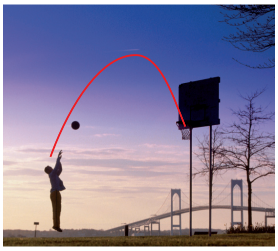
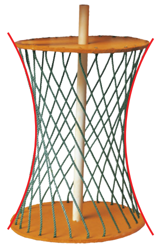
PÁGINA 102

La red de la canasta ha sugerido a estos chicos construir el aparato de abajo. Al girar uno de los aros, las cuerdas configuran esta bonita forma.

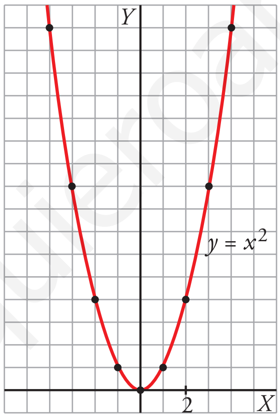


La trayectoria del balón es un arco de parábola.



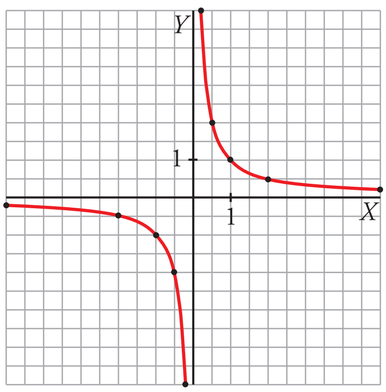
El perfil de esta figura está formado por dos arcos de hipérbola.

1 **En un diagrama cartesiano, representa $y = x^2$. (Da a x los valores $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$). Obtendrás una parábola.**



2 **Representa $y = \frac{1}{x}$. (Da a x los valores 0,2; 0,5; 1; 2 y 5, y sus correspondientes opuestos).**

Obtendrás una hipérbola.



PÁGINA 103

ANTES DE COMENZAR, RECUERDA

1 **Para la función $y = x^2 + 3x$, halla los puntos siguientes:**

a) De abscisa 3 **b) De abscisa –2**

c) De ordenada 0 **d) De ordenada 18**

$y = x^2 + 3x$

a) Si $x = 3 \rightarrow y = 9 + 9 = 18 \rightarrow$ El punto es (3, 18).

b) Si $x = -2 \rightarrow y = (-2)^2 + 3(-2) = 4 - 6 = -2 \rightarrow$ El punto es (–2, –2).

c) Si $y = 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -3$

Los puntos son (0, 0) y (–3, 0).

d) Si $y = 18 \rightarrow x^2 + 3x = 18 \rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Los puntos son (3, 18) y (–6, 18).

2 **Para la función $y = \sqrt{x + 2}$, halla los puntos siguientes:**

a) De abscisa 2 **b) De abscisa 14**

c) De ordenada 0 **d) De ordenada 3**

$y = \sqrt{x + 2}$

a) Si $x = 2 \rightarrow y = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow$ El punto es (2, 2).

b) Si $x = 14 \rightarrow y = \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ El punto es (14, 4).

c) Si $y = 0 \rightarrow \sqrt{x + 2} = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow$ El punto es (–2, 0).

d) Si $y = 3 \rightarrow \sqrt{x + 2} = 3 \rightarrow x + 2 = 9 \rightarrow x = 7 \rightarrow$ El punto es (7, 3).

3 **Para la función $y = 2^x$, halla los puntos siguientes:**

a) De abscisa 0 **b) De abscisa 5**

c) De ordenada 8 **d) De ordenada 128**

$y = 2^x$

a) Si $x = 0 \rightarrow y = 2^0 = 1 \rightarrow$ El punto es (0, 1).

b) Si $x = 5 \rightarrow y = 2^5 = 32 \rightarrow$ El punto es (5, 32).

c) Si $y = 8 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ El punto es (3, 8).

d) Si $y = 128 \rightarrow 2^x = 128 \rightarrow x = 7 \rightarrow$ El punto es (7, 128).

