

4. Ecuaciones con fracciones y radicales

- Para resolver la ecuación $\frac{x}{x^2-4} + 1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$, se multiplican sus dos miembros por el máximo común divisor de los denominadores; es decir, por $x^2 - 4$:

$$\frac{x(x^2-4)}{x^2-4} + 1(x^2-4) = \frac{x^2-4}{x+2} - \frac{x^2-4}{x-2}$$

Como $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$, al simplificar se obtiene la ecuación:

$$x + x^2 - 4 = x - 2 - (x + 2) \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$$

Las soluciones de esta última ecuación, $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$, son las de la ecuación inicial, porque no anulan sus denominadores.

- Para resolver la ecuación $\sqrt{x+1} + 1 = x$, se despeja la raíz pasando al otro miembro de la igualdad el resto de los términos, y después se elevan los dos miembros al cuadrado.

$$\sqrt{x+1} + 1 = x \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ y } x = 0$$

La solución es $x = 3$ porque $x = 0$ no lo es, ya que $\sqrt{1} + 1 \neq 0$

- 1** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1-x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{2x+2}{x+1} = \frac{3x+1}{x-1}$

- 2** Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $\frac{x}{\sqrt{x+9}} = \frac{\sqrt{x+9}}{x+1}$

b) $\sqrt{2x-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

c) $\sqrt{x+5} + 1 = x$

- 3** Calcula la solución de estas ecuaciones racionales:

a) $1 = \frac{2}{x-3}$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5}{x^2-1}$

c) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+2}$

4. Ecuaciones con fracciones y radicales

Solucionario

$$1) a) \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

Se multiplican los dos miembros por el máximo común divisor y se simplifica:

$$\frac{(1-x) \cdot (x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Por tanto, la solución es } x = \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{x+1}{x-2} + \frac{2x+2}{x+1} = \frac{3x+1}{x-1}$$

Se multiplican los dos miembros por el máximo común divisor y se simplifica:

$$\frac{(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x-2} + \frac{(2x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x+1} = \frac{(3x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot (x^2+1) + (2x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-1) = \frac{(3x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x-1} \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$.

$$2) a) \frac{x}{\sqrt{x+9}} = \frac{\sqrt{x+9}}{x+1} \Leftrightarrow x(x+1) = (x+9) \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$$

Por tanto, las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

$$b) \sqrt{2x-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow (2x-1) \cdot (x-1) = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$$

La solución es solo $x = 5$, porque $x = 0$ no lo es, ya que $\sqrt{-1}$ no existe.

$$c) \sqrt{x+5} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = x-1 \Leftrightarrow x+5 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 0$$

La solución es solo $x = 3$, porque $x = -1$ no lo es, ya que $\sqrt{-5} \neq -1$.

$$3) a) 1 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x-3 = 2 \Rightarrow x = 5$$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5}{x^2-1} \Rightarrow x+1+x^2-x=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$c) \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+2} \Rightarrow x-2x-4=3x-6 \Rightarrow -4x=-2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$