1. Definición. Formas de definir una sucesión.

Una sucesión es una aplicación que nos relaciona los números naturales con un conjunto, de forma que ordena los elementos de tal conjunto.

Ejemplos:

1. a: → selección española

   1 → a_1=Iker Castilla
   2 → a_2=Albiol

   ….

2. b: → Pares

   1 → $a_1=2$
   2→ $a_2=4$

Las sucesiones que vamos a trabajar en este tema son las sucesiones de números, donde los elementos del conjunto son números.

Formas de definir una función:

- **<u>Por definición</u>**: cuando decimos todos los elementos que la forman. Esta es la forma que tenemos de describir las sucesiones no numéricas o aquellas numéricas que no podemos relacionar los términos entre sí. Por ejemplo la sucesión de las aproximaciones de π {3, 3'1, 3'14, 3'141, 3'1415….}
- **<u>Ley de recurrencia</u>**: es una expresión que nos permite calcular un término en función del anterior o de los anteriores. Es necesario conocer el primer o primeros términos.
  Ejemplo: $a_n=a_{n-1}+3$ y $a_1=4$ →{4, 7, 10, 13, …}
  La desventaja de esta forma es que para conocer un término hay que conocer todos los anteriores. ¿Cuál es término a_{100} del problema anterior?
- **<u>Término general</u>**: donde conocemos el término a partir de saber la posición que ocupa (es decir n). Se puede obtener el general a partir del recurrente, sin más que intentar relacionar cualquier término con el primero.
  Ejemplo: (el mismo del recurrente)
  $a_2=a_1+3$ → $a_3=a_2+3=a_1+3+3=a_1+3\cdot2$ →$a_4=a_3+3=a_1+3\cdot3$…De forma general:
  $a_n=a_1+3\cdot(n-1)=4+3\cdot(n-1)$
  Es la forma mejor de conocer la sucesión pues podemos conocer cualquier término sin más que sustituir la n por la posición que ocupa y así obtener su valor.

Ejercicio 1: Escribir la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) {1, 4, 9, 16, 25,…}
b) {1/4, 3/5, 5/6, 7/7, 9/7}
c) {2, 4, 6, 8,…}

Ejercicio 2: calcular la relación de recurrencia de la siguientes sucesiones

a) {1,1,2,3,5,8,13,21…} (Sucesión de Fibonacci)
b) {2,6,18,54,162,…}
c) {2,-1,-4,-7…}

Ejercicio 3: Escribir los 4 primeros términos de la siguientes sucesiones e indica que forma la describe (recurrente o general)

a) $a_n=2\cdot a_{n-1}-a_{n-2}$ con $a_1=2$, $a_1=1$
b) $a_n=n^2-1$
c) $a_n=\frac{3n-1}{2n}$
d) $a_n=1-a_{n-1}$ $a_1=0$

2. Progresión aritmética.

2.1. Definición

Definición: una progresión aritmética es una sucesión donde cada término se obtiene sumando un valor constante (diferencia=d) al término anterior

Expresión recurrente: $a_n=a_{n-1}+d$

Para obtener el término general sólo hay que pensar como obtenemos el término que ocupa la posición n a partir del primero: para obtener el 2º sumamos una vez d, para el 3º sumamos 2d, para el 4º sumamos 3d…para el n sumaremos (n-1)d:

Expresión general: $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$

Se cumple que si d>0 la sucesión es creciente, los términos cada vez son más grandes; si d<0 la sucesión es decreciente.

Ejercicio 4: Calcular la diferencia el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_2=3$, $a_3=5$
b) $a_3=4$, $a_{10}=18$
c) $a_2=8$, $a_6=0$

Ejercicio 5: La tarifa del taxi es de la siguiente manera, el primer minuto cuesta 1,5€, y cada minuto posterior cuenta 0,4€. Calcular el precios de los 5 primeros minutos y plantear el término general de esta sucesión.

2.2. Suma de los términos de una progresión aritmética

Es muy conocida la anécdota del físico y matemático Gauss (1777-1855) cuando tenía 9 años le propusieron que sumara los 100 primeros números naturales. Con el asombro de su profesor, nada más terminar de plantear el problema Gauss respondía 5050. ¿cómo lo hizo?

