

## EJERCICIOS REPASO FUNCIONES.

1) Halla el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = 2x + 1$  función polinómica  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x-2=0\} = \mathfrak{R} - \{2\}$

c)  $f(x) = (x-1)^3$  función polinómica  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R}$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x^2-1=0\} = \mathfrak{R} - \{-1,1\}$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ò} \quad x = 1$$

e)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x^3=0\} = \mathfrak{R} - \{0\}$

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{0} \Leftrightarrow x = 0$$

f)  $f(x) = x^2 + x + 1$  función polinómica  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R}$

g)  $f(x) = \frac{7}{x^2-25}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x^2-25=0\} = \mathfrak{R} - \{-5,5\}$

$$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = -5 \quad \text{ò} \quad x = 5$$

h)  $f(x) = \frac{1}{x^4-1}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x^4-1=0\} = \mathfrak{R} - \{-1,1\}$

$$x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ò} \quad x = 1$$

i)  $f(x) = x^5 - 2x + 6$  función polinómica  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R}$

j)  $f(x) = \frac{x^7 - 2}{x^2 - 3x + 4}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x^2 - 3x + 4 = 0\} = \mathfrak{R}$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \text{no existe solución real}$$

k)  $f(x) = \frac{2 - x}{(x + 1)^2}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/(x + 1)^2 = 0\} = \mathfrak{R} - \{-1\}$

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

l)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$  función polinómica  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R}$

m)  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$  función radical con índice par

$$\rightarrow Dom(f) = \{x \in \mathfrak{R} / 2x - 4 \geq 0\} = [2, +\infty)$$

$$2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

n)  $f(x) = \frac{3}{1 - x}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/1 - x = 0\} = \mathfrak{R} - \{1\}$

o)  $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$  función radical con índice impar

$$\rightarrow Dom(f) = Dom(y = x - 2) = \mathfrak{R}$$

p)  $f(x) = \sqrt{x - 2}$  función radical con índice par

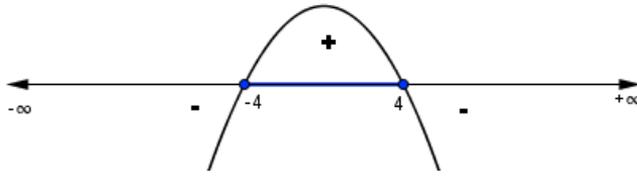
$$\rightarrow Dom(f) = \{x \in \mathfrak{R} / x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty)$$

q)  $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathfrak{R} - \{x/x^2 - 4 = 0\} = \mathfrak{R} - \{-2, 2\}$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \text{ ò } x = 2$$

r)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 16}$  función racional  $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{x / x^2 + 16 = 0\} = \mathbb{R}$

$x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -16 \Rightarrow$  no tiene solución real



s)  $f(x) = \sqrt[4]{16 - x^2}$

función radical con índice par  $\rightarrow Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$

Tenemos que resolver la inecuación :  $16 - x^2 \geq 0$

### Ceros

$16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = -4 \text{ } \dot{\cup} \text{ } x = 4$

t)  $f(x) = \sqrt[3]{16 - x^2}$  función radical con índice impar  
 $\rightarrow Dom(f) = Dom(y = 16 - x^2) = \mathbb{R}$

u)  $f(x) = \frac{3x + 5}{2x^2 - 4x - 6}$  función racional  
 $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{x / 2x^2 - 4x - 6 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \begin{cases} x = \frac{4 + 8}{4} = 3 \\ x = \frac{4 - 8}{4} = -1 \end{cases}$$

2. Dadas las siguientes funciones, indica de qué tipo son, represéntalas gráficamente e indica su dominio, recorrido, continuidad, puntos de corte con los ejes, monotonía (indicar si es creciente o decreciente), extremos, curvatura, puntos de inflexión, simetría, periodicidad y asíntotas:

a)  $y = 3x^2 + 6x - 7$

b)  $y = -2x^2$

c)  $y = 3^x$

d)  $y = 0.5^x$

e)  $y = \frac{5}{x}$

f)  $y = \frac{-4}{x}$

a)  $y = 3x^2 + 6x - 7$  Se trata de una función polinómica. Su gráfica es una parábola. Cálculo del vértice:  $a = 3, b = 6, c = -7$

