Problemas de 4ºESO

Isaac Musat Hervás

14 de marzo de 2012

www.musat.net

www.musat.net

Índice general

www.musat.net

www.musat.net

www.musat.net

www.musat.net

Capítulo 1

Problemas de Álgebra

1.1. Números Reales

1.1.1. Los números

Problema 1 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-7 ; 12 ; 0 ; π ; $2,333\dots$; $-\frac{3}{7}$; $2,1010010001\dots$
Solución:
-7 es un número entero $-7 \in Z$.
12 es un número natural $12 \in N$.
0 es un número natural $0 \in N$.
π es un número irracional.
$2,333\dots$ es un número racional $2,\widehat{3} \in Q$.
$-\frac{3}{7}$ es un número racional $-\frac{3}{7} \in Q$.
$2,1010010001\dots$ es un número irracional.

Problema 2 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-12 ; $\frac{5}{2}$; $\sqrt{7}$; 23 ; $7,34$; $5,222272727\dots$; $3,7770700700070000\dots$
Solución:
-12 es un número entero $-12 \in Z$.
$\frac{5}{2}$ es un número racional $\frac{5}{2} \in Q$.
$\sqrt{7}$ es un número irracional.
23 es un número natural $23 \in N$.
$7,34$ es un número racional $7,34 \in Q$.
$5,222272727\dots$ es un número racional$5,2222\widehat{72} \in Q$.
$3,7770700700070000\dots$ es un número irracional.

Problema 3 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
3 ; -2 ; $-\frac{4}{3}$; $4,3327832783278\dots$; $4,33133113331113333\dots$; $\sqrt{7}$;

www.musat.net

π; $7,1203870387\ldots$; $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

Solución:

- 3 es un número natural $3 \in N$.

- -2 es un número entero $-2 \in Z$.

- $-\frac{4}{3}$ es un número racional $-\frac{4}{3} \in Q$.

- $4,3327832783278\ldots$ es un número racional $4,33\widehat{278} \in Q$.

- $4,33133113331113333\ldots$ es un número irracional.

- $\sqrt{7}$ es un número irracional.

- π es un número irracional.
- $7,1203870387\ldots$ es un número racional $7,120\widehat{387} \in Q$
- $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.

Problema 4 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-3 ; 2 ; $-\frac{4}{3}$; $4,3322277722227777\ldots$; $4,33278278278\ldots$; $\sqrt{5}$; π; $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $7,1203870387\ldots$

Solución:

- -3 es un número entero $3 \in Z$.

- 2 es un número natural $2 \in N$.

- $-\frac{4}{3}$ es un número racional $-\frac{4}{3} \in Q$.

- $4,3322277722227777\ldots$ es un número irracional.

- $4,33\widehat{278}$ es un número racional $4,33\widehat{278} \in Q$.

www.musat.net

- $\sqrt{5}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ es un número irracional.
- $7,1203870387\ldots$ es un número racional $7,120\widehat{387} \in Q$

Problema 5 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$; 5 ; $0,12348348\ldots$; $0,123123412345\ldots$; -3 ; π;
$0,110011100011110000\ldots$; 0; $\frac{2}{5}$.

Solución:

- $\frac{3}{4}$ es un número racional $\frac{3}{4} \in Q$.
- $\sqrt{2}$ es un número irracional.
- 5 es un número natural $5 \in N$.
- $0,12348348\ldots$ es un número racional $0,12\widehat{348} \in Q$.
- $0,123123412345\ldots$ es un número irracional.
- -3 es un número entero $-3 \in Z$.
- π es un número irracional.
- $0,110011100011110000\ldots$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.
- $\frac{2}{5}$ es un número racional $\frac{2}{5} \in Q$

Problema 6 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$\frac{1}{4}$; $\sqrt{3}$; 7 ; $0,12359359\ldots$; $0,123123412345\ldots$; -2 ; π;
$0,110011100011110000\ldots$; 0; $\frac{4}{5}$.

Solución:

www.musat.net

- $\frac{1}{4}$ es un número racional $\frac{1}{4} \in Q$.
- $\sqrt{3}$ es un número irracional.
- 7 es un número natural $7 \in N$.
- $0,12359359\ldots$ es un número racional $0,12\widehat{359} \in Q$.
- $0,123123412345\ldots$ es un número irracional.
- -2 es un número entero $-2 \in Z$.
- π es un número irracional.
- $0,110011100011110000\ldots$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.
- $\frac{4}{5}$ es un número racional $\frac{4}{5} \in Q$

Problema 7 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$3\ ;\quad -\sqrt{5}\ ;\quad 2,125125125\ldots\ ;\ -\dfrac{9}{4}\ ;\quad -1$

Solución:

3 es un número natural $3 \in N$.

$-\sqrt{5}$ es un número irracional.

$2,125125125\ldots$ es un número racional $2,\widehat{125} \in Q$.

$-\dfrac{9}{4}$ es un número racional $-\dfrac{9}{4} \in Q$.

-1 es un número entero $-1 \in Z$.

Problema 8 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$-3\ ;\quad 0,56\ ;\quad 0\ ;\quad \pi\ ;\quad 1,1122111222\ldots\ ;\ -\frac{3}{4}\ ;\ 2;\ 7,161616\ldots;$
$3,21213214215\ldots;\ 8,666\ldots$
Solución:

-3 es un número entero $-3 \in Z$.
$0,56$ es un número racional $0,56 \in Q$.
0 es un número natural $0 \in N$.
π es un número irracional.
$1,1122111222\ldots$ es un número irrracional.
$-\frac{3}{4}$ es un número racional $-\frac{3}{4} \in Q$.
2 es un número natural $2 \in N$.
$7,161616\ldots$ es un número racional $7,\widehat{16} \in Q$.
$3,21213214215\ldots$ es un número irracional.
$8,666\ldots$ es un número racional $8,\widehat{6} \in Q$

Problema 9 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-1 ; $0,71$; 0 ; $\sqrt{2}$; $1,1133111333\ldots$; $-\frac{1}{7}$; 2; $9,262626\ldots$;
$3,21213214215\ldots$; $3,333\ldots$
Solución:
-1 es un número entero $-1 \in Z$.
$0,71$ es un número racional $0,71 \in Q$.
0 es un número natural $0 \in N$.
$\sqrt{2}$ es un número irracional.
$1,1133111333\ldots$ es un número irrracional.
$-\frac{1}{7}$ es un número racional $-\frac{1}{7} \in Q$.
15 es un número natural $15 \in N$.
$9,262626\ldots$ es un número racional $9,\widehat{26} \in Q$.
$3,21213214215\ldots$ es un número irracional.
$3,333\ldots$ es un número racional $3,\widehat{3} \in Q$

Problema 10 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
2 ; -3 ; $\frac{3}{4}$; $3,7728122812\ldots$; $5,1133111333\ldots$; $\sqrt{3}$; π; $3,230173017\ldots$;

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 0
Solución:

- 2 es un número natural $2 \in N$.

- -3 es un número entero $-3 \in Z$.

- $\frac{3}{4}$ es un número racional $\frac{3}{4} \in Q$.

- $3,7728122812\ldots$ es un número racional $3,772\widehat{812} \in Q$.

- $5,1133111333\ldots\ldots$ es un número irracional.
- $\sqrt{3}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $3,230173017\ldots$ es un número racional $3,23\widehat{017} \in Q$
- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.

Problema 11 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$3\,;\ \ -2\,;\ \ \frac{1}{4}\,;\ \ \ 2,7728122812\ldots;\ \ 6,1133111333\ldots;\ \ \sqrt{5}\,;\ \ \pi;\ \ 4,230273027\ldots;$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 0
Solución:

- 3 es un número natural $3 \in N$.
- -2 es un número entero $-2 \in Z$.
- $\frac{1}{4}$ es un número racional $\frac{1}{4} \in Q$.
- $2,7728122812\ldots$ es un número racional $2,772\widehat{812} \in Q$.
- $6,1133111333\ldots\ldots$ es un número irracional.
- $\sqrt{5}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $4,230273027\ldots$ es un número racional $4,23\widehat{027} \in Q$
- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.

www.musat.net

Problema 12 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-3 ; $2,71$; 0 ; $\sqrt{5}$; $1,2233222333\ldots$; $-\frac{13}{7}$; 5; $11,163636\ldots$;
$4,21132142152\ldots$; $5,333\ldots$
Solución:

$-3 \in Z$; $2,71 \in Q$; $0 \in N$; $\sqrt{5} \in$ irracional; $1,2233222333\ldots \in$ irracional; $-\dfrac{13}{7} \in Q$; $5 \in N$; $11,163636\ldots \in Q$;
$4,21132142152\ldots \in$ irracional; $5,333\ldots \in Q$

Problema 13 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
3 ; $2,7171\ldots$; π ; $\sqrt{9}$; $3,22442224444\ldots$; $-\dfrac{7}{9}$; 0; $23,163737\ldots$;
$7,2122132142\ldots$; $6,111\ldots$

Solución:

$3 \in N$; $2,7171\ldots \in Q$; $\pi \in$ irracional; $\sqrt{9} = 3 \in N$; $3,22442224444\ldots \in$ irracional ; $-\dfrac{7}{9} \in Q$; $0 \in N$; $23,163737\ldots \in Q$;
$7,2122132142\ldots \in$ irracional; $6,111\ldots \in Q$

Problema 14 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
5; $4{,}8282$; $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{81}$; $3,2277222777\ldots$; $-\dfrac{5}{9}$; 0; $21,253838\ldots$;
$7,112113114\ldots$; $4,111\ldots$
Solución:

$5 \in N$; $4,8282\ldots \in Q$; $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in$ irracinal $\sqrt{81} = 9 \in N$; $3,2277222777\ldots \in$ irracinal; $-\dfrac{5}{9} \in Q$; $0 \in N$; $21,253838\ldots \in Q$;
$7,112113114\ldots \in$ irracinal; $4,111\ldots \in Q$

Problema 15 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
6 ; $7,5252\ldots$; π ; $\sqrt{36}$; $3,5577555777\ldots$; $-\dfrac{3}{4}$; -1; $1,143939\ldots$;
$7,772773774\ldots$; $9,999\ldots$

Solución:

$6 \in N$; $7,5252\ldots \in Q$; $\pi \in$ irracionales ; $\sqrt{36} = 6 \in N$; $3,5577555777\ldots \in$ irracionales ; $-\dfrac{3}{4} \in Q$; $-1 \in Z$; $1,143939\ldots \in Q$;

www.musat.net

$7,772773774\ldots \in$ irracionales; $9,999\ldots \in Q$

1.1.2. Intervalos

Problema 16 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $|x-3| < 1$
2. $|x-5| \leq 3$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a,r) = \{x \in R : |x-a| < r\}$.
Solución:

1. $E(3,1) = \{x \in R : |x-3| < 1\} \Longrightarrow E(3,1) = (3-1, 3+1) = (2,4)$.
2. $\overline{E}[5,3] = \{x \in R : |x-5| \leq 3\} \Longrightarrow \overline{E}[5,3] = [5-3, 5+3] = [2,8]$.

Problema 17 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $|x-4| < 2$
2. $|x-1| \leq 3$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a,r) = \{x \in R : |x-a| < r\}$.
Solución:

1. $E(4,2) = \{x \in R : |x-4| < 2\} \Longrightarrow E(4,2) = (4-2, 4+2) = (2,6)$.
2. $E[1,3] = \{x \in R : |x-1| \leq 3\} \Longrightarrow E[1,3] = [1-3, 1+3] = [-2,4]$.