4 **Escribe las ecuaciones de las rectas que pasan por:**

a) $A(5, 4)$, $B(-3, 8)$ **b)** $A'(-2, 6)$, $B'(7, 0)$

c) $P(0, 6)$, $Q(12, 3)$ **d)** $P'(0, 4)$, $Q'(6, 4)$

e) $M(-2, 7)$, $N(4, 1)$ **f)** $M'(2, -5)$, $N'(-5, -5)$

a) $m = \dfrac{8-4}{-3-5} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$; $y = 4 - \dfrac{1}{2}(x-5)$

b) $m = \dfrac{0-6}{7+2} = \dfrac{-2}{3}$; $y = 6 - \dfrac{2}{3}(x+2)$

c) $m = \dfrac{3-6}{12} = -\dfrac{1}{4}$; $y = 6 - \dfrac{1}{4}x$

d) $m = \dfrac{4-4}{6} = 0$; $y = 4$

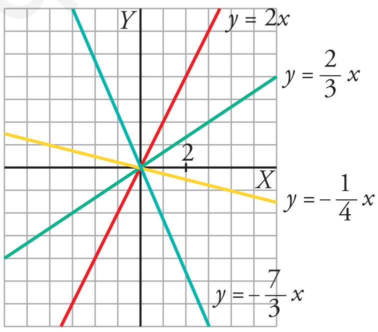
e) $m = \dfrac{1-7}{6} = -1$; $y = 7 - (x+2) \rightarrow y = 5 - x$

f) $m = \dfrac{-5+5}{-5-2} = 0$; $y = -5$

PÁGINA 104

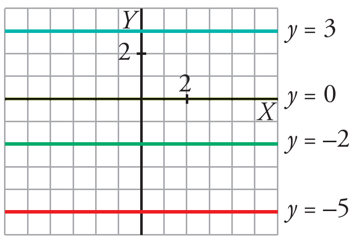
1 **Representa:**

a) $y = 2x$ **b)** $y = \dfrac{2}{3}x$ **c)** $y = -\dfrac{1}{4}x$ **d)** $y = -\dfrac{7}{3}x$



2 **Representa:**

a) $y = 3$ **b)** $y = -2$ **c)** $y = 0$ **d)** $y = -5$



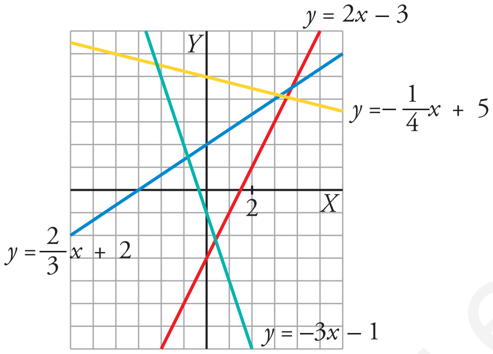
3 **Representa:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

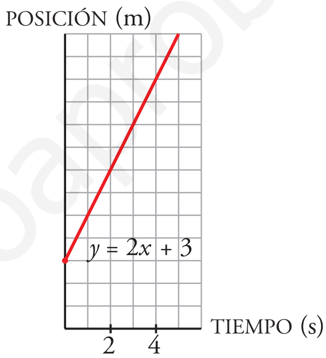
c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

d) $y = -3x - 1$



4 **Un móvil, en el instante inicial, está a 3 m del origen y se aleja de este con una velocidad de 2 m/s. Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.**

La ecuación es $y = 2x + 3$.

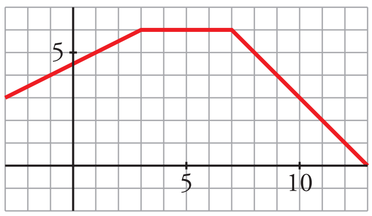


5 **El coste del uso doméstico de gas ciudad es de 12 € al bimestre más 0,75 € por cada metro cúbico. Escribe la ecuación del coste bimensual, C, en función del volumen (V) de gas consumido.**

$C = 12 + 0{,}75V$

PÁGINA 105

6 **Escribe la ecuación que corresponde a esta gráfica:**

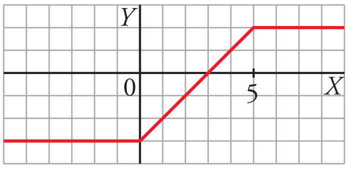


$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & \text{si } x \leq 3 \\ 6 & \text{si } 3 < x < 7 \\ 13 - x & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

7 **Representa la función cuya expresión analítica es la siguiente:**

$$y = \begin{cases} -3 & \text{si } x \le 0 \\ x - 3 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 2 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

Di cuál es la pendiente de cada uno de los tramos que forman la función.



