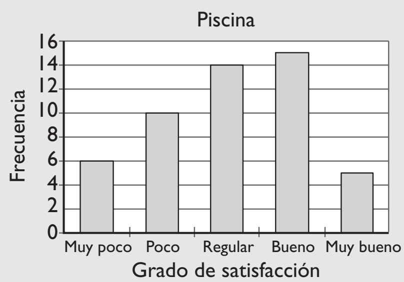
a) Cualitativo ordenable.

b) Parámetros de centralización.

Moda: bueno.

Mediana: regular.

c) Diagrama de barras.



Más de la mitad de los usuarios se encuentran entre regular y bueno.

26 Una empresa ha realizado una prueba de velocidad entre 25 trabajadores a los que se les ha asignado la misma tarea. Los datos sobre el tiempo, en minutos, que han tardado en realizar la tarea han sido:

4,6	5	5,6	5,7	6
6,2	6,6	6,7	6,7	6,8
6,9	7	7	7,2	7,3
7,4	7,7	7,8	7,8	8
8,3	8,4	8,6	9	9,4

a) Clasifica el carácter estadístico.

b) Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) Calcula el coeficiente de variación.

e) Representa los datos en el gráfico más apropiado e interprétalos.

Solución:

a) Cuantitativo continuo.

b) Parámetros de centralización.

El recorrido es: 9,4 – 4,6 = 4,8

El número de intervalos: $\sqrt{25} \approx 5$

Longitud de cada intervalo:

5 : 5 = 1

El extremo inferior del 1er intervalo se toma:

(5 – 4,8) : 2 = 0,1 ⇒ 4,6 – 0,1 = 4,5

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
4,5 - 5,5	5	2	2	10	25	50
5,5 - 6,5	6	4	6	24	36	144
6,5 - 7,5	7	10	16	70	49	490
7,5 - 8,5	8	6	22	48	64	384
8,5 - 9,5	9	3	25	27	81	243
Total		**25**		**179**		**1 311**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 7,16$$

Moda: el intervalo 6,5 - 7,5

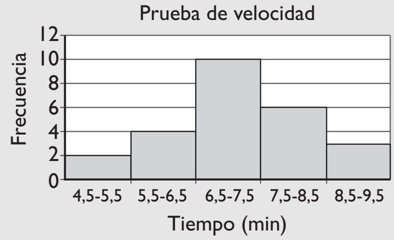
Mediana: el intervalo 6,5 - 7,5

c) $V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 = 1,17$

$\sigma = 1,08$

d) $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,15 \Rightarrow 15\%$

e) Histograma:



Los datos se agrupan en torno a 7,16 minutos con una dispersión del 15%, es decir, pequeña.

27 Se ha clasificado a los trabajadores de una empresa en tres categorías: mayores de 40 años, entre 25 y 40 años, y menores de 25 años, obteniéndose los siguientes datos sobre la productividad:

Grupo	$\bar{x}$	σ
menor de 25	4	0,68
25 - 40	6	0,48
mayor de 40	7	0,35

Indica qué grupo es más homogéneo y justifica la respuesta.

Solución:

Grupo	CV
Menor de 25 años	0,17 ⇒ 17%
Entre 25 y 40 años	0,08 ⇒ 8%
Mayores de 40 años	0,05 ⇒ 5%

Los grupos quedan ordenados de más a menos homogéneo:

Mayores de 40 años.

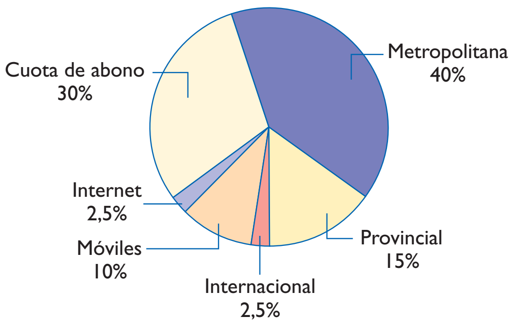
Entre 25 y 40 años.

Menores de 25 años.

Para profundizar

28 En una factura telefónica, las cantidades abonadas se recogen en el siguiente diagrama de sectores:

Factura de teléfono



Haz la tabla de frecuencias sabiendo que el total de la factura fueron 40 €

Solución:

Gasto teléfono	%	Cantidad sobre 40 €
Cuota de abono	30	12 €
Metropolitana	40	16 €
Provincial	15	6 €
Internacional	2,5	1 €
Móviles	10	4 €
Internet	2,5	1 €

29 Asocia a cada gráfico un grupo A, B o C cuyos datos se dan en la tabla siguiente:

	A	B	C
$\overline{x}$	3	3	3
σ	1,79	0	1,1

Gráfico 1

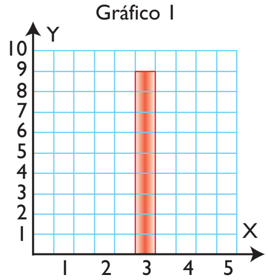


Gráfico 2

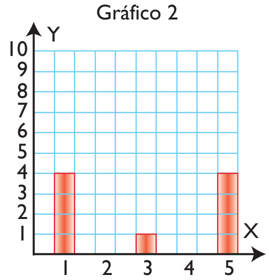
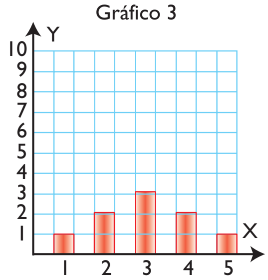


Gráfico 3



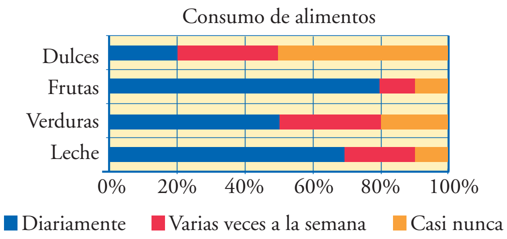
Solución:

Grupo A con gráfico 2

Grupo B con gráfico 1

Grupo C con gráfico 3

30 Se ha consultado a un grupo de personas sobre la frecuencia de consumo de varios productos alimenticios, obteniéndose los resultados representados en el gráfico siguiente. Haz una tabla de frecuencias.



Se toma N = 100, ya que los datos vienen en porcentaje:

	Diariamente	Varias veces por semana	Casi nunca
Leche	70	20	10
Verduras	50	30	20
Frutas	80	10	10
Dulces	20	30	50

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Comprueba lo que sabes

1 Define carácter estadístico cuantitativo y cualitativo. Pon un ejemplo de cada tipo.

Solución:

Carácter estadístico cualitativo: aquel que indica una cualidad. No se puede contar ni medir.

