

Nombre: _____

Evaluación: Primera.

Fecha: 24 de enero de 2011

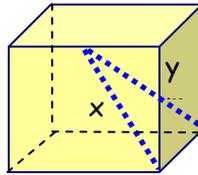
NOTA	
------	--

Ejercicio nº 1. - a) Expresar como un solo radical $2\sqrt{45} - \frac{\sqrt{20}}{3}$.

b) Racionaliza la expresión $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$, simplificando el resultado.

1,5 puntos

Ejercicio nº 2. - En un cubo de arista 1, calcula las distancias que aparecen en la figura expresando el resultado en forma de radical. ¿Cuánto vale $x^2 - y^2$?



2 puntos

Ejercicio nº 3. - Halla el cociente y el resto de esta división: $(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$.

1 punto

Ejercicio nº 4. - Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

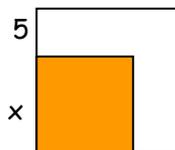
1 punto

Ejercicio nº 5. - Factoriza el siguiente polinomio e indica cuáles son sus raíces:

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

1 punto

Ejercicio nº 6. - Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?



1,5 puntos

Ejercicio nº 7. - Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones, expresando la solución en forma gráfica, de intervalo o semirrecta y de conjunto de números reales:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6} \\ \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4} \end{cases}$$

2 puntos

SOLUCIONES

E.1. a) Expresar como un solo radical $2\sqrt{45} - \frac{\sqrt{20}}{3}$.

b) Racionaliza la expresión $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$, simplificando el resultado.

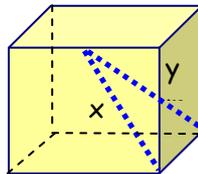
a) Sacamos todos los factores que podamos de la raíz y restamos:

$$2\sqrt{45} - \frac{\sqrt{20}}{3} = 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{3} = 2 \cdot 3\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{3} = 6\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{18\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{3} = \frac{16\sqrt{5}}{3}.$$

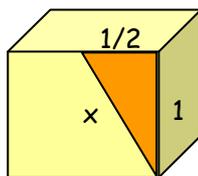
b) Debemos multiplicar el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador. Eso sí, después hay que hacer operaciones, extraer factor común y simplificar como indica el enunciado:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{6-3} = \\ &= \frac{6-2\sqrt{18}+3}{3} = \frac{9-6\sqrt{2}}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot (3-2\sqrt{2})}{\cancel{3}} = 3-2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

E.2. En un cubo de arista 1, calcula las distancias que aparecen en la figura expresando el resultado en forma de radical. ¿Cuánto vale $x^2 - y^2$?

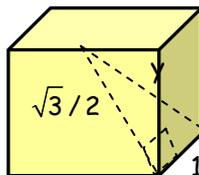


Para calcular x formamos un triángulo rectángulo en el que x es la hipotenusa, el cateto vertical mide 1 y el cateto horizontal, $1/2$, y aplicamos el T^{ma} de Pitágoras:



$$x^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} u.$$

Para calcular y formamos otro triángulo rectángulo y volvemos a aplicar el T^{ma} de Pitágoras:



$$y^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 1 + \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} u.$$

Ahora, obtener la diferencia de sus cuadrados resulta sencillo:

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{4}{4} = -1.$$

E.3. Halla el cociente y el resto de esta división: $(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$.

a) Ordenamos el dividendo en forma decreciente, dejando un hueco en la columna de los términos de grado 1:

$$\begin{array}{r}
 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \quad - 1 \quad | \quad x^2 + 2 \\
 \underline{- 3x^4} \quad \underline{- 6x^2} \quad \quad \quad 3x^2 - 5x - 2 \\
 \quad - 5x^3 - 2x^2 \quad \quad \quad - 5x - 2 \\
 \quad \underline{+ 5x^3} \quad \underline{+ 10x} \quad \quad \quad - 5x - 2 \\
 \quad - 2x^2 + 10x \quad \quad \quad - 5x - 2 \\
 \quad \underline{+ 2x^2} \quad \underline{+ 4} \quad \quad \quad - 5x - 2 \\
 \quad \quad \quad 10x + 3 \quad \quad \quad - 5x - 2
 \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 3x^2 - 5x - 2$; Resto: $R(x) = 10x + 3$.