En los tramos primero y tercero, la pendiente es 0.

En el segundo tramo, la pendiente es 1.

PÁGINA 108

1 **Representa las siguientes parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

a) $y = x^2 - 2x + 3$

Puntos de corte con $y = 3 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Vértice: (1, 2)

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 2x + 3 = 0$

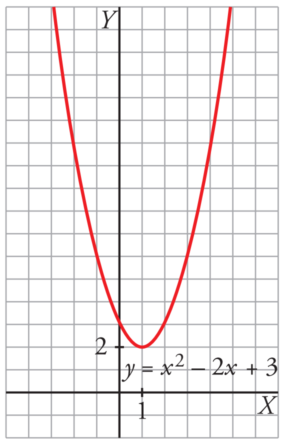
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No hay puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 3 \rightarrow (0, 3)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	2	3
y	6	3	6



b) $y = x^2 - 6x + 5$

Puntos de corte con $y = 5 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$

Vértice: (3, –4)

Puntos de corte con los ejes:

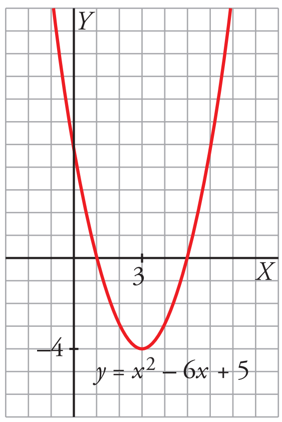
Eje X: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = 5 \rightarrow (0, 5)$

Puntos próximos al vértice:

x	2	4
y	–3	–3



2 **Dibuja estas funciones:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

Puntos de corte con $y = -2 \;\to\; \frac{1}{4}x^2 + x = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array} \right.$

Vértice: $(-2, -3)$

Puntos de corte:

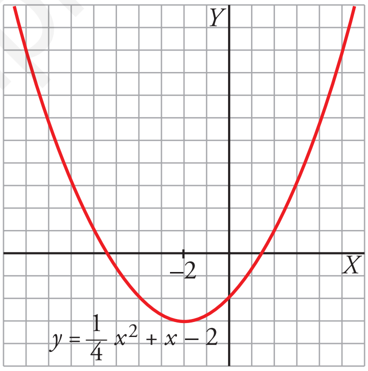
Eje X: $\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2}}{1/2} \left\langle \begin{array}{l} x = -2 + 2\sqrt{3} \;\to\; (-2 + 2\sqrt{3}, 0) \approx (1{,}46; 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \;\to\; (-2 - 2\sqrt{3}, 0) \approx (-5{,}46; 0) \end{array} \right.$$

Eje Y: $y = -2 \;\to\; (0, -2)$

Puntos próximos al vértice:

x	–4	–3	–1	2	3
y	–2	–2,75	–2,75	1	3,25



b) $y = 2x^2 - 10x + 8$

Puntos de corte con $y = 8 \;\to\; 2x^2 - 10x = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} x = 5 \\ x = 0 \end{array} \right.$

Vértice: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

Puntos de corte:

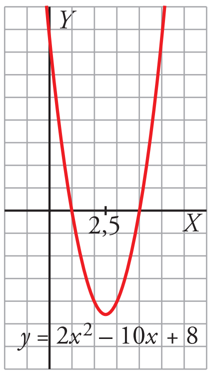
Eje X: $2x^2 - 10x + 8 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 6}{4} \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \;\to\; (4, 0) \\ x = 1 \;\to\; (1, 0) \end{array} \right.$$

Eje Y: $y = 8 \;\to\; (0, 8)$

Puntos próximos al vértice:

x	2	3
y	–4	–4



PÁGINA 109

3 Resuelve, analítica y gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

• *Analíticamente*

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{array}\right\} x^2 - 6x + 5 = x - 5 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{array}{l} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 2 \rightarrow y_2 = -3 \end{array}$$

Hay dos soluciones: (5, 0) y (2, –3)

• *Gráficamente*

Representamos la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la recta $y = x - 5$:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 5 \end{array}\right\} x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0 \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right\} V(3, -4)$$

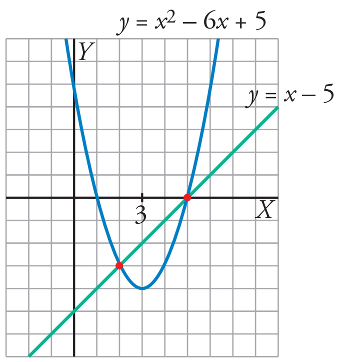
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}$$

Los puntos de corte con el eje X son (5, 0), (1, 0); con el eje Y, el punto (0, 5).