Carácter estadístico cuantitativo: aquel que indica una cantidad. Se puede contar o medir. Se clasifica en:

- **Cuantitativo discreto:** sus valores son el resultado de un recuento. Solamente puede tomar ciertos valores aislados.
- **Cuantitativo continuo:** sus valores son el resultado de una medida. Puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Ejemplo

Entre el alumnado de un centro se puede estudiar:

Caracteres			Valores
Cualitativo		El color preferido	Blanco, rojo, …
Cuantitativo	Discreto	El nº de libros leídos en un mes	0, 1, 2, 3, …
	Continuo	El peso	60 kg, 67 kg, …

2 Se ha estudiado la forma de desplazamiento de los habitantes de una ciudad en sus vacaciones, obteniéndose los siguientes resultados:

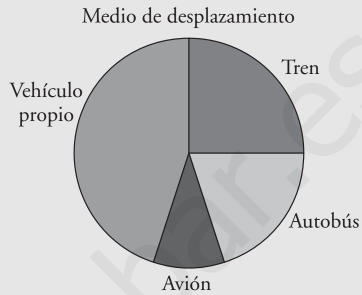
Medio	Vehículo propio	Tren	Autobús	Avión
Frecuencia	45	25	20	10

Haz un diagrama de sectores que recoja los datos e interpreta el resultado.

Solución:

$\frac{360°}{100} = 3{,}6°$

Medio	Frecuencia	Amplitud
Vehículo propio	45	$3{,}6° \cdot 45 = 162°$
Tren	25	$3{,}6° \cdot 25 = 90°$
Autobús	20	$3{,}6° \cdot 20 = 72°$
Avión	10	$3{,}6° \cdot 10 = 36°$
Total	**100**	**360°**



Un 90% de los viajes se hace por carretera, frente a un 10% que se hace en avión. De los viajes por carretera, el 45% se hace en vehículo propio.

3 El número de CD que adquirieron el mes pasado los estudiantes de una clase se recoge en la tabla:

Nº de CD	0	1	2	3	4	5
Nº de estudiantes	2	7	8	5	2	1

Calcula la moda, la mediana y la media. Interpreta el resultado.

Solución:

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0	2	2	0
1	7	9	7
2	8	17	16
3	5	22	15
4	2	24	8
5	1	25	5
Total	**25**		**51**

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 2{,}04$$

Moda: 2

Mediana: 2

Los datos se agrupan en torno a 2,04, que casi coincide con la moda y la mediana.

4 Los puntos que han conseguido unos jugadores de baloncesto por partido han sido:

Nº de puntos	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
Nº de jugadores	2	5	6	4	3

Calcula la media y la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta los resultados.

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0 - 4	2	2	4	4	8
4 - 8	6	5	30	36	180
8 - 12	10	6	60	100	600
12 - 16	14	4	56	196	784
16 - 20	18	3	54	324	972
Total		**20**	**204**		**2 544**

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot n_i}{N} = 10,2$$

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2 = 23,16$$

$$\sigma = 4,81$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0,47 \Rightarrow 47\%$$

Los datos se agrupan en torno a 10,2 puntos, con una dispersión del 47%. Los datos están muy dispersos.

5 Se ha realizado un estudio del precio medio de naranjas entre las fruterías de dos barrios, obteniéndose los resultados del margen. Justifica en qué barrio es más homogéneo el precio de las naranjas.

	Media	Desviación típica
Barrio A	3,2	0,16
Barrio B	2,5	0,45

Solución:

	Media	Desviación típica	CV
Barrio A	3,2	0,16	0,05 = 5%
Barrio B	2,5	0,45	0,18 = 18%

El barrio A tiene el precio de las naranjas más homogéneo. Tiene una dispersión del 5%, frente al 18% del precio que hay en el barrio B

Paso a paso

31 En una muestra de personas mayores de 60 años se han obtenido los siguientes datos respecto de su estado marital.

	A	B
1	Estado marital	
2	Datos cualitativos	
3	Variables	Frecuencias
4	x_i	n_i
5	Casados	28
6	Solteros	4
7	Viudos	6
8	Divorciados	2
9	Total	
10	Parámetros de centralización	
11	Moda	

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

32 Se ha hecho una encuesta a 40 personas sobre el número de libros leídos el último mes, y se han obtenido los resultados siguientes:

1	Lectura					
2	Datos cuantitativos discretos					
3	Valores	Frecuencias				
4	x_i	n_i	N_i	$x_i * n_i$	x_i^2	x_i^2* n_i
5	0	4				
6	1	12				
7	2	14				
8	3	8				
9	4	2				
10	Total					
11	Parámetros de centralización					
12	Moda					
13	Mediana					
14	Media					
15	Parámetros de dispersión					
16	Variaza					
17	Desviación típica					
18	Coeficiente de variación					

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

33 Las calificaciones de 28 alumnos de 4º se han organizado en la tabla siguiente:

Calificaciones	Frecuencias
x_i	n_i
0 - 2	1
2 - 4	4
4 - 6	9
6 - 8	8
8 - 10	6

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

34 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

35 Una empresa dedica en inversión publicitaria en distintos medios las siguientes cantidades:

Medio	Dinero (miles €)
Televisión	50
Prensa	38
Radio	9
Otros	23

Obtén los parámetros de centralización y de dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta el resultado.

Solución:

	A	B
1	Publicidad	
2	Datos cualitativos	
3	Variables	Frecuencias
4	x_i	n_i
5	Televisión	50
6	Prensa	38
7	Radio	9
8	Otros	23
9	Total	120
10	Parámetros de centralización	
11	Moda	Televisión

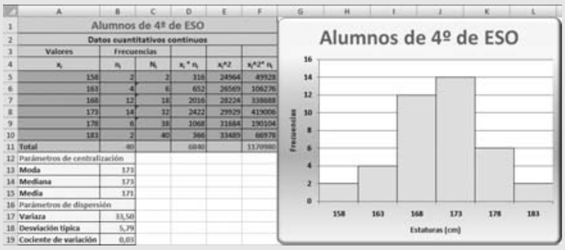
Interpretación
Se gasta casi todo el presupuesto entre Televisión y Prensa.

36 Se han medido las estaturas en centímetros de 40 alumnos de 4º de ESO, obteniendo los siguientes datos:

Intervalo	Frecuencias: n_i
155,5 - 160,5	2
160,5 - 165,5	4
165,5 - 170,5	12
170,5 - 175,5	14
175,5 - 180,5	6
180,5 - 185,5	2

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:



Interpretación

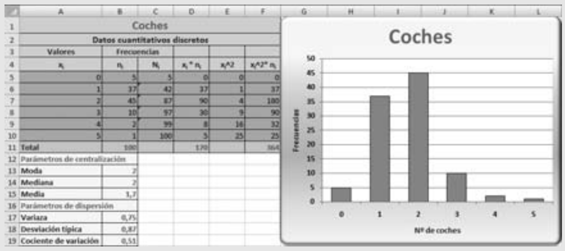
La estatura media es de 171 cm, y como el cociente de variación es **0,03,** que es menor que **0,30,** están muy agrupados.

37 En una ciudad se ha realizado un estudio sobre el número de coches que hay por cada familia, y se han obtenido los siguientes datos:

Valores: x_i	Frecuencias: n_i
0	5
1	37
2	45
3	10
4	2
5	1

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:



Interpretación

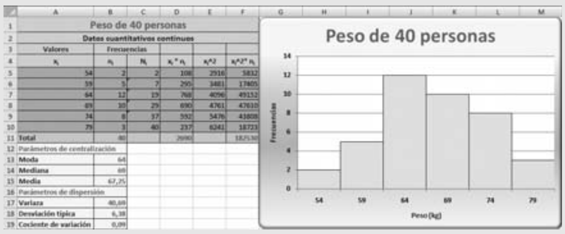
La media es de 1,7 coches por familia, y como el coeficiente de variación es **0,51,** que es mayor que **0,30,** están muy dispersos.