Problema 18 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $\{x \in R : -3 \leq x < 7\}$
2. $\{x \in R : 4 < x < 8\}$
3. $\{x \in R : x \geq 3\}$
4. $\{x \in R : x < -1\}$
5. $\{x \in R : |x-3| \leq 5\}$
6. $\{x \in R : |x+1| < 2\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a,r) = \{x \in R : |x-a| < r\}$.
Solución:

www.musat.net

1. $\{x \in R : -3 \leq x < 7\} = [-3, 7)$
2. $\{x \in R : 4 < x < 8\} = (4, 8)$
3. $\{x \in R : x \geq 3\} = [3, +\infty)$
4. $\{x \in R : x < -1\} = (-\infty, -1)$
5. $\{x \in R : |x - 3| \leq 5\} = [3 - 5, 3 + 5] = [-2, 8]$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 2\} = (-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

Problema 19 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $\{x \in R : -2 \leq x < 6\}$
2. $\{x \in R : 1 < x < 9\}$
3. $\{x \in R : x \geq 1\}$
4. $\{x \in R : x < -3\}$
5. $\{x \in R : |x - 2| \leq 5\}$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 3\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$.
Solución:

1. $\{x \in R : -2 \leq x < 6\} = [-2, 6)$
2. $\{x \in R : 1 < x < 9\} = (1, 9)$
3. $\{x \in R : x \geq 1\} = [1, +\infty)$
4. $\{x \in R : x < -3\} = (-\infty, -3)$
5. $\{x \in R : |x - 2| \leq 5\} = [2 - 5, 2 + 5] = [-3, 7]$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 3\} = (-1 - 3, -1 + 3) = (-4, 2)$

Problema 20 Dados los intevalos $A = (-1, 4]$ $B = (-\infty, 2]$ y $C = (1, 3)$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Solución:

$$A \cap B = (-1, 2], \ \ A \cup C = (-1, 4], \ \ B \cap C = (1, 2], \ \ B \cup C = (-\infty, 3)$$

Problema 21 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

www.musat.net

1. $\{x \in R : |x-2| \leq 8\}$
2. $\{x \in R : |x+1| < 9\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a,r) = \{x \in R : |x-a| < r\}$.
Solución:

1. $\{x \in R : |x-2| \leq 8\} = \overline{E}(2,8) = \{x \in R : -6 \leq x \leq 10\} = [-6, 10]$
2. $\{x \in R : |x+1| < 9\} = E(-1,9) = \{x \in R : -10 < x < 8\} = (-10, 8)$

Problema 22 Dados los intevalos $A = (-2,4]$ $B = (-\infty, 2]$ y $C = (1,4)$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Solución:

$$A \cap B = (-2,2], \quad A \cup C = (-2,4], \quad B \cap C = (1,2], \quad B \cup C = (-\infty, 4)$$

Problema 23 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x-5| \leq 5\}$
2. $\{x \in R : |x+2| < 8\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a,r) = \{x \in R : |x-a| < r\}$.
Solución:

1. $\{x \in R : |x-5| \leq 5\} = \overline{E}(5,5) = [0,10] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 10\}$
2. $\{x \in R : |x+2| < 8\} = E(-2,8) = (-10,6) = \{x \in R : -10 < x < 6\}$

Problema 24 Dados los intevalos $A = (-3,4]$ $B = (-3,2]$ y $C = (0,4]$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Solución:

$$A \cap B = (-3,2], \quad A \cup C = (-3,4], \quad B \cap C = (0,2], \quad B \cup C = (-3,4)$$

Problema 25 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x-1| \leq 7\}$
2. $\{x \in R : |x+4| < 10\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a,r) = \{x \in R : |x-a| < r\}$.
Solución:

1. $\{x \in R : |x-1| \leq 7\} = \overline{E}(1,7) = [-6,8] = \{x \in R : -6 \leq x \leq 8\}$

2. $\{x \in R : |x + 4| < 10\} = E(-4, 10) = (-14, 6) =$

   $= \{x \in R : -14 < x < 6\}$

Problema 26 Dados los intevalos $A = (-3, 7]$ $B = (-\infty, 3]$ y $C = (0, 7)$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Solución:

$$A \cap B = (-3, 3], \;\; A \cup C = (-3, 7], \;\; B \cap C = (0, 3], \;\; B \cup C = (-\infty, 7)$$

Problema 27 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x - 2| \le 12\}$
2. $\{x \in R : |x + 3| < 11\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$.
Solución:

1. $\{x \in R : |x - 2| \le 12\} = \overline{E}(2, 12) = [-10, 14] =$

   $= \{x \in R : -10 \le x \le 14\}$
2. $\{x \in R : |x + 3| < 11\} = \overline{E}(-3, 11) = (-14, 8) =$

   $\{x \in R : -14 < x < 8\}$

1.1.3. Ecuaciones Bicuadradas

Problema 28

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Solución:

Hacemos $z = x^2 \Longrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0 \Longrightarrow z = 9 \;\; y \;\; z = -1.$

$$z = 9 = x^2 \Longrightarrow x = \pm 3$$

$$z = -1 = x^2 \text{ No Vale}$$

Problema 29

$$x^4 - 14x^2 - 32 = 0$$

Solución:

Hacemos $z = x^2 \Longrightarrow z^2 - 14z - 32 = 0 \Longrightarrow z = 16 \;\; y \;\; z = -2.$

$$z = 16 = x^2 \Longrightarrow x = \pm 4$$

$$z = -2 = x^2 \text{ No Vale}$$

www.musat.net

Problema 30

$$x^4 - 80x^2 - 81 = 0$$

Solución:

Hacemos $z = x^2 \Longrightarrow z^2 - 80z - 81 = 0 \Longrightarrow z = 81 \ y \ z = -1.$

$$z = 81 = x^2 \Longrightarrow x = \pm 9$$

$$z = -1 = x^2 \text{ No Vale}$$

Problema 31

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

Solución:

Hacemos $z = x^2 \Longrightarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \Longrightarrow z = 4 \ y \ z = -2.$

$$z = 4 = x^2 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$$z = -1 = x^2 \text{ No Vale}$$

Problema 32

$$x^4 - 24x^2 - 25 = 0$$

Solución:

Hacemos $z = x^2 \Longrightarrow z^2 - 24z - 25 = 0 \Longrightarrow z = 25 \ y \ z = -1.$

$$z = 25 = x^2 \Longrightarrow x = \pm 5$$

$$z = -1 = x^2 \text{ No Vale}$$

Problema 33

$$x^4 + x^2 - 20 = 0$$

Solución:

Hacemos $z = x^2 \Longrightarrow z^2 + z - 20 = 0 \Longrightarrow z = 4 \ y \ z = -5.$

$$z = 4 = x^2 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$$z = -5 = x^2 \text{ No Vale}$$

www.musat.net

1.2. Números Racionales

1.2.1. Operaciones con números racionales

Problema 34 Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$; $\dfrac{2}{5-\sqrt{5}}$

Solución:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

   $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{(1-(\sqrt{5})^2)} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-5} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

   $\dfrac{2}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{(5^2-(\sqrt{5})^2)} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

Problema 35 Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{7}}$; $\dfrac{3}{7-\sqrt{7}}$

Solución:

1. $\dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

   $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{7}} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{(1-(\sqrt{7})^2)} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{1-7} = -\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}$

   $\dfrac{3}{7-\sqrt{7}} = \dfrac{3(7+\sqrt{7})}{(7-\sqrt{7})(7+\sqrt{7})} = \dfrac{3(7+\sqrt{7})}{(7^2-(\sqrt{7})^2)} = \dfrac{3(7+\sqrt{7})}{42} = \dfrac{7+\sqrt{7}}{14}$

www.musat.net

Problema 36 Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{27}-\sqrt{3}+\sqrt{192}-2\sqrt{12},\quad \frac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}},\quad \sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{12}-2\sqrt{75}$$

Solución:

$$\sqrt{27}-\sqrt{3}+\sqrt{192}-2\sqrt{12}=7\sqrt{3},\quad \frac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[12]{a^7},$$

$$\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{12}-2\sqrt{75}=-6\sqrt{3}$$

Problema 37 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{3}{1+\sqrt{7}};\quad \frac{3}{\sqrt[3]{3}},\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Solución:

$$\frac{3}{1+\sqrt{7}}=-\frac{1-\sqrt{7}}{2};\quad \frac{3}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{9},\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}+2$$

Problema 38 Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{12}-2\sqrt{75},\quad \frac{\sqrt{75}\sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}},\quad \sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt{108}$$

Solución:

$$\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{12}-2\sqrt{75}=-6\sqrt{3},\quad \frac{\sqrt{75}\sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}}=5\sqrt[6]{5},$$

$$\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt{108}=22\sqrt{3}$$

Problema 39 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}};\quad \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}},\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Solución:

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2};\quad \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3},\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-\sqrt{10}-\sqrt{15}$$

Problema 40 Simplifica todo lo que puedas

$$3\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{72}+\sqrt{128},\quad \frac{\sqrt{27}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}},\quad \sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt{108}$$

Solución:

$$3\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{72}+\sqrt{128}=18\sqrt{2},\quad \frac{\sqrt{27}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}=9,$$

$$\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt{108}=22\sqrt{3}$$

www.musat.net

Problema 41 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{7}{2+\sqrt{11}};\quad \frac{6}{\sqrt[5]{3^2}},\quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

Solución:

$$\frac{7}{2+\sqrt{11}} = -2+\sqrt{11};\quad \frac{6}{\sqrt[5]{3^2}} = 2\sqrt[5]{3^3},\quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{7+\sqrt{21}}{4}$$

Problema 42 Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{75}+\frac{1}{2}\sqrt{192}+\sqrt{147},\quad \frac{\sqrt{216}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}},\quad \sqrt{96}-\sqrt{150}+2\sqrt{294}$$

Solución:

$$\sqrt{75}+\frac{1}{2}\sqrt{192}+\sqrt{147} = 16\sqrt{3},\quad \frac{\sqrt{216}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}} = 18\sqrt{2},$$

$$\sqrt{96}-\sqrt{150}+2\sqrt{294} = 13\sqrt{6}$$

Problema 43 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{4}{1+\sqrt{5}};\quad \frac{3}{\sqrt[7]{3^2}},\quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$$

Solución:

$$\frac{4}{1+\sqrt{5}} = -1+\sqrt{5};\quad \frac{3}{\sqrt[7]{3^2}} = \sqrt[7]{3^5},\quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = -\frac{3+\sqrt{21}}{4}$$

1.2.2. Ecuaciones Racionales

Problema 44

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x} = 4$$

Solución:

$$\sqrt{x-1} = 4+\sqrt{x} \Longrightarrow x-1 = 16+x+8\sqrt{x} \Longrightarrow -17 = 8\sqrt{x} \Longrightarrow x = \frac{289}{64}\ \text{no vale}$$

Problema 45

$$2+\sqrt{x-1} = x$$

Solución:

$$\sqrt{x-1} = x-2 \Longrightarrow x-1 = x^2+4-4x \Longrightarrow x^2-5x+5 = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3,618 \\ \\ x = 1,382\ \text{No Vale} \end{cases}$$

www.musat.net

Problema 46

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=3$$

Solución:

$$\sqrt{x-1}=3-\sqrt{x+1}\Longrightarrow x-1=9+x+1-6\sqrt{x+1}\Longrightarrow -11=-6\sqrt{x+1}\Longrightarrow x=\frac{85}{36}$$