Se cumple que el primer y último término suman lo mismo que el segundo y el penúltimo y que el tercero y el antepenúltimo, así podemos seguir habiendo 50 sumas iguales:

$1+2+3+\ldots+98+99+100=(1+100)+(99+2)+(98+3)+\ldots+(50+51)=101\cdot 50=5050.$

La suma anterior es una suma aritmética de diferencia d=1. Vamos a ver de forma general como calcular la suma de los n primero términos de una progresión aritmética: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

$$\begin{array}{rl} & S_n= a_1 + a_2 +\ldots+ a_{n-1} + a_n \\ + & S_n= a_n + a_{n-1} +\ldots+ a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n=(a_n+a_1)+(a_{n-1}+a_2)+\ldots+(a_1+a_n)=n\cdot(a_1+a_n) \end{array} \rightarrow \boldsymbol{S_n=\frac{a_n+a_1}{2}\cdot n}$$

Hemos utilizado que $(a_n+a_1)=(a_{n-1}+a_2)=\ldots$ porque para pasar de a_n a a_{n-1} restamos d pero al pasar de a_1 a a_2 sumamos d, luego la suma es la misma.

Ejercicio 6: Suma los veinte términos de las siguientes progresiones:

a) {-5,4,13,22…}

b) $a_1=-3$, d=4

Ejercicio 7: Sabemos que la suma de los 10 primero término de una progresión aritmética es 95 y que $a_1=1$. Calcular d y el término general

3. Progresión geométrica

3.1. Definición

Definición: una progresión geométrica es una sucesión donde un término se calcula a partir de término anterior multiplicada por una constante (razón=r).

Expresión recurrente: $\boldsymbol{a_n=a_{n-1}\cdot r}$

Para obtener el término general sólo hay que pensar como obtenemos el término que ocupa la posición n a partir del primero: para obtener el 2º multiplicamos una vez por r, para el 3º multiplicamos por r^2, para el 4º sumamos r^3…para el n multiplicaremos por r^{n-1}

Expresión general: $\boldsymbol{a_n=a_1\cdot r^{n-1}}$

Ejercicio 8: Calcular la razón el primer término y el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_2=4$, $a_3=1$

b) $a_2=3$, $a_5=24$

c) $a_5=1$, $a_{10}=32$

Ejercicio 9: Una persona envía un email a 3 personas, cada una de esas tres se lo manda a otros 3 así 5 veces. ¿Cuántos emails se han mandado tras 5 pasos?

3.2. Suma finita progresión geométrica

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica se puede calcular restando $r\cdot S_n$ menos S_n:

$r\cdot S_n=r\cdot a_1+r\cdot a_2+\dots+r\cdot a_n \rightarrow r\cdot S_n=a_2+a_3+\dots+a_{n+1}$

$r\cdot S_n= \quad a_2+a_3+\dots a_n+a_{n+1}$

$-S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

$(r-1)\cdot S_n=a_{n+1}-a_1 \rightarrow S_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{r-1}$

Ejercicio 10: Calcular la suma de los 10 primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_1=0.1$, $r=2$

b) {10,1,0’1…}

3.3. Suma infinita progresión geométrica.

Si la razón de la progresión geométrica es menor de la unidad, cada término cada vez es más pequeño. En estos casos cuanto más avanzamos más pequeño es el término y por tanto en la suma cada vez contribuye menos. Si calculamos la suma en estas progresiones de todos los términos, aunque sean infinitos, llega un momento que la contribución de los últimos término es tan pequeña que la suma de los infinitos términos da un resultado finito. El resultado es

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Ejercicio 11: Una pelota bota 10m en el siguiente bote bota la mitad, en el siguiente otra vez la mitad, así hasta que se para. Calcular el espacio recorrido por la bola.

Ejercicio 12 : Calcular la suma infinita de la progresión geométrica con $a_2=4$ y $r=1/2$

Problemas finales

Ejercicio 13: En las sucesiones de término general $a_n = 10n - 3$ y $b_n = \frac{4n-9}{3n-2}$, halla los términos primero, quinto, décimo y decimoquinto.