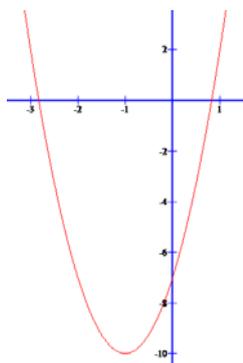
$$X_v = -b/2a = -6/(2 \cdot 3) = -1$$

$$Y_v = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 7 = -10$$

$$V(-1, -10)$$

Damos 5 valores cualquiera:

x	y
-2	-7
-1	-10
0	-7
1	2
2	17



(Nota: el punto (2, 17) no sale en el dibujo de la función)

**Dominio:** por ser una función polinómica,  $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

**Recorrido:**  $\text{Im}f = [-10, \infty)$

**Continuidad:** Es continua

**Puntos de corte con los ejes:**

Con el eje x:  $y = 0$

$0 = 3x^2 + 6x - 7$ , resolviendo la ecuación obtenemos:  $x_1 = -2,8$ ,  $x_2 = 0,8$ , por tanto los puntos de corte con el eje x serán  $(-2,8, 0)$  y  $(0,8, 0)$

Con el eje y:  $x = 0$

$y = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 7 = -7$ , por tanto el punto de corte con el eje y será  $(0, -7)$

**Monotonía:**

Decreciente:  $(-\infty, -1)$ , Creciente  $(-1, \infty)$

**Extremos:**

Mínimo absoluto y Mínimo relativo en el vértice  $(-1, -10)$

Máximos absolutos y relativos: no tiene

**Curvatura:**

Convexa en todo su dominio

**Puntos de inflexión:** No tiene

**Simetría:** observando el dibujo, vemos que no es ni par ni impar. Si lo quisiésemos calcular analíticamente (matemáticamente):

Si es par, se cumple que  $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 + 6 \cdot (-x) - 7 = 3x^2 - 6x - 7 \neq f(x), \text{ luego no es par}$$

Si es impar, se cumple que  $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -(3x^2 + 6x - 7) = -3x^2 - 6x + 7 \neq f(-x), \text{ luego tampoco es impar}$$

**Periodicidad:** No es periódica

**Asíntotas:** no tiene

b)  $y = -2x^2$

Se trata de una función potencial. Por ser de grado 2, su gráfica es una parábola

Cálculo del vértice:  $a = -2, b = 0$

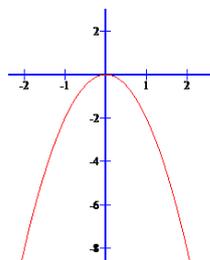
$X_v = -b/2a = -0/(2 \cdot (-2)) = 0$

$Y_v = -2 \cdot (0)^2 = 0$

$V(0, 0)$

Damos 5 valores cualquiera:

x	y
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8



**Dominio:** por ser una función potencial,  $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

**Recorrido:**  $\text{Im}f = [0, -\infty)$

**Continuidad:** Es continua

**Puntos de corte con los ejes:**

Con el eje x:  $y = 0$

$0 = -2x^2$ , resolviendo la ecuación obtenemos:  $x = 0, x_2 = 0,8$ , por tanto el punto de corte con el eje x será  $(0, 0)$

Con el eje y:  $x = 0$

$y = (-2) \cdot 0^2 = 0$ , por tanto el punto de corte con el eje y será  $(0,0)$

**Monotonía:**

Creciente:  $(-\infty, 0)$ , Decreciente  $(0, -\infty)$

**Extremos:**

Mínimo absoluto: No tiene Mínimo relativo: no tiene

Máximo absoluto:  $(0,0)$  Máximos relativos:  $(0,0)$

**Curvatura:**

Cóncava en todo su dominio

**Puntos de inflexión:** No tiene

**Simetría:** observando el dibujo, vemos que tiene simetría par (o respecto al eje y) y no tiene simetría impar. Matemáticamente:

Si es par, se cumple que  $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = f(x)$ , luego es par

Si es impar, se cumple que  $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -2x^2 \neq f(-x)$ , luego no es impar

**Periodicidad:** No es periódica

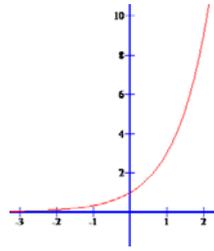
**Asíntotas:** no tiene

c)  $y = 3^x$

Se trata de una función exponencial.