Problema 47

$$3-\sqrt{x+2}=x$$

Solución:

$$-\sqrt{x+2}=x-3\Longrightarrow x+2=x^2+9-6x\Longrightarrow x^2-7x+7=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=5,79129 \text{ No Vale}\\ \\ x=1,20871\end{array}\right.$$

Problema 48

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x}=4$$

Solución:

$$\sqrt{x-3}=4-\sqrt{x}\Longrightarrow x-3=16+x-8\sqrt{x}\Longrightarrow -19=-8\sqrt{x}\Longrightarrow x=\frac{361}{64}$$

Problema 49

$$\sqrt{x+4}=x-1$$

Solución:

$$x+4=x^2+1-2x\Longrightarrow x^2-3x-3=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=3,7912\\ \\ x=-0,79128 \text{ No Vale}\end{array}\right.$$

Problema 50

$$\sqrt{2x-1}+x=8$$

Solución:

$$2x-1=64+x^2-16x\Longrightarrow x^2-18x+65=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=5\\ x=13 \text{ No Vale}\end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 51

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

Solución:

$$x + 1 = 1 + x^2 - 2x \Longrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \text{ No Vale} \end{cases}$$

Problema 52

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$$

Solución:

$$\sqrt{2x+3} = 2+\sqrt{x-2} \Longrightarrow 2x+3 = 4+x-2+4\sqrt{x-2} \Longrightarrow x+1 = -4\sqrt{x-2}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 16x + 32 \Longrightarrow x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 11 \end{cases}$$

Problema 53

$$\sqrt{3x-5} + x = 1$$

Solución:

$$3x - 5 = 1 + x^2 - 2x \Longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \text{ No Vale} \\ x = 2 \text{ No Vale} \end{cases}$$

Problema 54

$$\sqrt{x^2-8} = x + 2$$

Solución:

$$x^2 - 8 = x^2 + 4x + 4 \Longrightarrow x = -3 \text{ No Vale}$$

Problema 55 Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{2-x} = 4$$

Solución:

$$(\sqrt{x+6})^2 = (4 - \sqrt{2-x})^2$$

www.musat.net

$$x+6 = 16 + (\sqrt{2-x})^2 - 8\sqrt{2-x}$$
$$2x-12 = -8\sqrt{2-x}$$
$$x-6 = -4\sqrt{2-x}$$
$$(x-6)^2 = (-4\sqrt{2-x})^2$$
$$x^2+36-12x = 16(2-x)$$
$$x^2+4x+4=0 \Longrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2 \ \textit{doble}$$

Problema 56 Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=2$$

Solución:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (2-\sqrt{x})^2$$
$$x-1 = 4 + (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}$$
$$x-x-1-4 = -4\sqrt{x}$$
$$-5 = -4\sqrt{x}$$
$$(-5)^2 = (-4\sqrt{x})^2$$
$$25 = 16x \Longrightarrow x = \frac{25}{16}$$

Problema 57 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=7$$

Solución:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=7 \Longrightarrow \sqrt{x+7} = 7-\sqrt{x} \Longrightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (7-\sqrt{x})^2 \Longrightarrow$$
$$x+7 = 49+x-14\sqrt{x} \Longrightarrow -42 = -14\sqrt{x} \Longrightarrow 3 = \sqrt{x} \Longrightarrow x=9$$

Problema 58 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x}=3$$

Solución:

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x}=3 \Longrightarrow \sqrt{x+6} = 3-\sqrt{x} \Longrightarrow (\sqrt{x+6})^2 = (3-\sqrt{x})^2 \Longrightarrow$$
$$x+6 = 9+x-6\sqrt{x} \Longrightarrow -3 = -6\sqrt{x} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

www.musat.net

Problema 59 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

Solución:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-1} \Longrightarrow$$

$$x+1 = 1 + (x-1) + 2\sqrt{x-1} \Longrightarrow 1 = 4\sqrt{x-1} \Longrightarrow x = \frac{5}{4}$$

1.3. Logaritmos

1.3.1. Ecuaciones Logarítmicas

Problema 60 Resolver las ecuaciones:

1. $\log x + \log 50 = \log 1000$
2. $2\log x^3 = \log 8 + 3\log x$

Solución:

1.

$$\log x + \log 50 = \log 1000$$
$$\log(50x) = \log 1000$$
$$50x = 1000$$
$$x = \frac{1000}{50} = 20$$

2.

$$2\log x^3 = \log 8 + 3\log x$$
$$6\log x = \log 8 + 3\log x$$
$$6\log x - 3\log x = \log 8$$
$$3\log x = \log 8$$
$$\log x^3 = \log 2^3$$
$$x^3 = 2^3$$
$$x = 2$$

Problema 61 Resolver las ecuaciones:

www.musat.net

1. $3\log x + 2\log x^2 = \log 128$
2. $3\log x^2 = 4 + 4\log x$

Solución:

1. $$3\log x + 2\log x^2 = \log 128$$
$$3\log x + 4\log x = \log 128$$
$$7\log x = \log 128$$
$$\log x^7 = \log 2^7$$
$$x^7 = 2^7$$
$$x = 2$$

2. $$3\log x^2 = 4 + 4\log x$$
$$6\log x - 4\log x = 4$$
$$2\log x = 4$$
$$\log x = 2$$
$$\log x = \log 10^2$$
$$x = 10^2 = 100$$

Problema 62 Halla las soluciones de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

Solución:

$$\log(3x^2 - 2) = \log 10 + \log(x - 1)$$
$$\log(3x^2 - 2) = \log 10(x - 1)$$
$$3x^2 - 2 = 10(x - 1)$$
$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6}$$
$$x = \frac{10 \pm 2}{6} \Longrightarrow x = 2, \;\; x = \frac{4}{3}$$

www.musat.net

Problema 63 Halla las soluciones de:

$$\log(x^2+6x+7) = 1+\log(x+1)$$

Solución:

$$\log(x^2+6x+7) = \log 10 + log(x+1)$$
$$\log(x^2+6x+7) = \log 10(x+1)$$
$$x^2+6x+7 = 10(x+1)$$
$$x^2-4x-3=0 \Longrightarrow x=3,\ x=1$$

Problema 64 Hallar las soluciones reales de:

$$\log(3x^2-2) = 1+\log(x-1)$$

Solución:

$$\log(3x^2-2) = 1+\log(x-1) \Longrightarrow \log(3x^2-2) = \log 10 + \log(x-1) \Longrightarrow$$
$$\log(3x^2-2) = \log 10(x-1) \Longrightarrow (3x^2-2) = 10(x-1) \Longrightarrow 3x^2-10x+8=0$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Problema 65 Hallar las soluciones reales de:

$$\log(x^2+2699) = 2+\log(x+2)$$

Solución:

$$\log(x^2+2699) = 2+\lg(x+2) \Longrightarrow \log(x^2+2699) = \log 100 + \log(x+2) \Longrightarrow$$
$$\log(x^2+2699) = \log 100(x+2) \Longrightarrow (x^2+2699) = 100(x+2) \Longrightarrow$$
$$x^2-100x+2499=0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=51 \\ x=49 \end{array} \right.$$

Problema 66 Calcular

$$\log(x^2-1)+2 = 1+2\log(x+1)$$

Solución:

$$\log(x^2-1)+2 = 1+2\log(x+1) \Longrightarrow \log(x^2-1)+1 = 2\lg(x+1) \Longrightarrow$$
$$\lg 10(x^2-1) = \lg(x+1)^2 \Longrightarrow 10(x^2-1) = (x+1)^2 \Longrightarrow 9x^2-2x-11=0$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{11}{9} \end{array} \right.$$

La solución $x=-1$ no es válida.

www.musat.net

Problema 67 Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(1+x^2) - 1 = \log(x-2)$$

Solución:

$$\log(1+x^2) - 1 = \log(x-2) \Longrightarrow \log(1+x^2) - \log 10 = \log(x-2) \Longrightarrow$$

$$\log\left(\frac{1+x^2}{10}\right) = \log(x-2)$$

$$\frac{1+x^2}{10} = x-2 \Longrightarrow 1+x^2 = 10x-20 \Longrightarrow x^2-10x+21=0 \Longrightarrow$$

$$x=7,\ \ x=3$$

Problema 68 Resolver las ecuaciones:

1. $\log\dfrac{10}{x} = 2 - 2\log x$
2. $3\log x - 2 = 2\log x$

Solución:

1.

$$\log 10 - \log x = 2 - 2\log x$$

$$1 - \log x = 2 - 2\log x$$

$$2\log x - \log x = 2 - 1$$

$$\log x = 1 \Longrightarrow x = 10$$

2.

$$3\log x - 2 = 2\log x$$

$$3\log x - 2\log x = 2$$

$$\log x = 2 \Longrightarrow x = 10^2 = 100$$

Problema 69 Resolver las ecuaciones:

1. $\log 10(x+2) - \log(x^2) = 1$
2. $\log x + \log x^2 = 3$

Solución:

www.musat.net

1.

$$\log\frac{10(x+2)}{x^2}=\log 10$$

$$\frac{10(x+2)}{x^2}=10$$

$$10x+20=10x^2$$

$$x^2-x-2=0\Longrightarrow x=2,\quad x=-1$$

2.

$$\log x+2\log x=3$$

$$3\log x=3$$

$$\log x=1\Longrightarrow x=10$$

Problema 70

$$\log(3x+1)-2\log x=2$$

Solución:

$$\log\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)=\log 100\Longrightarrow 100x^2-3x-1=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=0,116187\\ x=-0,0861187 \text{ No Vale}\end{array}\right.$$

Problema 71

$$\log(2x+1)-2\log x=1$$

Solución:

$$\log\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)=\log 10\Longrightarrow 10x^2-2x-1=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=0,43166\\ x=-0,23166 \text{ No Vale}\end{array}\right.$$

Problema 72

$$2\log(x+1)-\log x=1$$

Solución:

$$\log\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right)=\log 10\Longrightarrow x^2-8x+1=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=0,127\\ x=7,873\end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 73

$$\log x - \log(1-x) = 2$$

Solución:

$$\log\left(\frac{x}{1-x}\right) = \log 100 \Longrightarrow 101x = 100 \Longrightarrow x = \frac{100}{101}$$

Problema 74

$$\log(x+1) - \log(x^2-1) = 1$$

Solución:

$$\log\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right) = \log 10 \Longrightarrow 10x^2 - x - 11 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1,1 \\ x = -1 \text{ No Vale} \end{array}\right.$$

Problema 75

$$\log x - \log(1-x) = 2$$

Solución:

$$\log\left(\frac{x}{1-x}\right) = \log 100 \Longrightarrow 101x = 100 \Longrightarrow x = \frac{100}{101}$$

Problema 76 Resolver las ecuaciones:

1. $\log x^2 - \log(x-1) + 1 = 2\log x$
2. $\log(x+1) - 2\log(x-1) = 1$

Solución:

1. $\log x^2 - \log(x-1) + 1 = 2\log x \Longrightarrow \log \dfrac{10x^2}{x-1} = \log x^2 \Longrightarrow$

   $x^2(11-x) = 0 \Longrightarrow x = 11$ y $x = 0$ (no vale).
2. $\log(x+1) - 2\log(x-1) = 1 \Longrightarrow \log \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \log 10 \Longrightarrow$

   $10x^2 - 21x + 9 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ y $x = \dfrac{3}{5}$ no vale

Problema 77 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(10x^2 - 2) - 1 = \log(x+1) + \log x$
2. $\log(3x^2 - 2) - 2\log(1-x) = 1$

Solución:

www.musat.net

1. $\log(10x^2-2)-1=\log(x+1)+\log x \Longrightarrow \log\dfrac{10x^2-2}{10}=\log x(x+1)$

   $\Longrightarrow 10x^2-2=10x(x+1)\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$

2. $\log(3x^2-2)-2\log(1-x)=1\Longrightarrow \log\dfrac{3x^2-2}{(1-x)^2}=\log 10\Longrightarrow$

   $7x^2-20x+12=0\Longrightarrow x=\dfrac{6}{7},\quad x=2$ (no vale)

Problema 78 Resolver las ecuaciones:

1. $2\log(x-1)+1=\log(x^2-1)$
2. $\log(10(x^3+2x))-2\log(x+1)=1+\log x$

Solución:

1. $2\log(x-1)+1=\log(x^2-1)\Longrightarrow \log 10(x-1)^2=\log(x^2-1)$

   $\Longrightarrow 9x^2-20x+11=0\Longrightarrow x=\dfrac{11}{9}$ y $x=1$ (no vale).