Ejercicio 14: Comprueba si 5, 7 y 9 son términos de la sucesión que tiene de término general $a_n = 2n + 3$.

Ejercicio 15:.Averigua si $\frac{1}{3}$ y 5 son términos de la sucesión de término general $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.

Ejercicio 16: .Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $-2, -4, -6, -8, \ldots$

b) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots$

Ejercicio 17: Halla el término general de la progresión aritmética: 8, 15, 22, 29, ...

Ejercicio 18: Halla la suma de los 23 primeros términos de la progresión aritmética: 6, $\frac{19}{3}, \frac{20}{3}, \ldots$

Ejercicio 19: Dado el término general de la progresión aritmética $a_n = 4n + 5$. Halla la suma de los cincuenta primeros términos.

Ejercicio 20: Halla término general de una progresión geométrica sabiendo que el quinto término es 48 y el segundo 6.

Ejercicio 21. El tercer término de una progresión geométrica es $\frac{27}{8}$ y la razón $\frac{3}{2}$.
Calcula la suma de los diez primeros términos.

Ejercicio 22. En una progresión geométrica de razón -1/2 tercer término es 1. Calcula la suma de 20 términos y de infinitos términos.

SOLUNCIONES A LOS PROBLEMAS

Ejercicio 1:

a) {1, 4, 9, 16, 25,…} → $a_n=n^2$

b) {1/4, 3/5, 5/6, 7/7, 9/8} → $a_n=(2n-1)/(3+n)$

c) {2, 4, 6, 8,…} → $a_n=2n$

Ejercicio 2:

a) {1,1,2,3,5,8,13,21…} → $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ con $a_1=1$, $a_2=1$

b) {2,6,18,54,162,…} → $a_n=a_{n-1}\cdot 3$ con $a_1=2$

c) {2,-1,-4,-7…} → $a_n=a_{n-1}-3$ con $a_1=2$

Ejercicio 3:

a) $a_n=2\cdot a_{n-1}-a_{n-2}$ con $a_1=2$, $a_1=1$ → Recurrente {2,1,3,-1,7…}

b) $a_n=n^2-1$ → General: {0,3,8,15,24,…}

c) $a_n=\frac{3n-1}{2n}$ → General: {1,11/4, 4/3, 11/8, 7/5…}

d) $a_n=1-a_{n-1}$ $a_1=0$ → Recurrente {0,1,0,1,0…}

Ejercicio 4: Hay dos formas de resolver, haremos a y b de forma intuitiva y c por sistemas.

a) $a_2=3$, $a_3=5$ →

$a_3-a_2=d$ → $d=2$, $a_1=a_2-d=3-2=1$. Término general $a_n=1+2(n-1)$

b) $a_3=4$, $a_{10}=18$

$a_{10}-a_3=7\cdot d$ → $7\cdot d=14$, $d=2$; $a_1= 4-2\cdot d$, $a_1=0$. Término general: $a_n=0+2(n-1)$

c) $a_2=8$, $a_6=0$

Por sistemas sustituyendo en $a_n=a_1+(n-1)d$ siendo las incógnitas a_1y d:4

$n=2$→ $8= a_1+(2-1)d$

$n=6$ →$0= a_1+(6-1)d$

$\left\{\begin{matrix} 8=a_1+d \\ 0=a_1+5d \end{matrix}\right\}$, resolviendo el sistema $a_1=10$, $d=-2$.

Término general: $a_n=10-2(n-1)$

Ejercicio 5:

{1’5, 1’9, 2’3, 2’7, 3’1…} → $a_n=1{,}5+0{,}4\cdot(n-1)$

Ejercicio 6:

a) {-5,4,13,22…} a_1=-5, d=9

a_n=-5+9·(n-1) → a_{20}=-5+9·19=166 $S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\frac{-5+166}{2}\cdot 20=1610$

b) a_1=-3, d=4

a_n=-3+4·(n-1) → a_{20}=-3+4·19=73 $S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\frac{-3+73}{2}\cdot 20=700$

Ejercicio 7:

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 \quad \rightarrow \quad 95=\frac{1+a_{10}}{2}\cdot 10 \;\rightarrow\; a_{10}=18$

Luego a_{10}-a_1=9d → 17=9·d → d=17/9

a_n=1+17/9·(n-1)