38 El peso de 40 personas se ha distribuido en los siguientes intervalos:

Intervalo	Frecuencias: n_i
51,5 - 56,5	2
56,5 - 61,5	5
61,5 - 66,5	12
66,5 - 71,5	10
71,5 - 76,5	8
76,5 - 81,5	3

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido y haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:



Interpretación

El peso medio es de unos 67 kg, y como el coeficiente de variación es **0,09,** que es menor que **0,30,** están muy agrupados.

14 Combinatoria y probabilidad

1. Variaciones y permutaciones

PIENSA Y CALCULA

Un restaurante oferta, en el menú del día, 5 platos de primero, 4 de segundo y 3 de postre. ¿Cuántos menús diferentes se pueden pedir?

Solución:
Nº de menús: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

APLICA LA TEORÍA

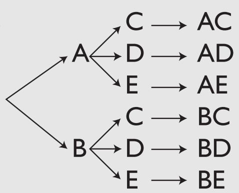
1 Calcula mentalmente:

a) $V_{5,3}$ b) $VR_{6,2}$ c) P_4 d) PC_6

Solución:
a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
b) $6^2 = 36$
c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2 Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas en que puede vestirse una persona que tiene dos camisas y tres pantalones. ¿Cuántas son?

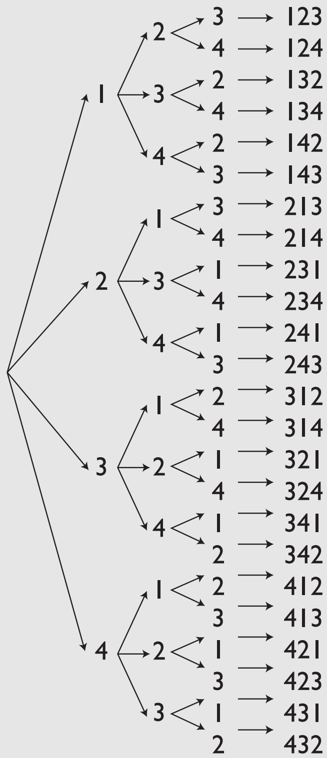
Solución:
Sean las camisas A y B y los pantalones C, D y E



Número $= 2 \cdot 3 = 6$

3 Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?

Solución:



$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

4 Con los dígitos 8 y 9, forma todos los números de tres cifras que puedas. ¿Cuántos son?

Solución:

8 → 8 → 8 → 888
8 → 8 → 9 → 889
8 → 9 → 8 → 898
8 → 9 → 9 → 899
9 → 8 → 8 → 988
9 → 8 → 9 → 989
9 → 9 → 8 → 998
9 → 9 → 9 → 999

$VR_{2,3} = 2^3 = 8$

5 Con los dígitos 1, 2 y 3 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna. ¿Cuántos son?

Solución:

1 → 2 → 3 → 123
1 → 3 → 2 → 132
2 → 1 → 3 → 213
2 → 3 → 1 → 231
3 → 1 → 2 → 312
3 → 2 → 1 → 321

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

6 ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa circular, de forma que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

Solución:

$PC_5 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

7 El sistema actual de matrículas dice: «En las placas de matrícula se inscribirán dos grupos de caracteres constituidos por un número de cuatro cifras, que irá desde el 0000 al 9999, y de tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales y las letras Ñ, Q, CH y LL».

¿Cuántas matrículas hay con las letras BBB?

Solución:

$VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$

8 Halla, usando la calculadora:

a) $V_{10,4}$　　b) $VR_{6,4}$
c) P_{10}　　d) PC_{12}

Solución:

a) 5 040　　b) 1 296
c) 3 628 800　　d) 39 916 800

2. Combinaciones y resolución de problemas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{7}{0}$　　b) $\binom{8}{1}$　　c) $\binom{5}{5}$　　d) $\binom{6}{5}$

Solución:

a) 1　　b) 8　　c) 1　　d) 6

9 Calcula mentalmente:

a) $C_{5,2}$ b) $C_{6,4}$

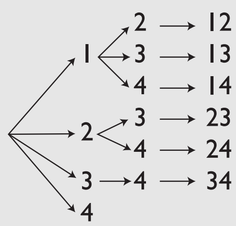
Solución:

a) $5 \cdot 4/2 = 10$

b) $C_{6,4} = C_{6,2} = 6 \cdot 5/2 = 15$

10 Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma todos los números de dos cifras que puedas sin que se repita ninguna y de modo que ningún par de números tenga las mismas cifras.

Solución:



$C_{4,2} = 4 \cdot 3/2 = 6$

11 ¿Cuántas columnas de quinielas hay que cubrir como mínimo para acertar una de pleno al 15?

Solución:

a) E = {1, X, 2}, m = 3. Dos ejemplos significativos son: X1X11112121XX11, 111XXX111XXX1X1, p = 15

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición ⇒ Variaciones con repetición.

c) $VR_{3,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$

12 En una clase hay 25 alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir un delegado y un subdelegado?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, …, 25}, m = 25. Dos ejemplos significativos son: 35, 53, p = 2

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600$

13 ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, …, 10}, m = 10. Dos ejemplos significativos son: 25, 79, p = 2

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

Hay que quitar los lados.

c) $C_{10,2} - 10 = \binom{10}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$

14 Con 8 jugadores, ¿cuántos equipos de baloncesto se pueden formar, si cada jugador puede jugar en cualquier puesto?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, …, 8}, m = 8. Dos ejemplos significativos son: 25 318, 53 467, p = 5

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{8,5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

15 Halla, usando la calculadora:

a) $C_{7,3}$ b) $C_{8,4}$

Solución:

a) 35 b) 70

3. Experimentos aleatorios simples

PIENSA Y CALCULA

¿Cuántas caras tiene un dado de quinielas? ¿Qué es más probable obtener: 1, X o 2?

Solución:
Un dado de quinielas tiene 6 caras, tres caras tienen un 1, dos caras tienen una X y una cara tiene un 2
El más probable es el 1, por que es el que más veces está.

APLICA LA TEORÍA

16 Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6\}$. Calcula:
a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $\overline{A}$ d) $\overline{B}$

Solución:
a) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$
b) $\{6\}$
c) $\{1, 3, 5, 7\}$
d) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

17 Halla la probabilidad de obtener par al lanzar un dado de 6 caras.

Solución:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$Par = \{2, 4, 6\}$
$P(par) = 3/6 = 1/2$

18 Se sabe que $P(A) = 5/6$. Halla $P(\overline{A})$

Solución:
$P(\overline{A}) = 1 - 5/6 = 1/6$

19 Se lanzan 100 chinchetas al aire y 65 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta quede con la punta hacia arriba.

Solución:
$f(\ ) = \dfrac{65}{100} = 0,65$

20 Se sabe que:
$P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/5$
Calcula $P(A \cup B)$

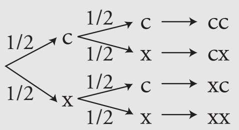
Solución:
$P(A \cup B) = 2/3 + 1/2 - 1/5 = 29/30$

4. Experimentos aleatorios compuestos

PIENSA Y CALCULA

Diseña un árbol de probabilidades para el experimento de lanzar dos monedas al aire.