Puntos próximos al vértice:

x	2	4	6
y	–3	–3	5

La recta $y = x - 5$ pasa, por ejemplo, por los puntos (5, 0) y (3, –2).

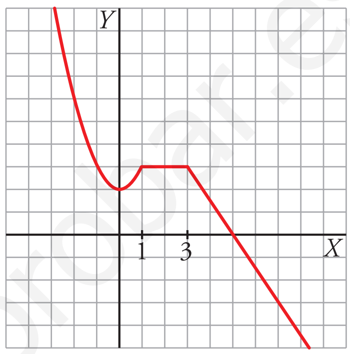


Los puntos de corte de las dos curvas son el (5, 0) y (2, –3).

4 Representa gráficamente la función:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \dfrac{-3x + 15}{2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

- El primer tramo de la función corresponde a un trozo de parábola definida solo para $x \le 1$:
  - — Vértice: $V(0, 2)$
  - — No corta al eje X y sí al eje Y, en $(0, 2)$.
  - — Pasa por los puntos $(1, 3)$, $(-2, 6)$.
- El 2.° tramo corresponde a un trozo de la recta horizontal $y = 3$.
- El último tramo es un trozo de recta que pasa por $(5, 0)$ y $(3, 3)$.



PÁGINA 111

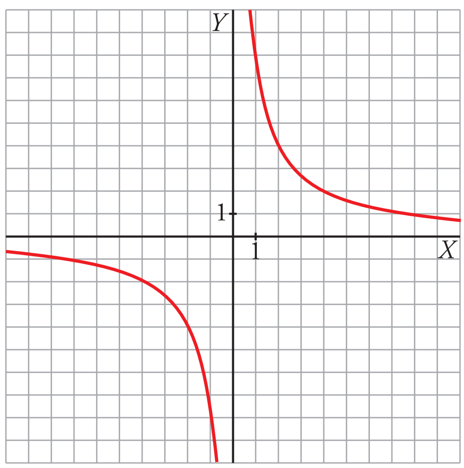
1 Representa:

a) $y = \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{8}{x}$ **c)** $y = \dfrac{8}{x-2}$

d) $y = \dfrac{8}{2-x}$ **e)** $y = \dfrac{8}{x} - 3$ **f)** $y = \dfrac{8}{x-2} + 3$