Ejercicio 8:

a) a_2=4, a_3=1 → r=1/4, luego a_1=4/r=16 , el término general es $a_n=16\cdot(1/4)^{n-1}$

b) a_2=3, a_5=24 → r^3=24/3=8 , r=2; a_1=3/2=1.5, el término general es $a_n=1.5\cdot(2)^{n-1}$

c) a_5=1 , a_{10}=32 →r^5=32, d=2; a1=1/2^4=0.0625, el término general $a_n=0.0625\cdot(2)^{n-1}$

Ejercicio 9: a_1=3, a_2=9… a_5=3^5=243

Ejercicio 10:

a) a_1=0.1, r=2 → $a_{11}=0.1\cdot 2^{10}$=102’4; $S_{10}=\frac{a_{11}-a_1}{r-1}=\frac{102.4-0.1}{2-1}=102.3$

b) {10,1,0’1…} → a_1=10, r=0.1, $a_{11}=10\cdot 0{,}1^{10}=10^{-9}$

$S_{10}=\frac{a_{11}-a_1}{r-1}=\frac{10^{-9}-10}{0.1-1}=11.1111$

Ejercicio 11: a_1=10, r=0,5 → $S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{8}{1-0.5}$=16. Como la pelota sube y baja distancia es de 40 m.

Ejercicio 12 : Calculamos a_1=a_2/r=8

$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{8}{1-0{,}1}$=8,8888 …

Ejercicio 13: a) $a_1=7$; $a_5=47$; $a_{10}=97$; $a_{15}=147$

b) $b_1=-5$; $b_5=\frac{11}{13}$; $b_{10}=\frac{31}{28}$; $b_{15}=\frac{51}{43}$

Ejercicio 14. Para que sean términos de esa sucesión, debe existir números naturales que sustituidos por n en la fórmula del término general den como resultado, 5, 7 y 9.

$$5 = 2n + 3 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$$
$$7 = 2n + 3 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$$
$$9 = 2n + 3 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

Los tres son de la sucesión.

Ejercicio 15:

Hay que comprobar si existen números naturales que al sustituir por n en la expresión del término general dé como resultado los valores dados.

$$\frac{1}{3} = \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow n + 1 = 3n - 3 \Rightarrow -2n = -4 \Rightarrow n = 2$$

$$5 = \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow 5n + 5 = n - 1 \Rightarrow 4n = -6 \Rightarrow n = -3/2 \in N \quad \textit{No es de la sucesión}$$

Por tanto, $\frac{1}{3}$ sí es un término de la sucesión, el segundo, pero 5 no lo es.

Ejercicio 16

a) $a_n = -2n$

b) $b_n = \dfrac{1}{n^3}$

Ejercicio 17

d = 7

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + (n-1)7 = 8 + 7n - 7 = 7n + 1 \Rightarrow a_n = 7n + 1$$

Ejercicio 18

d= $\dfrac{19}{3} - 6 = \dfrac{1}{3}$

$$a_{23} = a_1 + 22d = 6 + 22\frac{1}{3} = 6 + \frac{22}{3} = \frac{40}{3}$$

$$S_{23} = \frac{23 \cdot (a_1 + a_{23})}{2} = \frac{23 \cdot \left(6 + \frac{40}{3}\right)}{2} = \frac{23 \cdot \frac{58}{3}}{2} = \frac{1334}{6} = \frac{667}{3}$$

Ejercicio 19

:

a_1 = 4 + 5 = 9

a_{50} = 200 + 5 = 205

$$S_{50} = \frac{50 \cdot (a_1 + a_{50})}{2} = \frac{50 \cdot (9 + 205)}{2} = 5\,350$$

Ejercicio 20

$$a_5 = a_2 \cdot r^3 \Rightarrow 48 = 6 \cdot r^3 \Rightarrow 8 = r^3 \Rightarrow r = 2$$
$$a_1 = 3 \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Ejercicio 21

$$a_{11} = a_3 \cdot r^8 = \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{177147}{2048}$$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{177147}{2048} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{177147-3072}{2048}}{\frac{1}{2}} = \frac{174075}{1024}$$

Ejercicio 22

$$a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$