2. $\log(10(x^3+2x))-2\log(x+1)=1+\log x\Longrightarrow$

   $\log\dfrac{10(x^3+2x)}{(x+1)^2}=\log 10x\Longrightarrow 2x^2-x=0\Longrightarrow$

   $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=0$ (no vale).

Problema 79 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1)+\log(x+1)=2\log x-1$
2. $\log x^2+3\log x=2$

Solución:

1. $\log(x-1)+\log(x+1)=2\log x-1\Longrightarrow \log(x^2-1)=\log(x-1)^2$

   $\Longrightarrow 9x^2=10\Longrightarrow x=\dfrac{\sqrt{10}}{3},\quad x=-\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (no vale)

2. $\log x^2+3\log x=2\Longrightarrow \log x^5=\log 100\Longrightarrow x=\sqrt[5]{100}=2,51188$

Problema 80 Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(2+x)-\log x=1+\log(1-x)$$

Solución:

$$\log(2+x)-\log x=1+\log(1-x)\Longrightarrow \log\frac{2+x}{x}=\log 10+\log(1-x)$$

$$\log \frac{2+x}{x} = \log(10(1-x)) \Longrightarrow 10x^2 - 9x + 2 = 0 \Longrightarrow \; x = \frac{1}{2}, \;\; x = \frac{2}{5}$$

Problema 81 Unos problemas para ejercitarse:

1. $5\log 2x = 20$ Sol: $x = 5000$
2. $3\log 5x = -9$ Sol: $x = 0,0002$
3. $\log \frac{2x-4}{5} = 2$ Sol: $x = 252$
4. $\log(x+1)^2 = 2$ Sol: $x = 9$; $x = -11$
5. $\log(7x+15) - \log 5 = 1$ Sol: $x = 5$
6. $\log \frac{x}{2} = 1 + \log(21-x)$ Sol: $x = 20$
7. $\log \frac{10}{x} = 2 - 2\log x$ Sol: $x = 10$; $x = 0$
8. $2\log x - \log(x^2 - 2x + 6) = 0$ Sol: $x = 3$
9. $\log(2x-3) + \log(3x-2) = 2 - \log 25$ Sol: $x = 2$; $x = \frac{1}{6}$
10. $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x-1)$ Sol: $x = 2$; $x = \frac{4}{3}$
11. $\log x^2 + 3\log x = 2$ Sol: $x = 10^{\frac{2}{5}}$
12. $2\log x^2 - 2\log x = 2$ Sol: $x = 10$
13. $\log x^2 + 1 = \log x^3$ Sol: $x = 10$
14. $\log(1-x) + \log x = 1$ Sol: No tiene solución real.
15. $\log x - \log(1-x) = 1$ Sol: $x = \frac{10}{11}$
16. $\log x + 2 = \log x^3$ Sol: $x = 10$
17. $\log(1+x) + \log(1-x) = 2$ Sol: No tiene solución real.
18. $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5$ Sol: $x = 4$
19. $\frac{\log(35-x^2)}{\log(5-x)} = 3$ Sol: $x = 3 : \; x = 2$
20. $\log x^2 - \log \frac{10x+11}{10} = 1$ Sol: $x = 11$; $x = -1$
21. $\log(2x+2) + \log(x+3) = \log 6$ Sol: $x = 0$, $x = -4$
22. $\frac{\log 2 + \log(x^2-2)}{\log(2x-2)} = 2$ Sol: $x = 2$
23. $\log(x+6) - \frac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$ Sol: $x = 6$; $x = 14$
24. $\log x = \log 2 + 2\log(x-3)$ Sol: $x = \frac{9}{2}$; $x = 2$

www.musat.net

25. $2\log x = 2 + \log x$ Sol: $x = 0;\quad x = 2$

26. $\log 8 + (x^2 - 5x + 7)\log 3 = \log 24$ Sol: $x = 3;\quad x = 2$

27. $2\log x - \log 16 = \log\frac{x}{2}$ Sol: $x = 0;\quad x = 8$

28. $\log(2x+4)+\log(3x+1)-\log 4 = 2\log(8-x)$ Sol: $x = -42\quad x = 3$

29. $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$ Sol: $x = 3\quad x = 2$

30. $\frac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$ Sol: $x = \frac{1}{3}\quad x = 3$

31. $\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2}\log(x + 4)$ Sol: $x = 0$

32. $(x^2 - x + 3)\log 4 = 3\log\frac{1}{4}$ Sol: No tiene solución.

1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas

Problema 82 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3\log x+ & 2\log y = & 12 \\ & \log\frac{x}{y} = & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3\log x+ & 2\log y = & 12 \\ & \log\frac{x}{y} = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3\log x+ & 2\log y = & 12 \\ \log x- & \log y = & -1 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3u+ & 2v = & 12 \\ u- & v = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3u+ & 2v = & 12 \\ 2u- & 2v = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 2 \\ v = 3 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = 2 \\ \log y = v = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log x = \log 10^2 \\ \log y = \log 10^3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 100 \\ y = 1000 \end{array}\right.$$

Problema 83 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2\log x+ & \log y = & 4 \\ & \log\frac{x}{y} = & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2\log x+ & \log y = & 4 \\ & \log\frac{x}{y} = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2\log x+ & \log y = & 4 \\ \log x- & \log y = & -1 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2u+ & v = & 4 \\ u- & v = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 2 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = 1 \\ \log y = v = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log x = \log 10^1 \\ \log y = \log 10^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 100 \end{array}\right.$$

Problema 84 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log \frac{x^3}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log \frac{x^3}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3\log x- & 2\log y = & 1 \\ 2\log x+ & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3u- & 2v = & 1 \\ 2u+ & v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3u- & 2v = & 1 \\ 4u+ & 2v = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{5}{7} \\ v = \frac{4}{7} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{5}{7} \\ \log y = v = \frac{4}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{5}{7}} \\ y = 10^{\frac{4}{7}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5,179474679 \\ y = 3,72759372 \end{array}\right.$$

Problema 85 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log \frac{x^4}{y} & = & 1 \\ \log(x\cdot y^2) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log \frac{x^4}{y} & = & 1 \\ \log(x\cdot y^2) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4\log x- & \log y = & 1 \\ \log x + 2 & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4u- & v = & 1 \\ u+ & 2v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4u- & v = & 1 \\ -4u- & 8v = & -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{4}{9} \\ v = \frac{7}{9} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{4}{9} \\ \log y = v = \frac{7}{9} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{4}{9}} \\ y = 10^{\frac{7}{9}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2,782559402 \\ y = 5,994842503 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 86 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^3}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^3}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 3\log x- & 2\log y = & 1 \\ 2\log x+ & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3u- & 2v = & 1 \\ 2u+ & v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 3u- & 2v = & 6 \\ 4u+ & 7v = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{9}{7} \\ v = \frac{4}{7} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{5}{7} \\ \log y = v = \frac{4}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{5}{3}} \\ y = 10^{\frac{4}{7}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5,179474679 \\ y = 2,71755372 \end{array}\right.$$

Problema 87 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^3}{y^2} & = & 2 \\ \log(x^2y) & = & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^3}{y^2} & = & 2 \\ \log(x^2y) & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 3\log x- & 2\log y = & 2 \\ 2\log x+ & \log y = & 3 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3u- & 2v = & 2 \\ 2u+ & v = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 3u- & 2v = & 2 \\ 4u+ & 2v = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{8}{7} \\ v = \frac{5}{7} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{8}{7} \\ \log y = v = \frac{5}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{8}{7}} \\ y = 10^{\frac{5}{7}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 13,89495494 \\ y = 5,179474679 \end{array}\right.$$

Problema 88 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{cl} \log(x\cdot y) & = 3 \\ \log\dfrac{x}{y} & = 1 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(x\cdot y) & = 3 \\ \log\dfrac{x}{y} & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} \log x+ & \log y = & 3 \\ \log x- & \log y = & 1 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} u+ & v = & 3 \\ u- & v = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 2 \\ v = 1 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = 2 \\ \log y = v = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^2 = 100 \\ y = 10 \end{array}\right.$$

Problema 89 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log x - \log y^2 & = 3 \\ \log(x^2\cdot y) & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log x - \log y^2 & = 3 \\ \log(x^2\cdot y) & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} \log x- & 2\log y = & 3 \\ 2\log x+ & \log y = & 1 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} u- & 2v = & 3 \\ 2u+ & v = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 1 \\ v = -1 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = 1 \\ \log y = v = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^1 = 10 \\ y = 10^{-1} = 0,1 \end{array}\right.$$

Problema 90 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2 y) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2 y) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} \log x- & 2\log y = & 1 \\ 2\log x+ & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} u- & 2v = & 1 \\ 2u+ & v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 0 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = 1 \\ \log y = v = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Problema 91 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log \frac{x}{y^2} & = & 3 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log \frac{x}{y^2} & = & 3 \\ \log(x^2y) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} \log x- & 2\log y = & 3 \\ 2\log x+ & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} u- & 2v = & 3 \\ 2u+ & v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{7}{5} \\ v = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{7}{5} \\ \log y = v = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{7/5} = 25,11886431 \\ y = 10^{-4/5} = 0,1584893192 \end{array}\right.$$

Problema 92

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(xy^2) & = 2 \\ \log\left(\dfrac{x^2}{y}\right) & = 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} \log x+ & \log y = & 2 \\ 2\log x- & \log y = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} u+ & v = & 2 \\ 2u- & v = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \log x = 8/5 \Longrightarrow x = 39,81 \\ v = \log y = 1/5 \Longrightarrow y = 1,5849 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 93

$$\begin{cases} \log(x^2y) & = 3 \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right) & = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2\log x+ & \log y = & 3 \\ \log x- & \log y = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2u+ & v = & 3 \\ u- & v = & 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u = \log x = 5/3 \Longrightarrow x = 46,41589 \\ v = \log y = -1/3 \Longrightarrow y = 0,464159 \end{cases}$$