Damos 5 valores para representarla:

x	y
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9



(Nota: los valores de y los obtenemos como siempre, es decir, sustituyendo los valores de x en la función. Ejemplo:  $y(-2) = 3^{-2} = 1/(3^2) = 1/9$ )

**Dominio:**  $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

**Recorrido:**  $\text{Im}f = (0, \infty)$

**Continuidad:** Es continua

**Puntos de corte con los ejes:**

Con el eje x: no corta

Con el eje y:  $x=0$

$y = 3^0 = 1$ , por tanto el punto de corte con el eje y será (0,1)

**Monotonía:**

Creciente en todo su dominio

**Extremos:**

No hay

**Curvatura:**

**Puntos de inflexión:** No tiene

**Simetría:** observando el dibujo, vemos que no tiene ni simetría par ni impar

Si es par, se cumple que  $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 3^{-x} \neq f(x)$ , luego no es par

Si es impar, se cumple que  $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -3^x \neq f(-x)$ , luego no es impar

**Periodicidad:** No es periódica

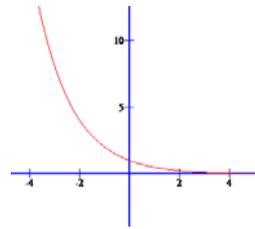
**Asíntotas:** Horizontal: el eje x, de ecuación  $y=0$

d)  $y=0.5^x$

Se trata de una función exponencial.

Damos 5 valores para representarla:

x	y
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25



(Nota: los valores de y los obtenemos como siempre, es decir, sustituyendo los valores de x en la función. Ejemplo:  $y(-2) = 0.5^{-2} = 4$ )

**Dominio:**  $\text{Dom}f = \mathfrak{R}$

**Recorrido:**  $\text{Im}f = (0, \infty)$

**Continuidad:** Es continua

**Puntos de corte con los ejes:**

Con el eje x: no corta

Con el eje y:  $x=0$

$y = 0.5^0 = 1$ , por tanto el punto de corte con el eje y será (0,1)

**Monotonía:**

Decreciente en todo su dominio

**Extremos:**

No hay

**Curvatura:** Convexa en todo su dominio

**Puntos de inflexión:** No tiene

**Simetría:** observando el dibujo, vemos que no tiene ni simetría par ni impar

Si es par, se cumple que  $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 0.5^{-x} \neq f(x)$ , luego no es par

Si es impar, se cumple que  $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -0.5^x \neq f(-x)$ , luego no es impar

**Periodicidad:** No es periódica

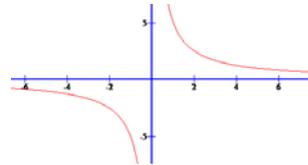
**Asíntotas:** Horizontal: el eje x, de ecuación  $y=0$

e)  $y = \frac{5}{x}$

Se trata de una función de proporcionalidad inversa

Damos una serie de valores para representarla:

x	y
-2	-2.5
-1	-5
0	(en este punto no hay función, ya que no se puede dividir por 0)
1	5
2	2.5
5	1



**Dominio:**  $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{0\}$

**Recorrido:**  $\text{Im}f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

**Continuidad:** No es continua

**Puntos de corte con los ejes:**

No corta a ningún eje

**Monotonía:**

Decreciente en todo su dominio

**Extremos:**

No hay

**Curvatura:** Cóncava  $(-\infty, 0)$  y convexa  $(0, \infty)$

**Puntos de inflexión:** No tiene

**Simetría:** observando el dibujo, tiene simetría impar. Matemáticamente:

Si es par, se cumple que  $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 5/(-x) \neq f(x)$ , luego no es par

Si es impar, se cumple que  $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -5/x = f(-x)$ , luego es impar

**Periodicidad:** No es periódica

**Asíntotas:**

Horizontal: el eje x, de ecuación  $y=0$

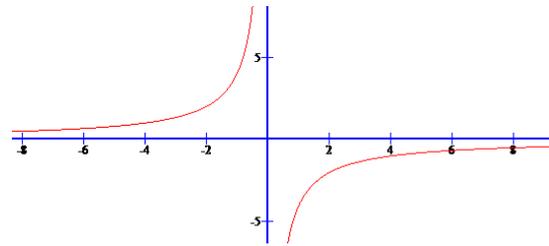
Vertical: el eje y, de ecuación  $x=0$

$$f) y = \frac{-4}{x}$$

Se trata de una función de proporcionalidad inversa

Damos una serie de valores para representarla:

x	y
-2	2
-1	4
0	(en este punto no hay función, ya que no se puede dividir por 0)
1	-4
2	-2
4	-1