Solución:



21 Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 9

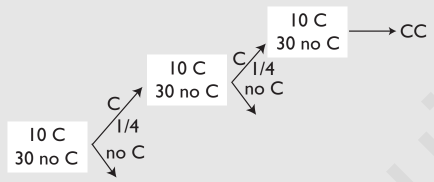
Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P(9) = 4/36 = 1/9

22 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas, se observa si ha sido de copas y se vuelve a introducir; luego se extrae otra carta. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

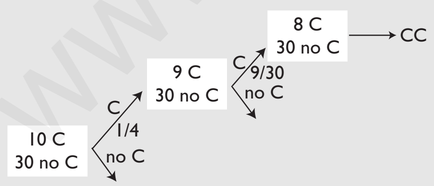
Solución:



P(CC) = 1/4 · 1/4 = 1/16

23 Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

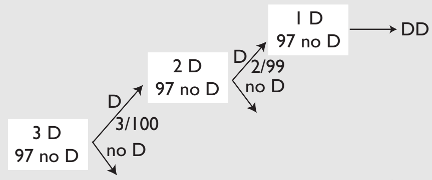
Solución:



P(CC) = 1/4 · 9/30 = 3/40

24 Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Si se cogen dos tornillos, halla la probabilidad de que al coger el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

Solución:



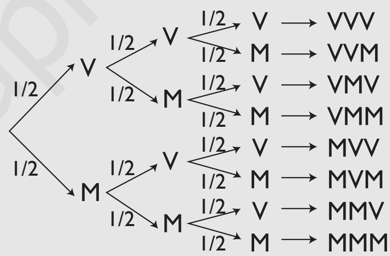
D/D es la segunda rama.

P(D/D) = 2/99

El segundo suceso D/D es dependiente del primero D, pues depende de si ha salido D o no D

25 Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que los tres sean varones.

Solución:

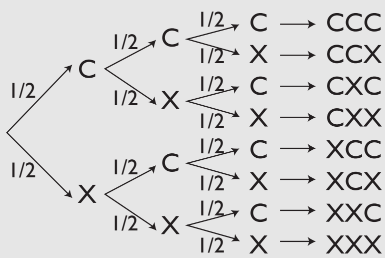


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

P(VVV) = 1/2 · 1/2 · 1/2 = 1/8

26 Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.

Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = 1/8 + 1/8 + 1/8 =
= 3/8

1. Variaciones y permutaciones

27 Calcula mentalmente:

a) $V_{10,3}$
b) $VR_{10,3}$

Solución:
a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
b) $10^3 = 1\,000$

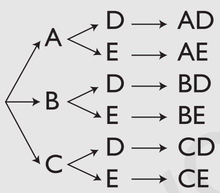
28 Calcula mentalmente:

a) P_5
b) PC_4

Solución:
a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

29 Organizamos una fiesta y llevamos tres clases de bocadillos y dos clases de refrescos. Dibuja el árbol correspondiente a las distintas formas de elegir un bocadillo y un refresco. ¿Cuántas son?

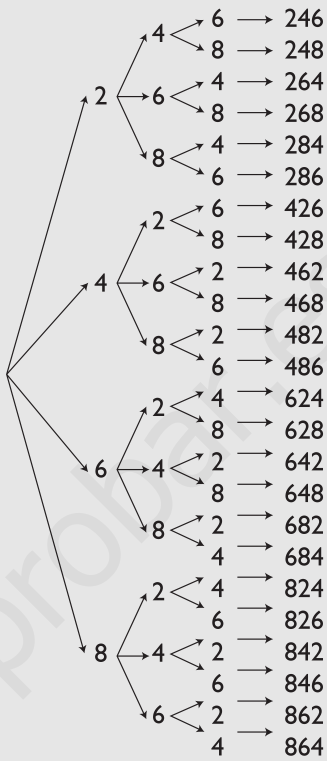
Solución:
Sean los bocadillos A, B y C y los refrescos D y E



Número = $3 \cdot 2 = 6$

30 Con los dígitos 2, 4, 6 y 8 forma todos los números de tres cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?

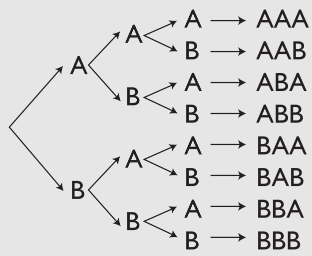
Solución:



$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

31 Con las letras A y B forma todas las palabras de tres letras que puedas, tengan o no sentido. ¿Cuántas son?

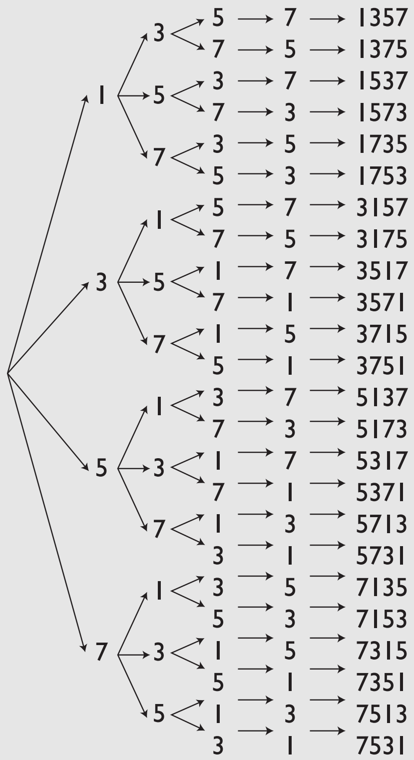
Solución:



$VR_{2,3} = 2^3 = 8$

32 Con los dígitos 1, 3, 5 y 7 forma todos los números de cuatro cifras que puedas sin que se repita ninguna cifra. ¿Cuántos son?

Solución:



$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

33 ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas alrededor de una mesa circular, de forma que en cada caso haya al menos dos personas sentadas en diferente orden?

Solución:

$PC_{10} = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

34 En el sistema actual de matrículas, ¿de cuántas formas se pueden colocar las letras sabiendo que cada matrícula contiene tres letras, empezando por las letras BBB y terminando por las letras ZZZ, suprimiéndose las cinco vocales, y las letras Ñ, Q, CH y LL?

Solución:

BCDFGHJKLMNPRSTVWXYZ

$VR_{20,3} = 20^3 = 8\,000$

35 Calcula, usando la calculadora:

a) $V_{8,5}$ b) $VR_{7,3}$

Solución:

a) 6 720

b) 343

36 Calcula, usando la calculadora:

a) P_6

b) PC_8

Solución:

a) 720

b) 5 040

2. Combinaciones y resolución de problemas

37 Calcula mentalmente:

a) $C_{10,2}$

b) $C_{11,9}$

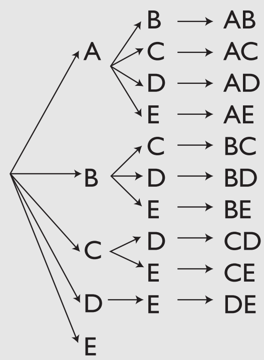
Solución:

a) $10 \cdot 9/2 = 45$

b) $C_{11,9} = C_{11,2} = 11 \cdot 10/2 = 55$

38 Con las letras A, B, C, D y E forma todas las palabras que puedas de dos letras sin que se repita ningún par de palabras, tengan o no sentido, y de modo que ningún par de palabras tenga las mismas letras.