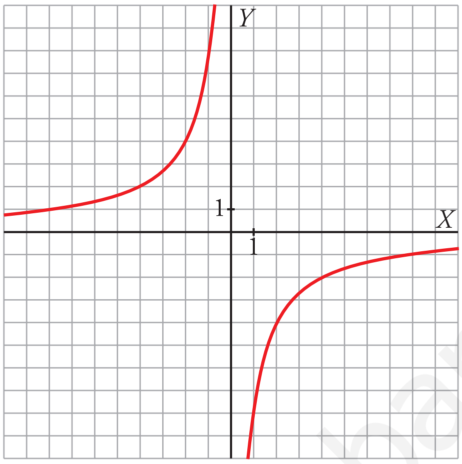
a) $y = \dfrac{8}{x}$

X	Y
–8	–1
–4	–2
–2	–4
–1	–8
1	8
2	4
4	2
8	1



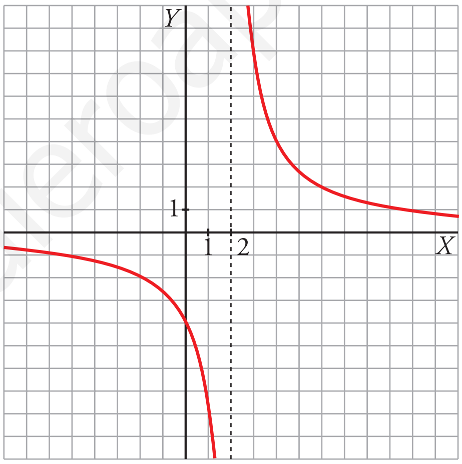
b) $y = \dfrac{-8}{x}$

X	Y
–8	1
–4	2
–2	4
–1	8
1	–8
2	–4
4	–2
8	–1



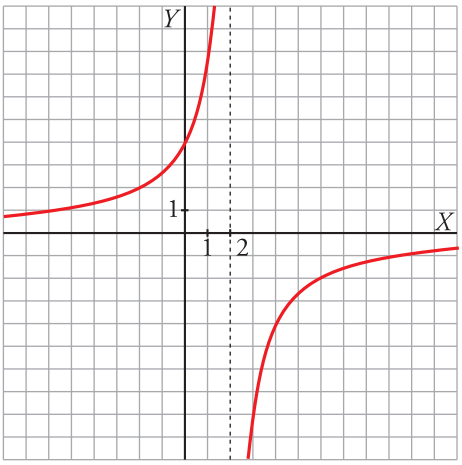
c) $y = \dfrac{8}{x-2}$

X	Y
–6	–1
–2	–2
0	–4
1	–8
3	8
4	4
6	2
10	1



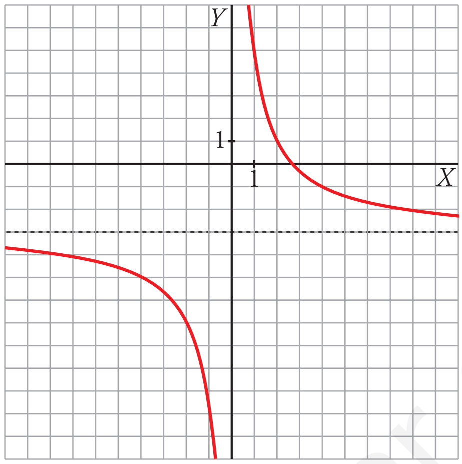
d) $y = \dfrac{8}{2-x}$

X	Y
–6	1
–2	2
0	4
1	8
3	–8
4	–4
6	–2
10	–1



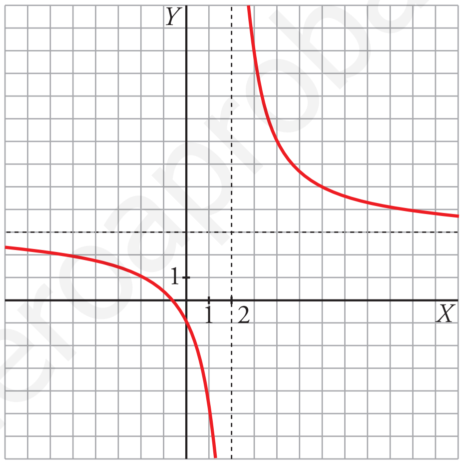
e) $y = \dfrac{8}{x} - 3$

X	Y
–8	–4
–4	–5
–2	–7
–1	–11
1	5
2	1
4	–1
8	–2



f) $y = \dfrac{8}{x - 2} + 3$

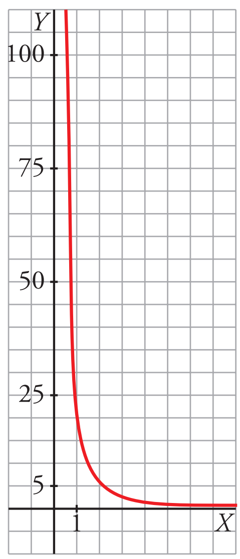
X	Y
–6	2
–2	1
0	–1
1	–5
3	11
4	7
6	5
10	4



2 **La intensidad del sonido que nos llega procedente de un foco sonoro es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que nos separa de él. Por ejemplo:**

$$I = \frac{25}{d^2}, \quad \begin{array}{l} d, \text{ distancia en metros.} \\ I, \text{ intensidad del sonido.} \end{array}$$

Representa la gráfica tomando, en el eje X, 1 cuadrado = 1 m, y en el eje Y, 1 cuadrado = 5 u. ¿A qué distancia ha de ponerse un sordo que solo oiga sonidos superiores a 100 *u*?



$$100 = \frac{25}{d^2} \rightarrow 100d^2 = 25 \rightarrow d = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{1}{2}$$

Ha de ponerse a una distancia máxima de medio metro.