E.4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

Para resolver este ejercicio aplicamos el T^{ma} del Resto, que dice que el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ coincide con $P(a)$ (valor numérico del polinomio para $x = a$). Por lo tanto disponemos de dos caminos diferentes para calcular el parámetro m :

- Hacer la división y obligar a que el resto sea cero, pues nos exigen que sea divisible:

$$\begin{array}{r}
 \quad | \quad 7 \quad - m \quad + 3 \quad - 2 \\
 - 1 \quad | \quad \downarrow \quad - 7 \quad m + 7 \quad - m - 10 \\
 \hline
 \quad | \quad 7 \quad - m - 7 \quad m + 10 \quad - m - 12 \\
 r = 0 \Rightarrow -m - 12 = 0 \Rightarrow m = -12.
 \end{array}$$

- Calcular el valor numérico del polinomio para $x = -1$:

$$r = 0 \Rightarrow P(-1) = 0 \Rightarrow 7 \cdot (-1)^3 - m \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = 0 \Rightarrow -7 - m - 3 - 2 = 0 \Rightarrow m = -12.$$

Yo creo que resulta bastante más cómoda la segunda opción.

E.5. Factoriza el siguiente polinomio e indica cuáles son sus raíces:

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

Aplicamos la regla de Ruffini para factorizar, probando con los divisores del término independiente, 10:

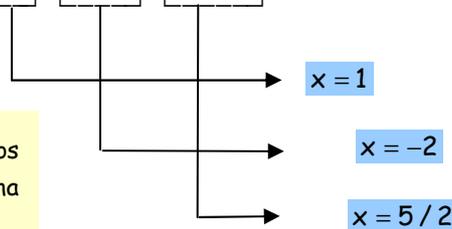
	2	- 3	- 9	+ 10
+ 1	↓	+ 2	- 1	- 10
	2	- 1	- 10	0
- 2	↓	- 4	+ 10	
	2	- 5	0	

Entonces, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 5)$.

Las raíces del polinomio son los valores que lo anulan, es decir, las soluciones de la ecuación:

$$2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 5) = 0$$

(*) Para que el producto de varios factores sea cero, alguno de ellos ha de ser cero.



E.6. Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?

Planteamos una ecuación:

Área del cuadrado pequeño (anaranjado): x^2 .

Área del cuadrado grande (blanco): $(x+5)^2$.

Ecuación:

$$(x+5)^2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6} = \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ -5/3 \end{array} \right.$$

Se rechaza el valor negativo por tratarse de una medida de longitud.

Solución.- El cuadrado inicial tiene 5 cm de lado.



E.7. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones, expresando la solución en forma gráfica, de intervalo o semirrecta y de conjunto de números reales:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6} \\ \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4} \end{cases}$$

Resolveremos cada una de las inecuaciones por separado y la solución del sistema será la parte común de ambas soluciones.

- $(I_1) \rightarrow \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6}$

Resolvemos la ecuación asociada a la inecuación, representamos la solución en la recta real IR y analizamos en que tramo se cumple la desigualdad:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} = \frac{3x-7}{6} \Rightarrow \frac{3x-3+4x+4}{6} = \frac{3x-7}{6} \Rightarrow 7x+1 = 3x-7 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2.$$



$$(0) \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} > -\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{-3+4}{6} > -\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} > -\frac{7}{6} \text{ (cierto)} \Rightarrow$$

\Rightarrow es la semirrecta donde se encuentra el 0.

- $(I_2) \rightarrow \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4}$

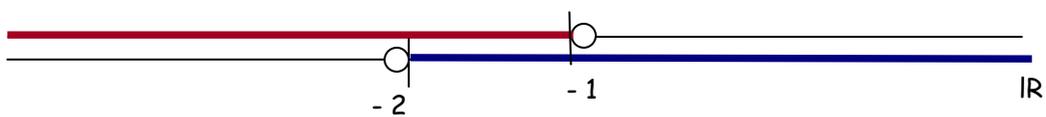
Repetimos el procedimiento anterior:

$$\frac{2x-1}{4} + 2x = \frac{2x-9}{4} \Rightarrow \frac{2x-1+8x}{4} = \frac{2x-9}{4} \Rightarrow 10x-1 = 2x-9 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1.$$



$$(0) \rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{9}{4} \text{ (falso)} \Rightarrow \text{se trata de la semirrecta donde no está el valor 0.}$$

- La parte común de ambas soluciones es "azulgrana", si la pintáramos de "blanco" no se vería:



Solución: $(-2, -1) = \{ x \in \mathbb{R} / -2 < x < -1 \}.$