

Nombre: _____

Evaluación: Tercera.

Fecha: 30 de abril de 2010

NOTA	
------	--

Ejercicio nº 1. - Calcula m para que los puntos $R(5,-2)$, $S(-1,1)$ y $T(2,m)$ estén alineados.

1 punto

Ejercicio nº 2. - Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(5,-1)$ en todas sus formas: continua, punto-pendiente, explícita y general. Comprueba si el punto $C(-1,3)$ pertenece a la recta.

1,5 puntos

Ejercicio nº 3. - Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Recta r_1 que es paralela a $s: 2x + y - 7 = 0$ y pasa por el punto $P(9, -5/2)$.

b) Recta r_2 que es perpendicular a $t: 8x - 3y + 6 = 0$ y pasa por el punto $Q(-3, 2)$.

1,5 puntos

Ejercicio nº 4. - En el triángulo de vértices $A(-3,1)$, $B(1,5)$ y $C(4,0)$, hallar:

a) La ecuación de la recta h sobre la que se apoya la altura trazada desde el vértice B .

b) La ecuación de la mediatriz m del lado AB .

2 puntos

Ejercicio nº 5. - a) Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ , siendo $P(-5,2)$ y $Q(3,-6)$.

b) Calcula k para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia de ecuación

$$c \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

2 puntos

Ejercicio nº 6. - Dada la recta de ecuación $r \equiv 2x - y + 1 = 0$ y el punto $A(6, -2)$, calcula:

a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(6, -2)$ y es paralela a r .

b) La ecuación de la recta t que pasa por el punto $A(6, -2)$ y es perpendicular a r .

c) El punto M de intersección entre r y t .

d) El punto simétrico de A respecto de M .

2 puntos

SOLUCIONES

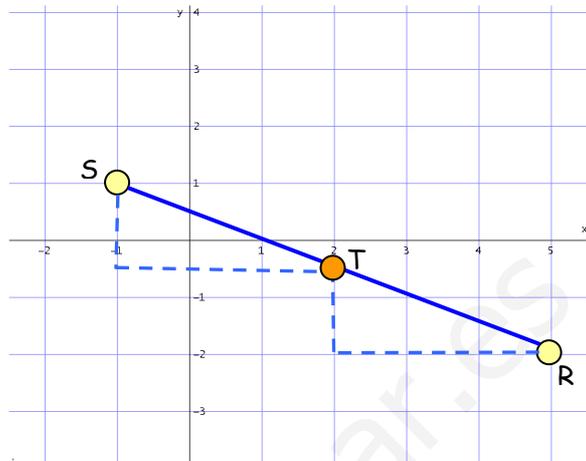
E.1. Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

Cuando los tres puntos están alineados, los triángulos son semejantes y se cumple:

$$\frac{1-m}{m-(-2)} = \frac{2-(-1)}{5-2} \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} = \frac{3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m+2 = 1-m \Rightarrow 2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

También podríamos haber utilizado el triángulo de vértices S , R y $P(-1, -2)$, pues también es semejante a los de la figura.



E.2. Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos $A(-3, 4)$ y $B(5, -1)$ en todas sus formas: continua, punto-pendiente, explícita y general. Comprueba si el punto $C(-1, 3)$ pertenece a la recta.

Comenzamos calculando la ecuación de la recta en forma continua:

$$r \equiv \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow r \equiv \frac{x-(-3)}{5-(-3)} = \frac{y-4}{-1-4} \Rightarrow r \equiv \frac{x+3}{8} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow \text{Ecuación continua}$$

Ahora calculamos la pendiente de la recta y su ecuación en forma de punto-pendiente:

$$m = \frac{-1-4}{5-(-3)} = -\frac{5}{8} \Rightarrow r \equiv y-4 = -\frac{5}{8} \cdot (x+3) \Rightarrow \text{Ecuación en forma de punto-pendiente}$$

Despejando y obtenemos la ecuación explícita:

$$r \equiv y-4 = -\frac{5}{8} \cdot (x+3) \Rightarrow r \equiv y = -\frac{5}{8} \cdot x - \frac{15}{8} + 4 \Rightarrow r \equiv y = -\frac{5}{8} \cdot x + \frac{17}{8} \Rightarrow \text{Ecuación explícita}$$

Multiplicando por 8, y colocando los términos, obtenemos la ecuación general de la recta:

$$r \equiv 8y = -5x + 17 \Rightarrow r \equiv 5x + 8y - 17 = 0 \Rightarrow \text{Ecuación general}$$

Nos queda comprobar si el punto $C(-1, 3)$ pertenece a la recta r . Para ello sustituimos sus coordenadas, por ejemplo, en la ecuación general:

$$5 \cdot (-1) + 8 \cdot 3 - 17 = -5 + 24 - 17 = 2 \neq 0 \Rightarrow C(-1, 3) \notin r.$$

E.3. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Recta r_1 que es paralela a $s: 2x + y - 7 = 0$ y pasa por el punto $P(9, -5/2)$.

b) Recta r_2 que es perpendicular a $t: 8x - 3y + 6 = 0$ y pasa por el punto $Q(-3, 2)$.

$$\text{a) } r_1 \parallel s \Rightarrow r_1 \equiv 2x + y + c = 0; P(9, -5/2) \in r_1 \Rightarrow 2 \cdot 9 - \frac{5}{2} + c = 0 \Rightarrow \frac{31}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{31}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv 2x + y - \frac{31}{2} = 0$$

b) $r_2 \perp t \Rightarrow r_2 \equiv 3x + 8y + c = 0$; $Q(-3, 2) \in r_2 \Rightarrow 3 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 7 + c = 0 \Rightarrow c = -7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow r_2 \equiv 3x + 8y - 7 = 0$

E.4. En el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ y $C(4, 0)$, hallar:

- a) La ecuación de la recta h sobre la que se apoya la altura trazada desde el vértice B .
 b) La ecuación de la mediatriz m del lado AB .

a) Tenemos que calcular la ecuación de la recta h perpendicular al segmento AC , que pasa por el punto B . Pues bien, buscamos el camino más corto: calcular la pendiente del segmento AC .