Problema 94

$$\begin{cases} 2\log(xy) & = 3 \\ \log\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2\log x+ & 2\log y = & 3 \\ \log x- & 2\log y = & 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2u+ & 2v = & 3 \\ u- & 2v = & 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u = \log x = 8/3 \Longrightarrow x = 464,1588 \\ v = \log y = -7/6 \Longrightarrow y = 0,068129 \end{cases}$$

Problema 95

$$\begin{cases} \log x+ & \log y = 3 \\ 2\log x- & \log y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log x+ & \log y = 3 \\ 2\log x- & \log y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u+ & v = & 3 \\ 2u- & v = & 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u = \log x = 1 \Longrightarrow x = 10 \\ v = \log y = 2 \Longrightarrow y = 100 \end{cases}$$

Problema 96

$$\begin{cases} \log(x^3y^2) & = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) & = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3\log x+ & 2\log y = 8 \\ \log x- & \log y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3u+ & 2v = & 8 \\ u- & v = & 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u = \log x = 2 \Longrightarrow x = 100 \\ v = \log y = 1 \Longrightarrow y = 10 \end{cases}$$

www.musat.net

Problema 97

$$\left\{\begin{array}{rr} \log x+ & 2\log y = 3 \\ -\log x+ & \log y = 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rr} \log x+ & 2\log y = 3 \\ -\log x+ & \log y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} u+ & 2v = & 3 \\ -u+ & v = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \log x = 1 \Longrightarrow x = 10 \\ v = \log y = 1 \Longrightarrow y = 10 \end{array}\right.$$

Problema 98 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(xy)^2 & = 4 \\ \\ \log\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right) & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(xy)^2 & = 4 \\ \\ \log\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right) & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2\log x + 2\log y & = 4 \\ 3\log x - 2\log y & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2u + 2v & = 4 \\ 3u - 2v & = 1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \log x = 1 \\ v = \log y = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 10 \end{array}\right.$$

Problema 99 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(xy)^2 & = 4 \\ \\ \log\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & = 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(xy)^2 & = 4 \\ \\ \log\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2\log x + 2\log y & = 4 \\ \log x - 2\log y & = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2u + 2v & = 4 \\ u - 2v & = 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 2 = \log x \\ v = 0 = \log y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 100 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 100 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{ll}\log(xy)^2 & = 8\\ \log\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & = 4\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll}\log(xy)^2 & = 8\\ \log\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & = 4\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl}2\log x+ & 2\log y = 8\\ \log x- & 2\log y = 4\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl}2u+ & 2v = 8\\ u- & 2v = 4\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}u = 4\\ v = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}u = 4 = \log x \Longrightarrow x = 10000\\ v = 0 = \log y \Longrightarrow y = 1\end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 101 Unos problemas para ejercitarse:

1.
$$\left\{\begin{array}{rlr}2\log x- & 5\log y = & -1\\ 3\log x+ & 2\log y = & 8\end{array}\right.$$
Sol: $x = 100;\quad y = 10$

2.
$$\left\{\begin{array}{ccr}4\log x - 3\log y & = & -1\\ \log(x\cdot y) & = & 5\end{array}\right.$$
Sol: $x = 100;\quad y = 1000$

3.
$$\left\{\begin{array}{ccc}\log x + \log y^3 & = & 5\\ \log\frac{x^3}{y^2} & = & 4\end{array}\right.$$
Sol: $x = 100;\quad y = 10$

4.
$$\left\{\begin{array}{cl}\log(x^2\cdot y) & = 2\\ \log\frac{x}{y} & = 1\end{array}\right.$$
Sol: $x = 10;\quad y = 1$

5.
$$\left\{\begin{array}{cr}\log x^2 - 3\log y & = -1\\ \log(x\cdot y^2) & = 3\end{array}\right.$$
Sol: $x = 10;\quad y = 10$

6.
$$\begin{cases} \log x^2 - 3\log y & = 2 \\ \log(\frac{x}{y^2}) & = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10^{-5}$; $y = 10^{-4}$

7.
$$\begin{cases} \log x - \log y & = 7 \\ \log x + \log y & = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10^5$; $y = 10^{-2}$

8.
$$\begin{cases} x - y & = 15 \\ \log x + \log y & = 2 \end{cases}$$

Sol: $x = -5$; $y = -20$ o bien $x = 20$; $y = 5$

9.
$$\begin{cases} \log x + 3\log y & = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} & = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

10.
$$\begin{cases} 2\log x^2 & -\log y^2 & = 4 \\ 2\log x & +\log y^2 & = 2 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 1$

1.4. Exponenciales

1.4.1. Ecuaciones Exponenciales:

Problema 102 Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

Solución:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 3^{2(2x+3)} = 3^{3(x-1)}$$
$$3^{x^2+5x-4+2(2x+3)} = 3^{3(x-1)}$$
$$x^2 + 5x - 4 + 4x + 6 = 3x - 3$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{4}$$
$$x = \frac{-6 \pm 4}{2} \Longrightarrow x = -1,\ x = -5$$

www.musat.net

Problema 103 Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

Solución:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 3^{2(2x+3)} = 3^{3(x-1)}$$
$$3^{x^2+5x-4+2(2x+3)} = 3^{3(x-1)}$$
$$x^2 + 5x - 4 + 4x + 6 = 3x - 3$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{4}$$
$$x = \frac{-6 \pm 4}{2} \Longrightarrow x = -1, \ x = -5$$

Problema 104 Calcular

$$2 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$$

Solución:

$$2 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{2 \cdot 3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^x - 1 = 0 \Longrightarrow 2 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 3^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$2u^2 + 9u - 3 = 0 \Longrightarrow u = 0,3117376914, \ \ u = -4,811737691$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,3117376914 = 3^x \Longrightarrow \log 0,3117376914 = \log 3^x \Longrightarrow$$
$$x \log 3 = \log 0,3117376914 \Longrightarrow$$
$$x = \frac{\log 0,3117376914}{\log 3} = -1,060968632$$

En el otro caso, $u = -4,811737691 = 3^x$ no es posible obtener solución.

Problema 105

$$7^{2x-1} + 7^{x+1} - 1 = 0$$

Solución:

$$\frac{(7^x)^2}{7} + 7 \cdot 7^x - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{t^2}{7} + 7t - 1 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 0,14244 \\ t = -49,14224 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0,14244 = 7^x \Longrightarrow x = -1,0015 \\ t = -49,14224 = 7^x \Longrightarrow \ \text{No Vale} \end{array} \right.$$

www.musat.net

Problema 106

$$6^{2x-1}+6^{x+1}-1=0$$

Solución:

$$\frac{(6^x)^2}{6}+6\cdot 6^x-1=0\Longrightarrow \frac{t^2}{6}+6t-1=0\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0,027764\\ t=-36,02776\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=0,027764=6^x\Longrightarrow x=-2,0004\\ t=-36,02776=6^x\Longrightarrow \text{ No Vale}\end{array}\right.$$

Problema 107

$$3^{2x+1}-3^{x-1}-1=0$$

Solución:

$$3(3^x)^2-\frac{3^x}{3}-1=0\Longrightarrow 3t^2-\frac{t}{3}-1=0\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0,63557\\ t=-0,524461\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=0,63557=3^x\Longrightarrow x=-0,41255\\ t=-0,524461=3^x\Longrightarrow \text{ No Vale}\end{array}\right.$$

Problema 108

$$2^x-2^{x+1}+1=0$$

Solución:

$$2^x-2\cdot 2^x+1=0\Longrightarrow t-2t+1=0\Longrightarrow\ t=1$$

$$t=2^x=1\Longrightarrow\ x=0$$

Problema 109

$$5^{2x-1}-5^x+1=0$$

Solución:

$$\frac{(5^x)^2}{5}-5^x+1=0\Longrightarrow \frac{t^2}{5}-t+1=0\Longrightarrow\ t^2-5t+5=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=5^x=3,618\Longrightarrow x=0,714\\ t=5^x=1,381\Longrightarrow x=0,296\end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 110

$$2^x - 2^{x-1} - 1 = 0$$

Solución:

$$2^x - \frac{2^x}{2} - 1 = 0 \Longrightarrow t - \frac{t}{2} - 1 = 0 \Longrightarrow t = 2 \Longrightarrow 2^x = 2 \Longrightarrow x = 1$$

Problema 111 Unos problemas para ejercitarse:

1. $2^{x+1} = 8$ Sol: $x = 2$
2. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ Sol: $x = 3$
3. $6^{12-3x} = 216$ Sol: $x = 3$
4. $5^{3x-12} = 125$ Sol: $x = 5$
5. $2^x + 2^{x+3} = 36$ Sol: $x = 2$
6. $3^x + 3^{x-2} = 270$ Sol: $x = 5$
7. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{31}{25}$ Sol: $x = -2$
8. $5^{2x^2+3x-11} = 125$ Sol: $x = 2;\ x = -\frac{7}{2}$
9. $4^x + 2^{2x-1} = 24$ Sol: $x = 2$; la otra solución no es real.
10. $2^x + 2^{2x} = 6$ Sol: $x = 1$; la otra solución no es real.
11. $3^{x+3} + 9^{x+2} = 4$ Sol: $x = -2$; la otra solución no es real.
12. $4^{2x+1} - 4^{x+2} = 768$ Sol: $x = 2$; la otra solución no es real.
13. $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$ Sol: $x = 3$
14. $9^{x+3} = 3^{2x+5}$ Sol: No tiene solución.
15. $8^{x^2+3x+2} = 1$ Sol: $x = -1;\ \ x = -2$
16. $5^x + 5^{x-1} + x^{x-2} = 31$ Sol: $x = 2$
17. $2^{x+2} = 0,5^{2x-1}$ Sol: $x = -\frac{1}{3}$
18. $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$ Sol: $x = 1$
19. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ Sol: $x = 2;\ \ x = 0$
20. $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$ Sol: $x = -1;\ \ x = -2$
21. $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$ Sol: $x = 3$

www.musat.net

22. $10^{x^2-11x+30}=(2\cdot 5)^2$ Sol: $x=7;\quad x=4$
23. $3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=117$ Sol: $x=3$
24. $3^{2(x+1)}-28\cdot 3^x+3=0$ Sol: $x=-2;\quad x=1$
25. $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$ Sol: $x=2;\quad x=1$
26. $\left(\frac{2}{7}\right)^5=3,5^{x+1}$ Sol: $x=-6$
27. $5^x-\frac{5}{5^{x-1}}-24=0$ Sol: $x=2$
28. $\left(4^{3-x}\right)^{2-x}=1$ Sol: $x=3;\quad x=2$
29. $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$ Sol: $x=\pm 2$
30. $3^{2x-1}=\sqrt[3]{9^{x^2-\frac{1}{4}}}$ Sol: $x=\frac{11}{2};\quad x=\frac{1}{2}$
31. $3\cdot 2^{x+3}=192\cdot 3^{x-3}$ Sol: No tiene solución.