PÁGINA 112

1 **Representa:**

a) $y = 2\sqrt{x}$

b) $y = -2\sqrt{x}$

c) $y = 2\sqrt{x+3}$

d) $y = -2\sqrt{x+3}$

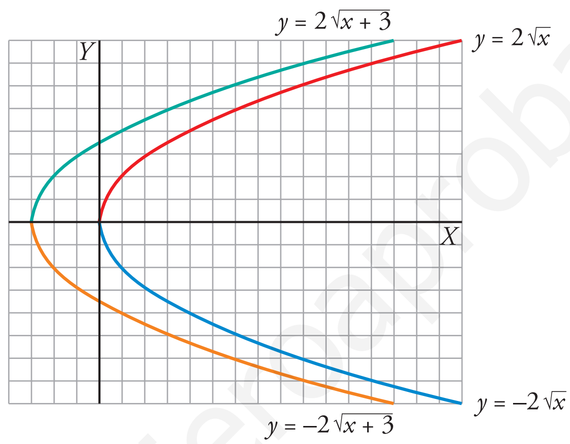
e) $y = 2\sqrt{-x}$

f) $y = -2\sqrt{-x}$

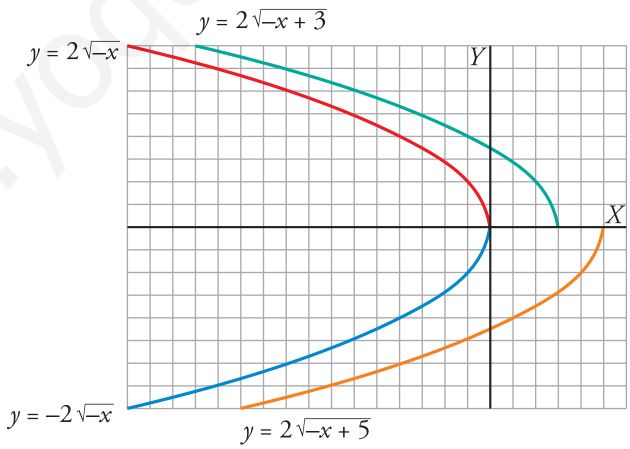
g) $y = 2\sqrt{-x+3}$

h) $y = 2\sqrt{-x+5}$

a) b) c) d)



e) f) g) h)



PÁGINA 113

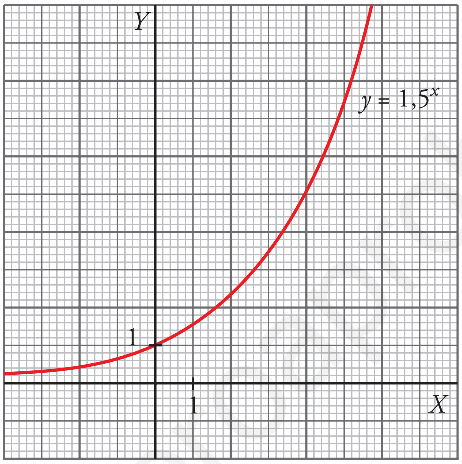
1 **Representa, utilizando la calculadora y sobre papel milimetrado:**

a) $y = 1{,}5^x$ **b)** $y = 0{,}8^x$

a) $y = 1{,}5^x$

Hacemos la tabla de valores:

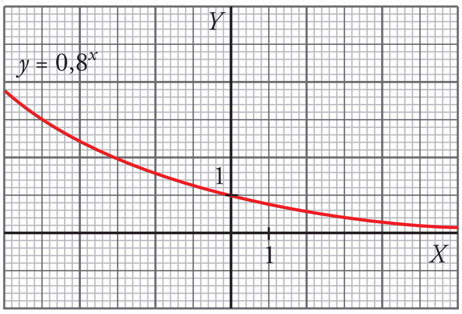
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,3	$0,\widehat{4}$	$0,\widehat{6}$	1	1,5	2,25	3,37



b) $y = 0{,}8^x$

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51



2 **Escribe en forma exponencial las expresiones:**

a) $2^{0,4x}$ **b)** $10^{0,01x}$ **c)** $1{,}01^{12x}$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28}$

a) $2^{0,4x} \to (2^{0,4})^x \to (1{,}32)^x$

b) $10^{0,01x} \to (10^{0,01})^x \to (1{,}02)^x$

c) $1{,}01^{12x} \to (1{,}01^{12})^x \to (1{,}13)^x$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28} \to \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/28}\right]^x \to (0{,}98)^x$

PÁGINA 114

3 **Escribe la ecuación que expresa el número aproximado de amebas que habrá al cabo de t horas en un cultivo similar al del ejemplo 1, suponiendo que, al principio, hay 3 amebas.**

¿Cuántas amebas habrá al cabo de 150 minutos?