Solución:



$C_{5,2} = 5 \cdot 4/2 = 10$

39 Disponemos de 5 frutas diferentes para preparar zumos de dos sabores. ¿Cuántos zumos podemos hacer?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D, E\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: AB, BC, $p = 2$

b) No influye el orden $\Rightarrow$ Combinaciones.

c) $C_{5,2} = 5 \cdot 4/2 = 10$

40 En una comunidad que está formada por 20 vecinos, se quiere elegir una junta formada por un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede elegir la junta?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$, $m = 20$. Dos ejemplos significativos son: 529, 517, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones ordinarias.

c) $V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$

41 De una baraja española de 40 cartas se cogen 4 cartas sin devolución. ¿De cuántas formas se pueden coger?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 40\}$, $m = 40$. Dos ejemplos significativos son: 1579, 1568, $p = 4$

b) No influye el orden $\Rightarrow$ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{40,4} = \binom{40}{4} = 91\,390$

42 ¿De cuántas formas se pueden colocar 6 personas alrededor de una mesa circular?

Solución:

a) $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 6\}$, $m = 6$. Dos ejemplos significativos son: 123456, 123564, $p = 6$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones circulares.

c) $PC_6 = 5! = 120$

43 Halla, usando la calculadora:

a) $C_{10,5}$ b) $C_{15,7}$

Solución:

a) 252 b) 6 435

3. Experimentos aleatorios simples

44 Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 6, 9\}$. Calcula:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) ¿A y B son compatibles o incompatibles?

d) $\overline{A}$

e) $\overline{B}$

Solución:

a) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

b) $\{3, 9\}$

c) A y B son compatibles.

d) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

e) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

45 Halla la probabilidad de obtener múltiplo de 3 al lanzar un dado de 6 caras.

Solución:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{3, 6\}$

$P(A) = 2/6 = 1/3$

46 Se sabe que $P(A) = 2/5$. Halla $P(\overline{A})$

Solución:

$P(\overline{A}) = 1 - 2/5 = 3/5$

47 Se lanzan 100 chinchetas al aire y 66 quedan con la punta hacia arriba. Halla la frecuencia relativa de que la chincheta no quede con la punta hacia arriba.

Solución:

$f(\text{No}\ ) = \dfrac{34}{100} = 0{,}34$

48 Se sabe que:

$P(A) = 3/4$, $P(B) = 2/5$ y $P(A \cup B) = 8/9$

Calcula:

$P(A \cap B)$

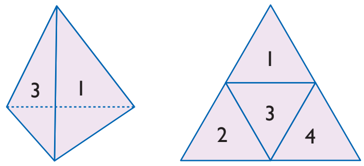
Solución:

$3/4 + 2/5 - P(A \cap B) = 8/9$

$P(A \cap B) = 47/180$

4. Experimentos aleatorios compuestos

49 Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4 la suma de números obtenidos sea 6. ¿Qué suma es la más probable?



Solución:

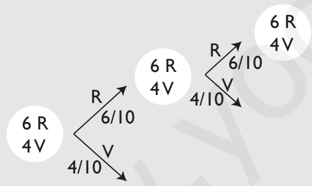
P(6) = 3/16

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

El más probable es el 5, porque es el que más veces aparece.

50 Se extrae una bola de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes, se observa si ha sido roja y se vuelve a introducir; luego se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

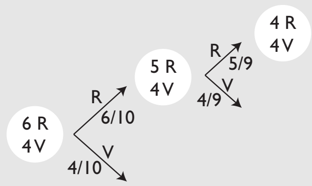
Solución:



P(RR) = 6/10 · 6/10 = 9/25

51 Se extraen de una vez dos bolas de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?

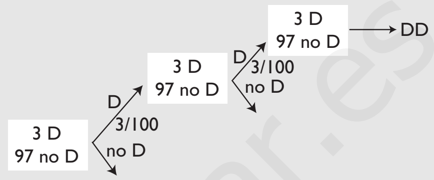
Solución:



P(RR) = 6/10 · 5/9 = 1/3

52 Una máquina produce 100 tornillos de los que 3 son defectuosos. Se coge un tornillo, se mira si es defectuoso y se devuelve. Halla la probabilidad de que al coger aleatoriamente el segundo sea defectuoso, con la condición de que el primero también haya sido defectuoso. ¿Cómo son ambos sucesos, dependientes o independientes?

Solución:

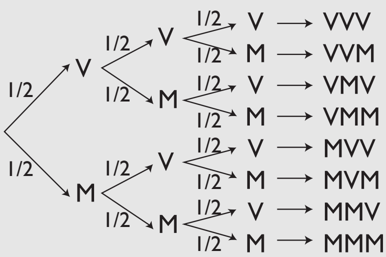


P(D/D) = 3/100

El segundo suceso D/D es independiente del primero D, pues no depende de si ha salido D o no D

53 Una familia tiene tres hijos. Halla la probabilidad de que uno sea varón.

Solución:

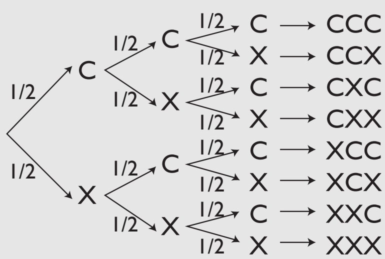


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

P(VMM) + P(MVM) + P(MMV) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8

54 Se lanzan tres monedas al aire. Halla la probabilidad de que las tres sean cruz.

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

P(XXX) = 1/2 · 1/2 · 1/2 = 1/8

Para ampliar

55 Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{50}{0}$

b) $\binom{50}{50}$

Solución:

a) 1

b) 1

56 Calcula mentalmente los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{100}{1}$

b) $\binom{100}{98}$

Solución:

a) 100

b) 4 950

57 ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar?

Solución:

a) E = {0, 1, 2, 3, …, 9}, m = 10. Dos ejemplos significativos son: 1 122, 2 135, p = 4

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición ⇒ Variaciones con repetición.

Hay que quitar todos los que son menores de 1 000

c) $VR_{10,4} - 1\,000 = 10^4 - 1\,000 = 9\,000$

58 ¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar con las cifras impares de forma que no se repita ninguna cifra? ¿Cuántos de ellos son impares?

Solución:

a) E = {1, 3, 5, 7, 9}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 13 597, 53 197, p = 5

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Son impares los que terminan en número impar; en este caso, todos.

59 Un alumno de 4º B tiene 5 camisetas, 4 pantalones y 3 pares de zapatillas de deporte. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse para ir a entrenar?

Solución:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas diferentes.

60 Si lanzamos al aire un dado y una moneda, ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener?

Solución:

$6 \cdot 2 = 12$ resultados diferentes.

