

EXAMEN

Ejercicio nº 1. - Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética con 5 centímetros de diferencia. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

2 puntos

Ejercicio nº 2. - Resuelve la siguiente ecuación con fracciones algebraicas:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{10x+1}{x^2+x}$$

2 puntos

Ejercicio nº 3. - Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

2 puntos

Ejercicio nº 4. - Resuelve la siguiente ecuación con radicales:

$$x + \sqrt{10x+6} = 9$$

2 puntos

Ejercicio nº 5. - Resuelve la siguiente ecuación de grado superior a dos:

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0$$

2 puntos

Ejercicio nº 6. - Calcula las diagonales de un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y su área es 24 cm².

2 puntos

Ejercicio nº 7. - Resuelve la siguiente inecuación expresando el resultado en forma gráfica, de intervalo y de conjunto:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

2 puntos

Nota importante:

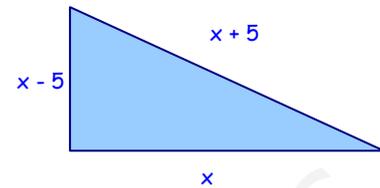
1. Elige sólo uno de los dos primeros ejercicios.
2. Entre los ejercicios 3 y 4, resuelve sólo uno.
3. El resto de ejercicios son obligatorios.
4. Cuando trabajes el examen en casa debes hacer todos los ejercicios, no solo los que has elegido en tu examen.

SOLUCIONES

E.1. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética con 5 centímetros de diferencia. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + (x - 5)^2 = (x + 5)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 10x + 25 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 20) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 20 \end{cases}$$



Sus lados miden 15, 20 y 25 cm.

Perímetro: $P = 15 + 20 + 25 = 60$ cm.

Área: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150$ cm².

Solución.- El perímetro del triángulo es 60 cm y su superficie, 150 cm².

E.2. Resuelve la siguiente ecuación con fracciones algebraicas: $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{10x+1}{x^2+x}$.

Las soluciones no pueden ser valores que anulen el denominador, por lo tanto, $x \neq -1$, $x \neq 0$.

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores y resolvemos:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{10x+1}{x^2+x} \Rightarrow \frac{x^2 + (x+1)^2}{x \cdot (x+1)} = \frac{10x+1}{x \cdot (x+1)} \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 10x + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

La única solución es $x = 2$.

E.3. Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$.

Hacemos el cambio de variable $x^2 = z$ para conseguir una ecuación de segundo grado:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4 \\ 1/4 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio de variable:

- Si $x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$.
- Si $x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$.

E.4. Resuelve la siguiente ecuación con radicales: $x + \sqrt{10x+6} = 9$.

En primer lugar aislamos el radical en el primer miembro de la ecuación, después elevamos ambos miembros al cuadrado, y seguidamente, resolvemos:

$$x + \sqrt{10x+6} = 9 \Rightarrow \sqrt{10x+6} = 9 - x \Rightarrow (\sqrt{10x+6})^2 = (9 - x)^2 \Rightarrow 10x + 6 = 81 - 18x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 28x + 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 300}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{28 \pm 22}{2} = \begin{cases} 25 \\ 3 \end{cases}$$

Como es una ecuación con radicales debemos comprobar si, efectivamente, son soluciones:

- $x = 25 \rightarrow 25 + \sqrt{256} = 9 \Rightarrow 25 + 16 = 9$ (falso) $\Rightarrow x = 25$ no es solución.
- $x = 3 \rightarrow 3 + \sqrt{36} = 9 \Rightarrow 3 + 6 = 9$ (cierto) $\Rightarrow x = 3$ es solución.

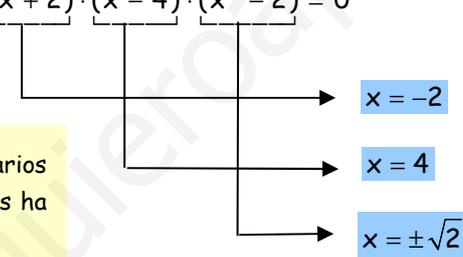
E.5. Resuelve la siguiente ecuación de grado superior a dos: $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0$.

Aplicamos la regla de Ruffini para factorizar la ecuación y resolver fácilmente:

	1	-2	-10	+4	+16
-2		-2	+8	+4	-16
	1	-4	-2	+8	0
+4		+4	0	-8	
	1	0	-2	0	

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x^2 - 2) = 0^{(*)}$$

(*) Para que el producto de varios factores sea cero, alguno de ellos ha de ser cero.

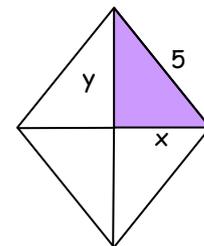


E.6. Calcula las diagonales de un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y su área es 24 cm².

Planteamos un sistema de ecuaciones:

Para la primera ecuación aplicamos el teorema de Pitágoras.

Para la segunda ecuación, el razonamiento que utilizamos es el siguiente: si la superficie del rombo es 24 cm², el triángulo coloreado tendrá 6 cm² de área.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ \frac{x \cdot y}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Despejamos y en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = \frac{12}{x} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{144}{x^2} = 25 \Rightarrow x^4 + 144 = 25x^2 \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$$

Hemos obtenido una ecuación bicuadrada que resolvemos mediante el cambio de variable $x^2 = z$:

$$z^2 - 25z + 144 = 0 \Rightarrow z = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio de variable:

- Si $x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$.
- Si $x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$.

Rechazamos los valores negativos, y calculamos y:

- Si $x = 4 \Rightarrow y = \frac{12}{4} = 3$.
- Si $x = 3 \Rightarrow y = \frac{12}{3} = 4$.

Solución.- La diagonal mayor mide 8 cm, y la menor, 6 cm.

E.7. Resuelve la siguiente inecuación expresando el resultado en forma gráfica, de intervalo y de conjunto: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Resolvemos la ecuación asociada a la inecuación:

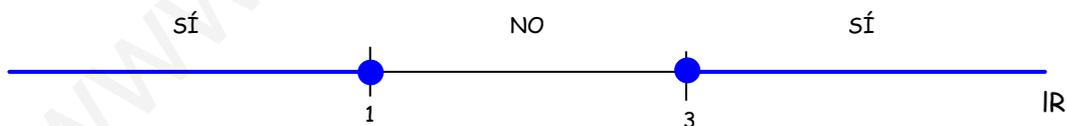
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Representamos las soluciones en la recta real y analizamos en qué tramos se cumple la inecuación y en cuales no:

$$(0) \rightarrow (0)^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \geq 0 \text{ (Cierto, se cumple la inecuación)}$$

$$(2) \rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \geq 0 \text{ (Falso, no se cumple la inecuación)}$$

$$(10) \rightarrow (10)^2 - 4 \cdot (10) + 3 = 63 \geq 0 \text{ (Cierto, se cumple la inecuación)}$$



Solución: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ó } x \geq 3\}$.