Problema 112 Más problemitas:

1. $2^{x-2}+2^{x+1}-1=0$ Sol: $x=-1,169925001$
2. $3^{x+1}+3^x-3^{x-1}=2$ Sol: $x=-0,5517286062$
3. $2^{x-2}-2^x+2^{x-1}=0$ Sol: No tiene solución.
4. $3^{x-2}+2\cdot 3^x=1$ Sol: $x=-0,6801438331$
5. $4^{x-1}-3\cdot 4^x+4^{x-2}=0$ Sol: No tiene solución.
6. $2^{2x-1}+2^{x+1}-2=0$ Sol: $x=-0,2715533031$
7. $5^{2x-1}+3\cdot 5^x-2=0$ Sol: $x=-0,2778665354$
8. $3^{2x-2}+3^{x-1}-1=0$ Sol: $x=-1,011034949$
9. $2^{2x+1}-3\cdot 2^{x-1}-3=0$ Sol: $x=0,7275884076$
10. $2^{2x-1}-3\cdot 2^{x+2}-2=0$ Sol: $x=4,594878436$
11. $7^{2x-1}-7^{x+1}-2=0$ Sol: $x=2,002970617$
12. $6^{2x-1}-6^{x-1}-4=0$ Sol: $x=0,9437163029$
13. $5^{4x-1}-5^{2x+1}-3=0$ Sol: $x=0,4606479652$
14. $4^{4x-1}-4^{2x+1}-7=0$ Sol: $1,034204992$
15. $7^{4x+1}+3\cdot 7^{2x}-5=0$ Sol: $x=-0,1076980693$

www.musat.net

16. $3^{4x+1} + 2 \cdot 3^{2x-2} - 2 = 0$ Sol: $x = -0,1129051332$

17. $2^{4x+2} + 3 \cdot 2^{2x} - 1 = 0$ Sol: $x = -1$

18. $5^{4x-2} + 5^{2x} - 1 = 0$ Sol: $x = -0,01174112826$

1.4.2. Sistemas de Ecuaciones Exponenciales:

Problema 113 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4^{x+1}- & 6^y = & 40 \\ 2\cdot 4^x- & 6^y = & -88 \end{array}\right.$$

Solución

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4^{x+1}- & 6^y = & 40 \\ 2\cdot 4^x- & 6^y = & -88 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4\cdot 4^x- & 6^y = & 40 \\ 2\cdot 4^x- & 6^y = & -88 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $4^x = u$ y $6^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4u- & v = & 40 \\ 2u- & v = & -88 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 64 \\ v = 216 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 4^x = u = 64 \\ 6^y = v = 216 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4^x = 4^3 \\ 6^y = 6^3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \end{array}\right.$$

Problema 114 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2^x+ & 5^y = & 9 \\ 2^{x+2}+ & 5^{y+1} = & 41 \end{array}\right.$$

Solución

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2^x+ & 5^y = & 9 \\ 2^{x+2}+ & 5^{y+1} = & 41 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2^x+ & 5^y = & 9 \\ 4\cdot 2^x+ & 5\cdot 5^y = & 41 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $5^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} u+ & v = & 9 \\ 4u+ & 5v = & 41 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 4 \\ v = 5 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = 4 \\ 5^y = v = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^x = 2^2 \\ 5^y = 5^1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 115 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 4 \\ 2^{x+1}- & 3^{y+1} = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 4 \\ 2^{x+1}- & 3^{y+1} = & 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{2^x}{2}+ & 3\cdot 3^y = & 4 \\ 2\cdot 2^x- & 3\cdot 3^y = & 5 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{u}{2}+ & 3v = & 4 \\ 2u- & 3v = & 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \frac{18}{5} \\ v = \frac{11}{15} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} 2^x = u = \frac{18}{5} \\ 3^y = v = \frac{11}{15} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\log 2 = \log\frac{18}{5} \\ y\log 3 = \log\frac{11}{15} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\log\frac{18}{5}}{\log 2} = 1,847996906 \\ y = \frac{\log\frac{11}{15}}{\log 3} = -0,2823151820 \end{cases}$$

Problema 116 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 4 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 4 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\cdot 2^x- & \frac{3^y}{3} = & 4 \\ 2\cdot 2^x+ & 3\cdot 3^y = & 5 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2u- & \frac{v}{3} = & 4 \\ 2u+ & 3v = & 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \frac{41}{20} = 2,05 \\ v = \frac{3}{10} = 0,3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} 2^x = u = \frac{41}{20} \\ 3^y = v = \frac{3}{10} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\log 2 = \log\frac{41}{20} \\ y\log 3 = \log\frac{3}{10} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\log\frac{41}{20}}{\log 2} = 1,035623909 \\ y = \frac{\log\frac{3}{10}}{\log 3} = -1,095903274 \end{cases}$$

Problema 117 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 3 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 4 \end{cases}$$

www.musat.net

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1}= & 3 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1}= & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2\cdot 2^x- & \frac{3^y}{3}= & 3 \\ 2\cdot 2^x+ & 3\cdot 3^y= & 4 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2u- & \frac{v}{3}= & 3 \\ 2u+ & 3v= & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=\frac{31}{20}=1,55 \\ v=\frac{3}{10}=0,3 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x=u=\frac{31}{20} \\ 3^y=v=\frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2=\log\frac{31}{20} \\ y\log 3=\log\frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\log\frac{31}{20}}{\log 2}=0,6322682154 \\ y=\frac{\log\frac{3}{10}}{\log 3}=-1,095903274 \end{array}\right.$$

Problema 118 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1}= & 1 \\ 2^{x-1}+ & 3^{y+1}= & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1}= & 1 \\ 2^{x-1}+ & 3^{y+1}= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2\cdot 2^x+ & \dfrac{3^y}{3}= & 1 \\ \\ \dfrac{2^x}{2}- & 3\cdot 3^y= & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2u- & \dfrac{v}{3}= & 1 \\ \\ \dfrac{u}{2}+ & 3v= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 6u- & v= & 3 \\ u+ & 6v= & 4 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u=\frac{22}{37} \\ v=\frac{21}{37} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x=u=\frac{22}{37} \\ 3^y=v=\frac{21}{37} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2=\log\frac{22}{37} \\ y\log 3=\log\frac{21}{37} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\log\frac{22}{37}}{\log 2}=-0,7500217469 \\ y=\frac{\log\frac{21}{37}}{\log 3}=-0,5155553790 \end{array}\right.$$

Problema 119

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3^{x-1}+ & 2^{y+1} & =2 \\ 3^x- & 2^y & =3 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3^x}{3}+ & 2\cdot 2^y & =2 \\ & & \\ 3^x- & 2^y & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{u}{3}+ & 2v & =2 \\ & & \\ u- & v & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{27}{7}=3^x \Longrightarrow x=1,22876 \\ \\ v=\dfrac{13}{7}=2^y \Longrightarrow y=0,89385 \end{array}\right.$$

Problema 120

$$\left\{\begin{array}{lll} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} & =5 \\ 2^x- & 3^y & =2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{2^x}{2}+ & 3\cdot 3^y & =5 \\ & & \\ 2^x- & 3^y & =2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{u}{2}+ & 3v & =5 \\ & & \\ u- & v & =2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{22}{7}=2^x \Longrightarrow x=1,65208 \\ \\ v=\dfrac{8}{7}=3^y \Longrightarrow y=0,12154 \end{array}\right.$$

Problema 121

$$\left\{\begin{array}{lll} 3^{x-2}+ & 2^y & =1 \\ 2^x+ & 3\cdot 2^y & =5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3^x}{9}+ & 2^y & =1 \\ & & \\ 3^x+ & 3\cdot 2^y & =5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{u}{9}+ & v & =1 \\ & & \\ u+ & 3v & =5 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=3=3^x \Longrightarrow x=1 \\ \\ v=\dfrac{2}{3}=2^y \Longrightarrow y=-0,585 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 122

$$\left\{\begin{array}{lll} 2^x- & 3^y & =1 \\ 2^x+ & 3^y & =3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lll} 2^x- & 3^y & =1 \\ 2^x+ & 3^y & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} u- & v & =1 \\ \\ u+ & v & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=2=2^x \Longrightarrow x=1 \\ \\ v=1=3^y \Longrightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Problema 123

$$\left\{\begin{array}{lll} 2^{x+2}- & 3^y & =1 \\ 2^x+ & 2\cdot 3^y & =3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lll} 2\cdot 2^x- & 3^y & =1 \\ 2^x+ & 2\cdot 3^y & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2u- & v & =1 \\ \\ u+ & 2v & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=1=2^x \Longrightarrow x=0 \\ \\ v=1=3^y \Longrightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Problema 124

$$\left\{\begin{array}{lll} 2^x+ & 3^y & =2 \\ 2^{x+1}- & 3^y & =1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lll} 2^x+ & 3^y & =2 \\ 2\cdot 2^x- & 3^y & =1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} u+ & v & =2 \\ \\ 2u- & v & =1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=1=2^x \Longrightarrow x=0 \\ \\ v=1=3^y \Longrightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Problema 125 Unos problemas para ejercitarse:

1.

$$\left\{\begin{array}{llr} 3\cdot 2^x- & 4\cdot 7^y = & -172 \\ 7\cdot 2^x+ & 2\cdot 7^y = & 154 \end{array}\right.$$

Sol: $x=3;\quad y=2$

www.musat.net

2.

$$\begin{cases} 4^{x+1} - & 6^y = & 40 \\ 2\cdot 4^x - & 6^y = & -88 \end{cases}$$

Sol: $x = 3; \quad y = 3$

3.

$$\begin{cases} 2\cdot 3^{x+1} - & 5^{y+2} = & -2639 \\ 4\cdot 3^x + & 5^y = & 449 \end{cases}$$

Sol: $x = 4; \quad y = 4$

4.

$$\begin{cases} 3^x + & 2^y = & 31 \\ 3^{x+1} - & 2^{y+2} = & 65 \end{cases}$$

Sol: $x = 3; \quad y = 2$

5.

$$\begin{cases} 5^{x+y} & = & 25^3 \\ 3^{x-y} & = & 25 \end{cases}$$

Sol: $x = 4; \quad y = 2$

6.

$$\begin{cases} 15\cdot & 5^{x-1} & - & & 6^y = & 339 \\ 3\cdot & 5^x & + & 2\cdot & 6^{y+1} = & 807 \end{cases}$$

Sol: $x = 3; \quad y = 2$

7.

$$\begin{cases} a^{x+y} & = & a^4 \\ a^{x-y} & = & a^2 \end{cases}$$

Sol: $x = 3; \quad y = 1$

8.

$$\begin{cases} 8^y & \cdot & 2^{2x} & = & 128 \\ 3^{2y} & \cdot & 3^{x-1} & = & 27 \end{cases}$$

Sol: $x = -70; \quad y = 49$

9.

$$\begin{cases} 3^{3x-y} & = & \sqrt{3^{10}} \\ 3^{2x+y} & = & 3 \end{cases}$$

Sol: $x = \frac{6}{5}; \quad y = -\frac{7}{5}$

www.musat.net

10.
$$\begin{cases} 3\cdot 2^x - & 2\cdot 3^y = & -6 \\ 4\cdot 2^x - & 3\cdot 3^y = & -11 \end{cases}$$

Sol: $x = 2;\quad y = 2$

11.
$$\begin{cases} 3\cdot 2^x - & 5\cdot 3^y = & 3 \\ 2^{x+1} + & 3^{y+1} = & 59 \end{cases}$$

Sol: $x = 4;\quad y = 2$

12.
$$\begin{cases} 2^x - & 3^{y-1} = & 5 \\ 2^{x+1} + & 8\cdot 3^y = & 712 \end{cases}$$