61 Cinco amigos van al cine y sacan las entradas seguidas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, 5}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 12345, 54123, p = 5

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

62 Con las letras de la palabra MESA, ¿cuántas palabras se pueden formar, tengan o no sentido?

Solución:

a) E = {A, E, M, S}, m = 4. Dos ejemplos significativos son: MESA, ESMA, p = 4

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_4 = 4! = 24$

63 Calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:

$\binom{5}{2} = \binom{5}{x}$

Solución:
x = 2, o bien x = 3

64 Calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:
$V_{x,3} = 30x$

Solución:
$x(x - 1)(x - 2) = 30x$
$x^2 - 3x + 2 = 30$
$x = 7$

65 Calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:
$V_{x,4} = 6V_{x,2}$

Solución:
$x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 6x(x - 1)$
Se simplifican ambos miembros entre $x(x - 1)$, ya que $x > 3$
$x^2 - 5x + 6 = 6$
$x = 5$

66 Calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:
$P_x = 20P_{x-2}$

Solución:
$x! = 20(x - 2)!$
$x(x - 1) = 20$
$x = 5$

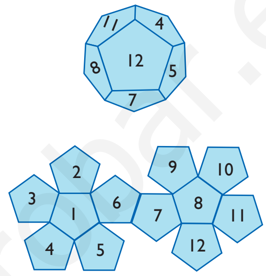
67 Calcula el valor de **x** en la siguiente igualdad:
$2C_{x,2} = V_{x,2}$

Solución:
$2x(x - 1)/2 = x(x - 1)$
$x(x - 1) = x(x - 1)$
Vale cualquier $x > 1$

68 Una urna contiene 7 bolas rojas, 5 verdes y 3 azules. Si se extrae una bola, ¿qué probabilidad hay de que
a) sea verde?
b) no sea roja?
c) sea roja o verde?

Solución:
E = {7R, 5V, 3A}
a) P(verde) = 5/15 = 1/3
b) P(no roja) = 8/15
c) P(roja o verde) = 12/15 = 4/5

69 Se lanza un dado con forma de dodecaedro y las caras numeradas del 1 al 12. Halla la probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3



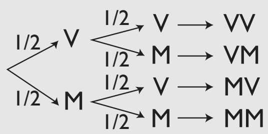
Solución:
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
A = {3, 6, 9, 12}
P(A) = 4/12 = 1/3

70 Se extrae una carta de una baraja española de 48 cartas. Calcula la probabilidad de que sea un nueve.

Solución:
E = {48 cartas}
A = {9O, 9C, 9E, 9B}
P(A) = 4/48 = 1/12

71 En una familia con dos hijos, ¿qué probabilidad tiene de que sean
a) los dos varones?
b) uno varón y el otro mujer?

Solución:



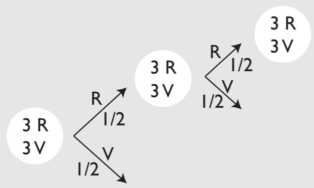
a) Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.
P(VV) = 1/2 · 1/2 = 1/4

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(VM) + P(MV) = 1/4 + 1/4 = 1/2$

72 Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se observa el color; se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que sean las dos rojas.

Solución:

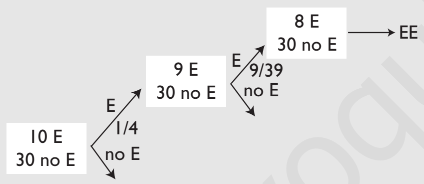


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(RR) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

73 Se extraen de una vez dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las dos sean de espadas.

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(EE) = 1/4 \cdot 9/39 = 3/52$

74 Se lanzan al aire dos dados de 4 caras numeradas del 1 al 4. Calcula la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea mayor que 5

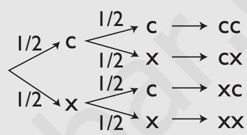
Solución:

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

P(más de 5) = 6/16 = 3/8

75 Se lanzan al aire dos monedas. Calcula la probabilidad de obtener a lo sumo una cara.

Solución:



$P(CC) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

$P(\text{a lo sumo una cara}) = 1 - P(CC) = 1 - 1/4 = 3/4$

76 En un dado de quinielas, halla la probabilidad de no obtener el 2

Solución:

$E = \{1, 1, 1, X, X, 2\}$

P(no obtener 2) = 5/6

Con calculadora

77 Halla, utilizando la calculadora:

a) $V_{9,4}$ b) $VR_{3,15}$

Solución:

a) 3 024 b) 14 348 907

78 Halla, utilizando la calculadora:

a) P_{12} b) PC_9

Solución:

a) $12! = 479\,001\,600$ b) $8! = 40\,320$

79 Halla, utilizando la calculadora:

a) $C_{12,5}$ b) $C_{12,7}$

Solución:

a) 792 b) 792

Problemas

80 En la carta de un restaurante se puede elegir un menú compuesto de un primer plato, un segundo plato y un postre. Hay para elegir 8 primeros platos, 5 segundos y 6 postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

Solución:

$8 \cdot 5 \cdot 6 = 240$ menús.

81 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar sin repetir los dígitos? ¿Cuántos de ellos son pares?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, 5}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 23 541, 31 524, p = 5

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Serán pares todas las que terminen en 2 y 4

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$

82 En un trofeo de verano juegan cuatro equipos. ¿De cuántas formas se pueden emparejar?

Solución:

a) E = {A, B, C, D}, m = 4. Dos ejemplos significativos son: AB, AC, p = 2

b) No influye el orden. ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{4,2} = 4 \cdot 3/2 = 6$

83 Existen 5 pueblos colocados en los vértices de un pentágono regular, y se quiere construir una carretera para unir cada dos pueblos. ¿Cuántas carreteras hay que hacer?

Solución:

a) E = {A, B, C, D, E}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: AC, BC, p = 2

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{5,2} = 5 \cdot 4/2 = 10$

84 El AVE que va de Madrid a Sevilla tiene 5 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes se pueden sacar?

Solución:

a) E = {A, B, C, D, E}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: AC, CA, p = 2

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

85 Un *byte* está formado por ceros y unos, y en total son 8. ¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden presentar?

Solución:

a) E = {0, 1}, m = 2. Dos ejemplos significativos son: 10010111, 11111111, p = 8

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición. ⇒ Variaciones con repetición.

c) $VR_{2,8} = 2^8 = 256$

86 Tenemos siete clases de fruta para obtener batidos de tres sabores. ¿Cuántos sabores se pueden obtener?

Solución:

a) E = {A, B, C, D, E, F, G}, m = 7. Dos ejemplos significativos son: BDE, BFG, p = 3

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{7,3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

87 En un certamen literario hay tres premios: ganador, finalista y accésit. Si se presentan 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden dar los tres premios?

Solución:

a) E = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}, m = 10. Dos ejemplos significativos son: AGC, CGA, p = 3

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

88 ¿Cuántas banderas de tres colores diferentes se pueden formar con 8 colores?

Solución:

a) $E = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, $m = 8$. Dos ejemplos significativos son: ADE, DAE, $p = 3$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones ordinarias.

c) $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

89 Una familia tiene 5 hijos. ¿Cuántas posibilidades hay con respecto al sexo de los hijos?

Solución:

a) $E = \{V, M\}$, $m = 2$. Dos ejemplos significativos son: VVVMM, MMMMM, $p = 5$

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición $\Rightarrow$ Variaciones con repetición.

c) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

90 Con las letras de la palabra RATON, ¿cuántas palabras de cinco letras se pueden formar, tengan o no sentido? ¿Cuántas empiezan por consonante?

Solución:

a) $E = \{A, N, O, R, T\}$, $m = 5$. Dos ejemplos significativos son: RATON, NOTAR, $p = 5$

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición $\Rightarrow$ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

Empiezan por consonante: $3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 72$

91 Calcula la probabilidad de acertar una quiniela de pleno al 15 si se cubre una apuesta.

Solución:

E tiene $VR_{3,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$ posibilidades.