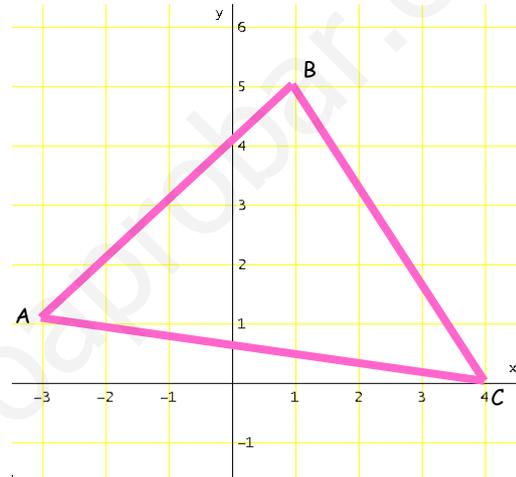
$$m_{AC} = \frac{0-1}{4-(-3)} = -\frac{1}{7}$$

Como

$$h \perp AC \Rightarrow m_h \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow m_h \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -1 \Rightarrow m_h = 7$$

Ya tenemos la pendiente de la recta, m_h , y un punto B por donde pasa. La gente hábil y comodona expresaría la solución en forma de punto pendiente:

$$h \equiv y - 5 = 7 \cdot (x - 1)$$



b) Ahora tenemos que encontrar la ecuación de la mediatriz, que es una recta z perpendicular al segmento AB y, además, pasa por su punto medio. Pues, después del apartado anterior, esto no debe ser difícil:

- o Calculamos la pendiente del segmento AB :

$$m_{AB} = \frac{5-1}{1-(-3)} = \frac{4}{4} = 1$$

- o Como $z \perp AB \Rightarrow m_z \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_z \cdot 1 = -1 \Rightarrow m_z = -1$

- o La mediatriz pasa por el punto medio del segmento AB . Pues a calcularlo:

$$PM_{AB} = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (-1, 3)$$

Ya están todos los "ingredientes", así que podemos concluir que la mediatriz tiene por ecuación

$$z \equiv y - 3 = -1 \cdot (x + 1) \quad \text{ó} \quad z \equiv y = -x + 2 \quad \text{ó} \quad z \equiv x + y - 2 = 0$$

E.5. a) Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ , siendo $P(-5, 2)$ y $Q(3, -6)$.

b) Calcula k para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia de ecuación

$$c \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

- a) Necesitamos calcular las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio. Sencillo:
- o El centro de la circunferencia ha de ser el punto medio del segmento PQ.

$$C = PM_{PQ} = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right) = (-1, -2)$$

- o El radio es la distancia del centro a P o a Q, como queramos.

$$r = \text{dist}(C, P) = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Pues ya lo tenemos, la ecuación de la circunferencia es:

$$c \equiv (x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$$

b) $(-3, k) \in c \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow (-3-1)^2 + (k+2)^2 = 25 \Rightarrow 16 + k^2 + 4k + 4 = 25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

E.6. Dada la recta de ecuación $r \equiv 2x - y + 1 = 0$ y el punto $A(6, -2)$, calcula:

- La ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(6, -2)$ y es paralela a r .
- La ecuación de la recta t que pasa por el punto $A(6, -2)$ y es perpendicular a r .
- El punto M de intersección entre r y t .
- El punto simétrico de A respecto de M .

- a) Como son rectas paralelas, mantenemos los mismos coeficientes de x e y , ya sólo falta averiguar el término independiente c :

$$s \parallel r \Rightarrow s \equiv 2x - y + c = 0; A(6, -2) \in s \equiv 2x - y + c = 0 \Rightarrow 2 \cdot 6 - (-2) + c = 0 \Rightarrow c = -14 \Rightarrow$$

$$s \equiv 2x - y - 14 = 0$$

- b) Al ser rectas perpendiculares, los coeficientes de x e y "van cruzados y, uno de ellos, cambiado de signo"; y, de nuevo, sólo queda calcular el término independiente:

$$t \perp r \Rightarrow t \equiv x + 2y + c = 0; A(6, -2) \in t \equiv x + 2y + c = 0 \Rightarrow 6 + 2 \cdot (-2) + c = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow$$

$$t \equiv x + 2y - 2 = 0$$

- c) El punto de corte entre las rectas r y t lo conseguimos resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0^{(1)} \end{cases} \xrightarrow{2E_1 + E_2} \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{(1)} 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(0, 1)$$

- d) Si $A'(x, y)$ es el punto simétrico de $A(6, -2)$ respecto de $M(0, 1)$, entonces M es el punto medio del segmento AA' , y por lo tanto, se cumple:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+6}{2} = 0 &\Rightarrow x = -6 \\ \frac{y+(-2)}{2} = 1 &\Rightarrow y = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'(-6, 4)$$