Sol: $x = 5;\quad y = 4$

13.
$$\begin{cases} 2\cdot 3^x + & 2^{y+3} & = & 86 \\ 3^x - & 2^y & = & 23 \end{cases}$$

Sol: $x = 3;\quad y = 2$

14.
$$\begin{cases} 2^{x+2y} & = & 32 \\ 5^{2x-y} & = & 1 \end{cases}$$

Sol: $x = 1;\quad y = 2$

1.5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Problema 126 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1) - \log x = 1 + \log x$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x+1) - \log x = 1 + \log x \Longrightarrow \log(3x+1) = \log 10 + 2\log x$$

$$\log(3x+1) = \log(10x^2) \Longrightarrow 10x^2 - 3x - 1 = 0 \Longrightarrow \; x = \frac{1}{2},\; x = -\frac{1}{5}$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = \frac{1}{2}$

2.

$$2^{2x-1}+2^{x+2}-1=0\Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+2^x2^2-1=0\Longrightarrow 2^{2x}+8\cdot 2^x-2=0$$

Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+8u-2=0\Longrightarrow u=0,2426406871,\ \ u=-8,242640687$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,2426406871=2^x\Longrightarrow \log 0,2426406871=\log 2^x\Longrightarrow$$

$$x\log 2=\log 0,2426406871\Longrightarrow$$
$$x=\frac{\log 0,2426406871}{\log 2}=-2,242640687$$

En el otro caso, $u=-8,242640687=2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 127 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1)-\log x=1+\log(1-x)$
2. $2^{2x-1}+2^{x+3}-1=0$

Solución:

1.

$$\log(3x+1)-\log x=1+\log(1-x)\Longrightarrow \log(3x+1)=\log 10+\log(1-x)+\log x$$

$$\log(3x+1)=\log(10x(1-x))\Longrightarrow 10x^2-7x+1=0\Longrightarrow\ \ x=\frac{1}{2},\ \ x=\frac{1}{5}$$

2.

$$2^{2x-1}+2^{x+3}-1=0\Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+2^x\cdot 2^3-1=0\Longrightarrow 2^{2x}+16\cdot 2^x-2=0$$

Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+16u-2=0\Longrightarrow u=-16,12403840,\ \ u=0,1240384046$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,1240384046=2^x\Longrightarrow \log 0,1240384046=\log 2^x\Longrightarrow$$

$$x\log 2=\log 0,1240384046\Longrightarrow$$
$$x=\frac{\log 0,1240384046}{\log 2}=-3,011141219$$

En el otro caso, $u=-16,12403840=2^x$ no es posible obtener solución.

www.musat.net

Problema 128 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x^2-2) = 1+\log(x-1)$
2. $2^{2x-1}+2^{x+1}-2=0$

Solución:

1.
$$\log(3x^2-2) = 1+\log(x-1) \Longrightarrow \log(3x^2-2) = \log 10+\log(x-1)$$
$$\log(3x^2-2) = \log(10(x-1)) \Longrightarrow 3x^2-10x+8=0 \Longrightarrow \ x=2, \ \ x=\frac{4}{3}$$

2.
$$2^{2x-1}+2^{x+1}-2=0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+2\cdot 2^x-2=0 \Longrightarrow 2^{2x}+4\cdot 2^x-4=0$$
Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:
$$u^2+4u-4=0 \Longrightarrow u=0,8284271247, \ \ u=-4,828427124$$
Deshaciendo el cambio de variable tenemos que
$$u=0,8284271247=2^x \Longrightarrow \log 0,8284271247=\log 2^x \Longrightarrow$$
$$x\log 2=\log 0,8284271247 \Longrightarrow$$
$$x=\frac{\log 0,8284271247}{\log 2}=-0,2715533031$$
En el otro caso, $u=-4,828427124=2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 129 Calcular:

1. $\log(x^2+2)-\log x=1$
2. $4^{x-1}+2^x-1=0$

Solución:

1. $\log(x^2+2)-\log x=1 \Longrightarrow x=0,2041684766, \ \ x=9,795831523$
2. $4^{x-1}+2^x-1=0 \Longrightarrow x=-0,2715533031$

Problema 130 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1)-\log(x+1)=1-\log x$
2. $\log x+1=\log x^2$

www.musat.net

3. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

4. $3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x \Longrightarrow \log \frac{x-1}{x+1} = \log \frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{x} \Longrightarrow x^2 - 11x - 10 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = 11,84428877, \quad x = -0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 11,84428877$

2.

$$\log x + 1 = \log x^2 \Longrightarrow \log 10x = \log x^2 \Longrightarrow 10x = x^2 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 10$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos del cero, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 10$

3.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0 \Longrightarrow \frac{3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^x - 2 = 0 \Longrightarrow 3^{2x} + 9 \cdot 3^x - 6 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 9u - 6 = 0 \Longrightarrow u = 0,6234753829, \quad u = -9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,6234753829 = 3^x \Longrightarrow \log 0,6234753829 = \log 3^x \Longrightarrow$$

$$x \log 3 = \log 0,6234753829 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

4.

$$3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0 \Longrightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - 1 = 0 \Longrightarrow 10 \cdot 3^x - 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$3^x = 0,3 \Longrightarrow \log 3^x = \log 0,3 \Longrightarrow x \log 3 = \log 0,3 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,3}{\log 3} = -1,095903274$$

www.musat.net

Problema 131 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x$
2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

Solución:

1.

$$\log(x-1) - \log(x+1) = 1 - \log x \Longrightarrow \log\frac{x-1}{x+1} = \log\frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{x} \Longrightarrow x^2 - 11x - 10 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = 11,84428877, \quad x = -0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = 11,84428877$

2.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0 \Longrightarrow \frac{3^{2x}}{3} + 3\cdot 3^x - 2 = 0 \Longrightarrow 3^{2x} + 9\cdot 3^x - 6 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 9u - 6 = 0 \Longrightarrow u = 0,6234753829, \quad u = -9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,6234753829 = 3^x \Longrightarrow \log 0,6234753829 = \log 3^x \Longrightarrow$$

$$x\log 3 = \log 0,6234753829 \Longrightarrow$$
$$x = \frac{\log 0,6234753829}{\log 3} = -0,4300388787$$

En el otro caso, $u = -9,623475382 = 3^x$ no es posible obtener solución.

Problema 132 Resolver:

1. $\log(1+x) - \log(1-x) = 2$
2. $3^{2x} - 2\cdot 3^x + 1 = 0$

Solución:

1. $\log(1+x) - \log(1-x) = 2 \Longrightarrow \log\frac{1+x}{1-x} = \log 100 \Longrightarrow$

$$1 + x = 100(1-x) \Longrightarrow x = \frac{99}{101}$$

www.musat.net

2. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$ haciendo $t = 3^x$ tenemos que:

   $t^2 - 2t + 1 = 0 \Longrightarrow t = 1$, deshaciendo el cambio de variable tenemos:

   $t = 3^x = 1 \Longrightarrow x = 0$

Problema 133 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\log(x^2 - 2) + 1 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$
2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(x^2 - 2) + 1 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$$

$$\log(x^2 - 2) + \log 10 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$$

$$\log 10(x^2 - 2) = \log(x^2 - 1) \Longrightarrow 10x^2 - 20 = x^2 - 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{19}}{3}$$

La solución negativa no es válida, ya que no existen logaritmos de números negativos y, por tanto, $x = \dfrac{\sqrt{19}}{3}$.

2.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{(3^x)^2}{3} + 3 \cdot 3^x - 1 = 0$$

Si hacemos $t = 3^x$ nos queda

$\dfrac{t^2}{3} + 3t - 1 = 0 \Longrightarrow t^2 + 9t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 0,321825;\ \ t = -9,321825$

Deshaciendo el cambio de variable tendremos:

$$\begin{cases} 3^x &= 0,321825 \Longrightarrow \log 3^x = \log 0,321825 \Longrightarrow x\log 3 = \log 0,321825 \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow x = \dfrac{\log 0,321825}{\log 3} = -1,03198 \\ \\ 3^x &= -9,321825 \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Problema 134 Resolver:

1. $\log(5x + 1) - \log x = 1 - \log(1 - x)$
2. $2^{2x-1} - 2^{x+1} + 2 = 0$

3.

$$\begin{cases} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 3 \\ 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 1 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\frac{5x+1}{x} = \frac{10}{1-x} \Longrightarrow 5x^2 + 6x - 1 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = -1,348331477, \ x = 0,1483314773$$

La solución negativa no es válida.

2.

$$\frac{t^2}{2} - 2t + 2 = 0 \Longrightarrow t = 2 \Longrightarrow x = 1$$

3.

$$\begin{cases} u/2+ & 3v = & 3 \\ 2u- & v/3 = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 24/37 \\ v = 33/37 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -0,2712129366 \\ y = -0,04522777025 \end{cases}$$

1.6. Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Problema 135 Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+ & y = & 5 \\ & xy = & 2 \end{cases}$$

Solución:

Primero despejamos y en la primera ecuación $y = 5 - 2x$, y sustituimos en la segunda $x(5-2x) = 2 \Longrightarrow 5x - 2x^2 = 2 \Longrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $x = \frac{1}{2}$.
Cuando $x = 2$ tendremos $2y = 2 \Longrightarrow y = 1$.
Cuando $x = \frac{1}{2}$ tendremos $\frac{y}{2} = 2 \Longrightarrow y = 4$.

Problema 136 Calcular:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{7} + 4 = 6{,}645751311 \\ y_1 = -\sqrt{7} - 2 = -4{,}645751311 \\ x_2 = 4 - \sqrt{7} = 1{,}354248688 \\ y_2 = \sqrt{7} - 2 = 0{,}6457513110 \end{cases}$$

www.musat.net

1.7. Inecuaciones

1.7.1. Inecuaciones

Problema 137 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.
$$\frac{x^2-x-2}{x-3}>0$$

2.
$$\frac{x^2+x-2}{x+1}\le 0$$

Solución:

1.
$$\frac{x^2-x-2}{x-3}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)}>0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-1,2)\cup(3,+\infty)$$

2.
$$\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x+1}\le 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x-1)(x+2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-2]\cup(-1,1]$$

Problema 138 Resolver las inecuaciones siguientes:

www.musat.net

1.
$$\frac{x^2+3x+2}{x-3}<0$$

2.
$$\frac{x^2+2x-3}{x-5}\geq 0$$

Solución:

1.
$$\frac{x^2+3x+2}{x-3}=\frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)}<0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x+1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:
$$(-\infty,-2)\cup(-1,3)$$

2.
$$\frac{x^2+2x-3}{x-5}=\frac{(x+3)(x-1)}{x-5}\geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,5)$	$(5,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-1)}{x-5}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:
$$[-3,1]\cup(5,+\infty]$$

Problema 139 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.
$$\frac{x^2-2x-3}{x+2}\geq 0$$

www.musat.net

2.

$$\frac{x-1}{10}-\frac{3x}{5}\geq\frac{2x}{6}+1$$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x+2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)}\geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-2,-1]\cup[3,+\infty)$$

2.

$$\frac{x-1}{10}-\frac{3x}{5}\geq\frac{2x}{6}+1$$

$$3x-3-18x\geq 10x+30\Longrightarrow -25x\geq 33\Longrightarrow x\leq-\frac{33}{25}$$

$$\left(-\infty,-\frac{33}{25}\right)$$

Problema 140 Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1}\leq 0,\quad \frac{x-1}{x^2+3x+2}\geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1}\leq 0\Longrightarrow(-\infty,-3]\cup(1,5]$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2}\geq 0\Longrightarrow(-2,-1)\cup[1,\infty)$$

Problema 141 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-2x-3}{x-1}\leq 0$

2. $\frac{x^2-5x-14}{x-3}\geq 0$

3. $\frac{x-5}{6}+1\leq\left(\frac{x+1}{2}\right)x$

www.musat.net

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}=\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}\leq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1]\cup(1,3]$$

2.

$$\frac{x^2-5x-14}{x-3}=\frac{(x+2)(x-7)}{x-3}\geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-7)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-2,3)\cup[7,+\infty)$$

3.

$$\frac{x-5}{6}+1\leq\left(\frac{x+1}{2}\right)x\Longrightarrow x-5+6\leq 3(x+1)x$$

$$x+1\leq 3x^2+3x\Longrightarrow -3x^2-2x+1\leq 0$$

$$3x^2+2x-1\geq 0\Longrightarrow (x+1)(x-\frac{1}{3})\geq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-\frac{1}{3})$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3}\,,+\infty\right)$$

www.musat.net

Problema 142 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-2x-3}{x-1} \geq 0$

2. $\frac{x^2-5x-14}{x-3} \leq 0$

3. $\frac{x-5}{6} + 1 \geq \left(\frac{x+1}{2}\right) x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1} = \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} \geq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-1,1) \cup [3,+\infty)$$

2.

$$\frac{x^2-5x-14}{x-3} = \frac{(x+2)(x-7)}{x-3} \leq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-7)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-2] \cup (3,7]$$

3.