P(acertar) = 1/14348907

92 En un grupo de 80 personas, 50 escuchan la radio, 60 ven la televisión y 30 escuchan la radio y ven la televisión. Halla la probabilidad de que, elegida una persona al azar, no escuche la radio ni vea la televisión.

Solución:

$P(R) = 50/80 = 5/8$

$P(T) = 60/80 = 3/4$

$P(R \cap T) = 30/80 = 3/8$

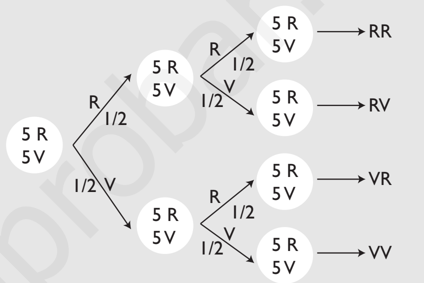
$P(R \cup T) = 5/8 + 3/4 - 3/8 = 1$

P(no escuchar la radio, ni ver la televisión) =

$= 1 - P(R \cup T) = 1 - 1 = 0$

93 Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 verdes. Se extrae una bola y se observa el color, se vuelve a introducir y se extrae otra bola. Calcula la probabilidad de que una sea roja y otra sea verde.

Solución:

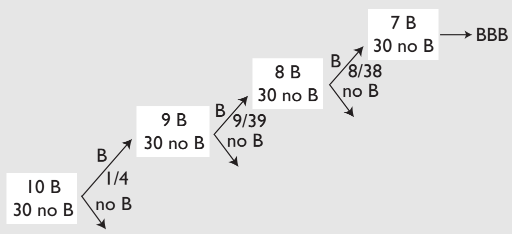


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(RV) + P(VR) = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 + 1/4 =$
$= 1/2$

94 Se extraen de una vez tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Calcula la probabilidad de que las tres sean de bastos.

Solución:

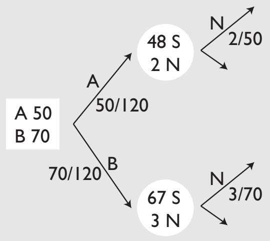


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(BBB) = 1/4 \cdot 9/39 \cdot 8/38 = 3/247$

95 Se compran 50 ordenadores de una marca A y 70 de una marca B. De la marca A hay 2 que no funcionan; y de la marca B hay 3 que no funcionan. Si se elige al azar uno de los ordenadores, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione?

Solución:

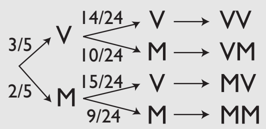


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

P(AN) + P(BN) = 50/120 · 2/50 + 70/120 · 3/70 =
= 1/24

96 En una clase hay 15 chicos y 10 chicas. Si se eligen dos alumnos al azar, calcula la probabilidad de que los dos sean chicas.

Solución:

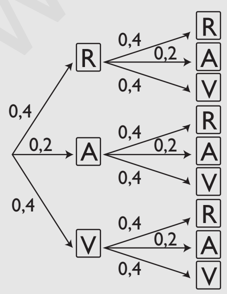


Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

P(MM) = 2/5 · 9/24 = 3/20

97 Una persona cruza dos semáforos para ir al trabajo. La probabilidad de que cada uno de ellos esté rojo es de 0,4; de que esté ámbar, 0,2, y de que esté verde, 0,4. Calcula la probabilidad de que uno esté verde y el otro rojo.

Solución:

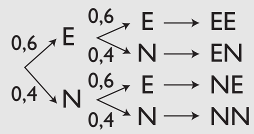


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

P(RV) + P(VR) = 0,4 · 0,4 + 0,4 · 0,4 = 0,32

98 Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de 0,6 de hacer un triple. Si hace dos lanzamientos de triple, ¿qué probabilidad tiene de que no enceste ninguno?

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

P(NN) = 0,4 · 0,4 = 0,16

Para profundizar

99 Un equipo de fútbol está formado por 11 jugadores. 6 se ponen de pie, y delante los otros cinco agachados. ¿De cuántas formas se pueden colocar para hacer una foto si el portero siempre está de pie el primero por la izquierda?

Solución:

Dejaremos el portero fijo y no lo tendremos en cuenta a la hora de contar.

a) E = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}, m = 10. Dos ejemplos significativos son: AGCDEFBIJH, IGECABDFHJ, p = 10

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) P_{10} = 10! = 3 628 800

100 ¿De cuántas formas puede elegir un equipo de fútbol, formado por un portero, tres defensas, 2 medios, 2 extremos y 3 delanteros, un entrenador que tiene 25 jugadores, de los que 3 son porteros; 6, defensas; 4, medios; 4, extremos, y el resto, delanteros?

Solución:

$C_{3,1} \cdot C_{6,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{8,3} = 3 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 56 =$
$= 120\,960$

101 ¿Cuántas matrículas totales se pueden hacer con el sistema actual, que está formado de cuatro números y tres letras. Las letras disponibles son 20.

Solución:

$VR_{10,4} \cdot VR_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 10\,000 \cdot 8\,000 =$
$= 80\,000\,000$

102 Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos una bola, anotamos el número y la volvemos a introducir; volvemos a repetir el proceso otras dos veces. ¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, 5}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 22323, 33222, p = 5

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y puede haber repetición ⇒ Variaciones con repetición.

c) $VR_{5,5} = 5^5 = 3\,125$

103 Una bolsa tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos tres bolas de una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden presentar?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, 5}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 125, 235, p = 3

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{5,3} = 5 \cdot 4/2 = 10$

104 Con las cifras impares, ¿cuántos números de 3 cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 500?

Solución:

a) E = {1, 3, 5, 7, 9}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 975,795, p = 3

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

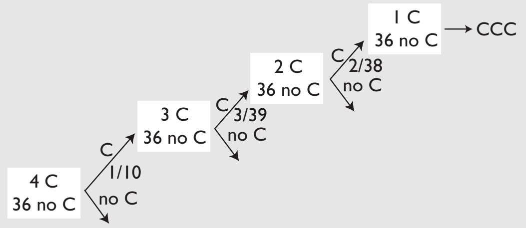
c) $V_{5,3} = 5^3 = 125$

Serán mayores de 500 todos los que empiecen por 5, 7 o 9

$3 \cdot VR_{4,2} = 3 \cdot 4^2 = 48$

105 Se extraen, de una baraja española de 40 cartas, tres cartas al azar. Calcula la probabilidad de que sean caballos las tres.

Solución:



Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta.

$P(CCC) = 1/10 \cdot 3/39 \cdot 2/38 = 1/2\,470$

106 Se lanzan al aire dos dados, uno de 6 caras numeradas del 1 al 6 y el otro de 4 caras numeradas del 1 al 4. ¿Qué probabilidad hay de que sumen 7?

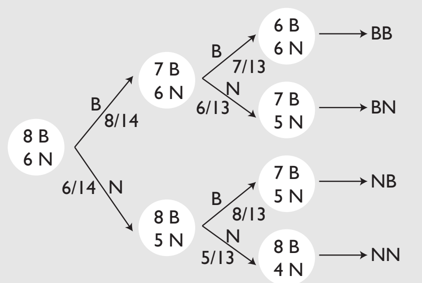
Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

P(9) = 4/24 = 1/6

107 En un cajón tenemos 8 calcetines blancos y 6 negros. Si sacamos dos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean de distinto color?