**Dominio:**  $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{0\}$

**Recorrido:**  $\text{Im}f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

**Continuidad:** No es continua

**Puntos de corte con los ejes:**

No corta a ningún eje

**Monotonía:**

Creciente en todo su dominio

**Extremos:**

No hay

**Curvatura:** Convexa  $(-\infty, 0)$  y cóncava  $(0, \infty)$

**Puntos de inflexión:** No tiene

**Simetría:** observando el dibujo, tiene simetría impar. Matemáticamente:

Si es par, se cumple que  $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = -4/(-x) = 4/x \neq f(x)$ , luego no es par

Si es impar, se cumple que  $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = 4/x = f(-x)$ , luego es impar

**Periodicidad:** No es periódica

**Asíntotas:**

Horizontal: el eje x, de ecuación  $y=0$

Vertical: el eje y, de ecuación  $x=0$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x, & \text{si } x \leq -1 \\ 3x, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Su gráfica estará formada por dos trozos:

El trozo de  $y = 5 - 2x$  correspondiente al intervalo  $(-\infty, -1]$

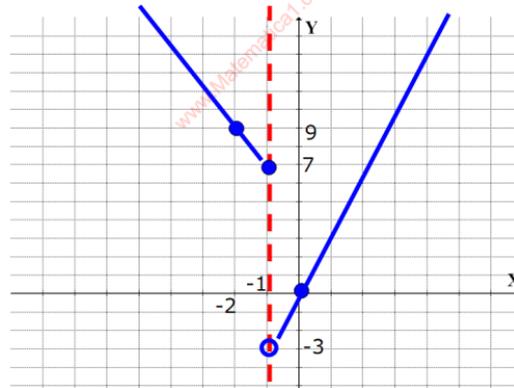
El trozo de  $y = 3x$  correspondiente al intervalo  $(-1, \infty)$

**Tabla 1**

$x \leq -1$	$y = 5 - 2x$
-1	7
-2	9

**Tabla 2**

$x > -1$	$y = 3x$
-1	-3
0	0



Dom(f) = R

Rec(f) =  $(-3, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 2 \\ -x^2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su gráfica estará formada por dos trozos:

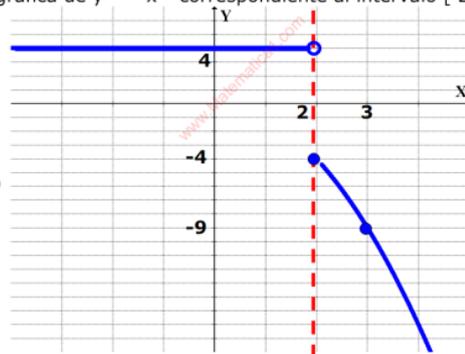
El trozo de la gráfica de  $y = 4$  correspondiente al intervalo  $(-\infty, 2)$

El trozo de la gráfica de  $y = -x^2$  correspondiente al intervalo  $[2, \infty)$

La abscisa del vértice de la parábola es:  
 $x_v = 0 \notin [2, \infty)$

**Tabla**

$x \geq 2$	$y = -x^2$
2	-4
3	-9



Dom(f) = R

Rec(f) =  $(-\infty, -4] \cup \{4\}$

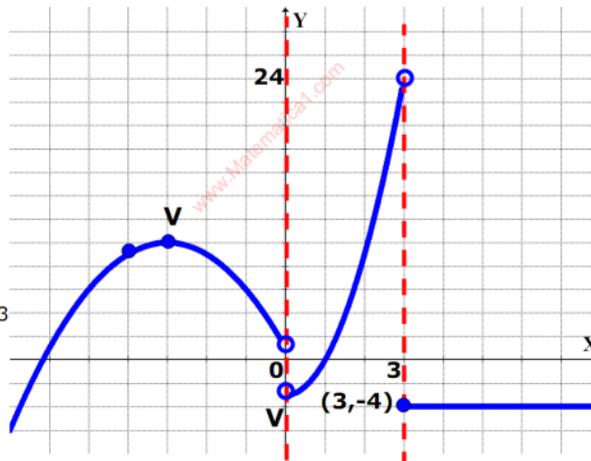
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x + 1, & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 3, & \text{si } 0 < x < 3 \\ -4, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

**Tabla 1**

$x < 0$	$y = -x^2 - 6x + 1$
0	1
-3	10
-4	9

**Tabla 2**

$0 < x < 3$	$y = 3x^2 - 3$
0	-3
3	24



Dom(f) =  $\mathbb{R} - \{0\}$

Rec(f) =  $(-\infty, 24]$