Inicialmente hay 3 amebas y, aproximadamente, cada hora el número de amebas se duplica; por tanto, el número aproximado de amebas que habrá al cabo de t horas será $N = 3 \cdot 2^t$ con $t \geq 0$.

Si $t = 150$ min $= 2{,}5$ h, entonces $N = 3 \cdot 2^{2{,}5} \approx 17$ $\rightarrow$ Al cabo de 150 minutos habrá, aproximadamente, 17 amebas.

4 **Un capital de 130 000 € está en un banco colocado al 12% anual. Expresa el valor del capital C en función del tiempo, t, expresado en años, que permanezca el dinero en el banco.**

La expresión que da el capital acumulado al cabo de t años es:

$$C = 130\,000 \cdot (1{,}12)^t \text{ con } t \geq 0$$

5 **El tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa de una sustancia radiactiva se llama periodo de semidesintegración.**

Una sustancia radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 2 años. Tenemos 8 g de esa sustancia. La ecuación que da la cantidad de sustancia radiactiva en función del tiempo transcurrido, en años, es $C = 8a^t$. ¿Cuál es el valor de a?

☞ ***$8a^2 = 4$. [Razona por qué]. Despeja a en la igualdad anterior.***

Al cabo de 2 años tendremos la mitad de la sustancia, es decir, 4 gramos.

$$4 = 8a^2 \rightarrow \frac{1}{2} = a^2 \rightarrow a = \sqrt{1/2} \rightarrow a \approx 0{,}71$$

PÁGINA 115

1 **Calcula razonadamente.**

a) $\log_2 4$	**b) $\log_2 32$**	**c) $\log_2 (1/8)$**
d) $\log_{10} 1\,000$	**e) $\log_{10} (1/10)$**	**f) $\log_{10} 0{,}0001$**
g) $\log_5 625$	**h) $\log_3 243$**	**i) $\log_7 49$**

a) $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

b) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

c) $\log_2 (1/8) = \log_2 2^{-3} = -3$

d) $\log_{10} 1\,000 = \log_{10} 10^3 = 3$

e) log_{10} (1/10) = log_{10} 10^{-1} = –1

f) log_{10} 0,0001 = log_{10} 10^{-4} = –4

g) log_5 625 = log_5 5^4 = 4

h) log_3 243 = log_3 3^5 = 5

i) log_7 49 = log_7 7^2 = 2

2 **Calcula estos logaritmos:**

a) $\boldsymbol{log_a a}$ **b)** $\boldsymbol{log_a a^5}$ **c)** $\boldsymbol{log_a \sqrt{a}}$

d) $\boldsymbol{log_a \sqrt[3]{a^2}}$ **e)** $\boldsymbol{log_a (1/a^5)}$ **f)** $\boldsymbol{log_a 1}$

g) $\boldsymbol{log_2 0{,}0625}$ **h)** $\boldsymbol{log_5 0{,}04}$ **i)** $\boldsymbol{log_{\sqrt{2}} 2}$

a) $log_a a = 1$

b) $log_a a^5 = 5$

c) $log_a \sqrt{a} = log_a a^{1/2} = \frac{1}{2}$

d) $log_a \sqrt[3]{a^2} = log_a a^{2/3} = \frac{2}{3}$

e) $log_a (1/a^5) = log_a a^{-5} = -5$

f) $log_a 1 = log_a a^0 = 0$

g) $log_2 0{,}0625 = log_2 \left(\frac{5}{10}\right)^4 = log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = log_2 2^{-4} = -4$

h) $log_5 0{,}04 = log_5 \left(\frac{2}{10}\right)^2 = log_5 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = log_5 5^{-2} = -2$

i) $log_{\sqrt{2}} 2 = log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 2$