Solución:

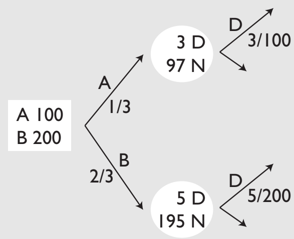


Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

$P(BN) + P(NB) = 8/14 \cdot 6/13 + 6/14 \cdot 8/13 = 48/91$

108 Se tienen dos máquinas produciendo tornillos. Una produce 100 tornillos, de los que 3 son defectuosos, y la otra produce 200 tornillos, de los que 5 son defectuosos. Si se escoge al azar uno de los 300 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

P(AD) + P(BD) = 1/3 · 3/100 + 2/3 · 5/200 = 2/75

109 Se elige aleatoriamente una ficha de un dominó. ¿Qué probabilidad hay de que sea doble?

Solución:

P(doble) = 7/28 = 1/4

110 Se ha trucado un dado de forma que:

P(1) = P(3) = P(5), P(2) = P(4) = P(6) = 2P(1)

a) Halla la probabilidad de obtener un 3

b) Halla la probabilidad de obtener un 6

Solución:

P(1) = P(3) = P(5) = x

P(2) = P(4) = P(6) = 2x

3x + 6x = 1 ⇒ x = 1/9

a) P(3) = 1/9

b) P(6) = 2/9

Aplica tus competencias

111 ¿Cuántas palabras hay de 8 caracteres?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112 ¿Cuántas palabras hay de 10 caracteres?

Solución:
$VR_{2,\,10} = 2^{10} = 1\,024$, que se conoce con el nombre de 1 Kb *(Kilobyte)*.

113 ¿Cuántas palabras hay de 20 caracteres?

Solución:
$VR_{2,\,20} = 2^{20} = 1\,048\,576$, que se conoce con el nombre de 1 Mb *(Megabyte)*.

114 ¿Cuántas palabras hay de 30 caracteres?

Solución:
$VR_{2,\,30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$, que se conoce con el nombre de 1 Gb *(Gigabyte)*.

115 ¿Cuántas palabras hay de 40 caracteres?

Solución:
$VR_{2,\,40} = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$, que se conoce con el nombre de 1 Tb *(Terabyte)*.

Comprueba lo que sabes

1 Escribe el enunciado de la regla de Laplace y pon un ejemplo.

Solución:

La **regla de Laplace** dice que la probabilidad de un suceso A, de un espacio muestral E, formado por sucesos elementales *equiprobables,* es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables al suceso A}}{\text{Nº de casos posibles}}$$

Sucesos equiprobables

Los sucesos elementales de un espacio muestral son *equiprobables* si tienen la misma posibilidad de presentarse; sólo en estos casos se puede aplicar la **regla de Laplace.**

Ejemplo

Halla la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado de seis caras.

Espacio muestral: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Suceso A = {2, 3, 5}

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

2 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar sin repetir ninguna? ¿Cuántos son mayores de 300?

Solución:

a) E = {1, 2, 3, 4, 5}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: 134, 341, p = 3

b) Influye el orden, no entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Variaciones ordinarias.

c) $V_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Serán mayores de 300 los que empiecen por 3, 4 o 5

$3 \cdot V_{4,\,2} = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

3 Con las letras de la palabra LIBRO, ¿cuántas palabras, tengan o no sentido, se pueden formar?

Solución:

a) E = {B, I, L, O, R}, m = 5. Dos ejemplos significativos son: LIBRO, ROBIL, p = 5

b) Influye el orden, entran todos los elementos y no puede haber repetición ⇒ Permutaciones ordinarias.

c) $P_5 = 5! = 120$

4 En una clase hay 25 alumnos y se quiere hacer una comisión formada por tres alumnos. ¿De cuántas formas se puede elegir?

Solución:

a) E = {1, 2, 3 …, 25}, m = 25. Dos ejemplos significativos son: 358, 258, p = 3

b) No influye el orden ⇒ Combinaciones ordinarias.

c) $C_{25,\,3} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,300$

5 Se sabe que:

$P(A) = 3/5$, $P(B) = 2/5$ y $P(A \cap B) = 1/3$

Halla:

$P(A \cup B)$

Solución:

$P(A \cup B) = 3/5 + 2/5 - 1/3 = 2/3$

6 Se lanzan al aire dos dados de seis caras numeradas del 1 al 6 y se suman los puntos obtenidos. ¿Qué suma de puntuaciones tiene mayor probabilidad? Halla su probabilidad.

Solución:

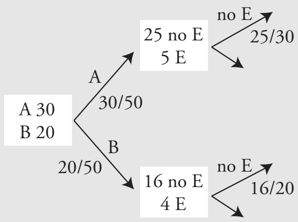
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma de puntuaciones que tiene mayor probabilidad es 7, porque es el resultado que más veces se presenta.

$P(7) = 6/36 = 1/6$

7 Se prueba en 30 personas una vacuna A contra la gripe y enferman 5. Se prueba en 20 personas otra vacuna B y enferman 4. Si se elige una de las personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que no haya enfermado?

Solución:



Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total.

P(no E) = 30/50 · 25/30 + 20/50 · 16/20 = 41/50

8 Un jugador de fútbol mete 4 goles de cada 10 tiros a puerta. Si tira 3 tiros a puerta, halla la probabilidad de que, al menos, meta un gol.

Solución:

P(NNN) = 6/10 · 6/10 · 6/10 = 27/125

P(al menos 1 gol) = 1 – P(NNN) =

= 1 – 27/125 = 98/125

Paso a paso

116 Investiga sobre la **Ley de los grandes números:** simula el lanzamiento de un dado con forma de tetraedro con las caras numeradas del 1 al 4. Haz distintos lanzamientos, cuenta el número de éstos y las frecuencias absolutas de obtener una de las caras, por ejemplo el **3.** Calcula las frecuencias relativas y represéntalas en un gráfico de líneas. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

117 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

118 En la **Hoja2** del mismo libro investiga sobre la **Ley de los grandes números:** simula el lanzamiento de un dado de forma cúbica con las caras numeradas del 1 al 6. Realiza distintos lanzamientos y cuenta el número de éstos y las frecuencias absolutas de obtener una de las caras, por ejemplo el **5.** Calcula las frecuencias relativas y represéntalas en un gráfico de líneas. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:
Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de **0,17 = 1/6**

119 En la **Hoja3** del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma octaédrica, con las caras numeradas del 1 al 8, y obtener, por ejemplo, el 6. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:
Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de **0,125 = 1/8**

120 En la **Hoja4** del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma de dodecaedro, con las caras numeradas del 1 al 12, y obtener la cara 9. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:
Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de **0,083 = 1/12**

121 En la **Hoja5** del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma de icosaedro, con las caras numeradas del 1 al 20, y obtener, por ejemplo, el 15. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, lo que en definitiva es la probabilidad?

Solución:
Las frecuencias relativas tienden hacia la probabilidad de **0,05 = 1/20**

122 Al final, guarda el libro en tu carpeta personal con el nombre **4C14** completo con todas las hojas de cálculo.

Solución:
Haz *clic* en el icono **Guardar**