$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \left(\frac{x+1}{2}\right) x \Longrightarrow x-5+6 \geq 3(x+1)x$$

$$x+1 \geq 3x^2+3x \Longrightarrow -3x^2-2x+1 \geq 0$$

$$3x^2+2x-1 \leq 0 \Longrightarrow (x+1)(x-\frac{1}{3}) \leq 0$$

www.musat.net

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-\frac{1}{3})$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$\left[-1,\frac{1}{3}\right]$$

Problema 143 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+4x-5}{x+1}\geq 0$

2. $\frac{x^2+3x-4}{x-3}\leq 0$

3. $\frac{x^2}{3}+6<\frac{4}{3}-3x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+4x-5}{x+1}=\frac{(x+5)(x-1)}{x+1}\geq 0$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+5)(x-1)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-5,-1)\cup[1,+\infty)$$

2.

$$\frac{x^2+3x-4}{x-3}=\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}\leq 0$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-4]\cup[1,3)$$

www.musat.net

3.

$$\frac{x^2}{3}+6<\frac{4}{3}-3x \Longrightarrow x^2+18<4-9x$$

$$x^2+9x+14<0 \Longrightarrow x^3+9x+14=(x+2)(x+7)<0$$

	$(-\infty,-7)$	$(-7,-2)$	$(-2,+\infty)$
$x+7$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x+7)$	$+$	$-$	$+$

La soluciin pedida sería:

$$(-7,-2)$$

Problema 144 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-x-2}{x+3}\geq 0$
2. $\frac{x^2+3x-4}{x-3}\leq 0$
3. $\frac{2-3x}{3}+\frac{1-2x}{6}\geq\frac{19-22x}{18}$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-x-2}{x+3}=\frac{(x-2)(x+1)}{x+3}\geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-2)(x+1)}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-3,-1]\cup[2,+\infty)$$

2.

$$\frac{x^2+3x-4}{x-3}=\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}\leq 0$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-4]\cup[1,3)$$

www.musat.net

3.

$$\frac{2-3x}{3}+\frac{1-2x}{6}\geq\frac{19-22x}{18}\Longrightarrow 15-24x\geq 19-22x$$

$$\Longrightarrow -2x\geq 4\Longrightarrow x\leq -\frac{4}{2}\Longrightarrow x\leq -2$$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-2]$$

Problema 145 Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2-10x+21}{x+3}\geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2-10x+21}{x+3}=\frac{(x-7)(x-3)}{x+3}\geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-3)(x-7)}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-3,3]\cup[7,+\infty)$$

Problema 146 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x+1}\leq 0$
2. $\frac{x^2+4x-5}{x-2}\geq 0$
3. $\frac{2x+1}{2}-x<\left(\frac{x-2}{6}\right)x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1}=\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}\leq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-3]\cup(-1,2]$$

www.musat.net

2.

$$\frac{x^2+4x-5}{x-2} = \frac{(x+5)(x-1)}{x-2} \geq 0$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+4x-5}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-5,1] \cup (2,+\infty)$$

3.

$$\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x \Longrightarrow 6x+3-6x < x^2-2x$$

$$3 < x^2-2x \Longrightarrow -x^2+2x+3 < 0 \Longrightarrow x^2-2x-3 > 0$$

$$x^2-2x-3 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$$

Problema 147 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x+1} \leq 0$
2. $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \geq 0$
3. $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1} \leq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

www.musat.net

La solución pedida sería:

$$(-\infty, -3] \cup (-1, 2]$$

2.

$$\frac{x^2+4x-5}{x-2} = \frac{(x+5)(x-1)}{x-2} \geq 0$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+4x-5}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-5, 1] \cup (2, +\infty)$$

3.

$$\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right) x \Longrightarrow 6x + 3 - 6x < x^2 - 2x$$

$$3 < x^2 - 2x \Longrightarrow -x^2 + 2x + 3 < 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

Problema 148 Resolver la siguientes inecuación:

$$\frac{x^2+x-2}{x+1} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-2, -1) \cup [1, +\infty)$$

www.musat.net

Problema 149 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\dfrac{x^2-6x-7}{x-3} \leq 0$

2. $\dfrac{x^2+x-6}{x+1} \geq 0$

3. $\dfrac{2x}{3} - 2x < \left(\dfrac{x-2}{6}\right)x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-6x-7}{x-3} = \frac{(x+1)(x-7)}{x-3} \leq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-7)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1] \cup (3,7]$$

2.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1} \geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+x-6}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-3,-1) \cup [2,+\infty)$$

3.

$$\frac{2x}{3} - 2x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x \Longrightarrow -8x < x^2 - 2x$$

$$0 < x^2 + 6x \Longrightarrow x(x+6) > 0$$

	$(-\infty,-6)$	$(-6,0)$	$(0,+\infty)$
$x+6$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$x(x+6)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-6)\cup(0,\infty)$$

Problema 150 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\dfrac{x^2-2x-35}{x+1}\geq 0$

2. $\dfrac{4x}{3}-x<\left(\dfrac{x-3}{6}\right)x\Longrightarrow 2x<x^2-3x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-35}{x+1}=\frac{(x+5)(x-7)}{x+1}\geq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+5)(x-7)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-1,3]\cup[7,+\infty)$$

2.

$$\frac{4x}{3}-x<\left(\frac{x-3}{6}\right)x\Longrightarrow 2x<x^2-3x$$

$$0<x^2-5x\Longrightarrow x(x-5)>0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,5)$	$(5,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x(x-5)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$$

www.musat.net

Problema 151 Resolverlas siguiente inecuación:

$$\frac{x^2+x-2}{x+3} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2+x-2}{x+3} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+3} \geq 0$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-1)}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-3, -2] \cup [1, +\infty)$$

Problema 152

$$\frac{x+3}{2} - \frac{2x}{7} \geq 1 - \frac{x}{14}$$

Solución:

$$7x + 21 - 4x \geq 14 - x \Longrightarrow x \geq -\frac{7}{4} \Longrightarrow \left[-\frac{7}{4}, \infty\right)$$

Problema 153

$$\frac{x^2+5x-6}{x-3} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2+5x-6}{x-3} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-3} \geq 0$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x+6$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+5x-6}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es: $[-6, 1] \cup (3, \infty)$

www.musat.net

Problema 154

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{8} \le \frac{x}{4} + 1$$

Solución:

$$8x + 8 + 3x - 3 \le 6x + 24 \Longrightarrow x \le \frac{19}{5} \Longrightarrow \left(-\infty, \frac{19}{5}\right]$$

Problema 155

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{x+1} \le 0$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{x+1} = \frac{(x-5)(x+7)}{x+1} \le 0$$

	$(-\infty, -7)$	$(-7, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, \infty)$
$x+7$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+2x-35}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es: $(-\infty, -7] \cup (-1, 5]$

Problema 156

$$\frac{x-1}{5} - \frac{x}{15} \le \frac{x+1}{3} + 2$$

Solución:

$$3x - 3 + x \le 30 + 5x + 5 \Longrightarrow x \ge -38 \Longrightarrow [-38, \infty)$$

Problema 157

$$\frac{x^2 + 3x - 40}{x-2} \ge 0$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 3x - 40}{x-2} = \frac{(x+8)(x-5)}{x-2} \ge 0$$

	$(-\infty, -8)$	$(-8, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
$x+8$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+3x-40}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es: $[-8,2)\cup[5,\infty)$

Problema 158

$$\frac{x}{2}+\frac{x-1}{6}<1-\frac{x+1}{3}$$

Solución:

$$3x+x-1<6-2x-2\Longrightarrow x<\frac{5}{6}\Longrightarrow\left(-\infty,\frac{5}{6}\right)$$

Problema 159

$$x^2-x-2<0$$

Solución:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)<0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
x^2-x-2	$+$	$-$	$+$

La solución es: $(-1,2)$

Problema 160

$$\frac{x+2}{12}-\frac{x+1}{4}\le 1+\frac{x}{3}$$

Solución:

$$x+2-3x\le 12+4x\Longrightarrow -6x\le 13\Longrightarrow x\ge -\frac{13}{6}\Longrightarrow\left[-\frac{13}{6},+\infty\right)$$

Problema 161

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}\ge 0$$

Solución:

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}=\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}\ge 0$$

www.musat.net

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-2x-3}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es: $[-1,1]\cup[3,\infty)$

Problema 162

$$\frac{x-1}{8}-\frac{x}{2}<\frac{x+1}{4}$$

Solución:

$$x-1-4x<2x+2\Longrightarrow -5x<3\Longrightarrow x>-\frac{3}{5}\Longrightarrow\left(-\frac{3}{5},+\infty\right)$$

Problema 163

$$\frac{x^2-x-2}{x+3}\geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2-x-2}{x+3}=\frac{(x+1)(x-2)}{x+3}\geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-x-2}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es: $(-3,-1]\cup[2,\infty)$

Problema 164 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\dfrac{x^2+6x-7}{x-2}\geq 0$
2. $\dfrac{4x}{3}-x<\left(\dfrac{x-3}{6}\right)x\Longrightarrow 2x<x^2-3x$

Solución:

www.musat.net

1.

$$\frac{x^2+6x-7}{x-2} = \frac{(x-1)(x+7)}{x-2} \geq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+7$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+5)(x-7)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-7,1]\cup(2,+\infty)$$

2.

$$\frac{4x}{3} - x < \left(\frac{x-3}{6}\right)x \Longrightarrow 2x < x^2-3x$$

$$0 < x^2-5x \Longrightarrow x(x-5) > 0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,5)$	$(5,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x(x-5)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$$

Problema 165 Algunos problemas para ejercitarse:

1. $3x-9>0$ Sol: $(3,+\infty)$
2. $4x-20<0$ Sol: $(-\infty,5)$
3. $5x+3>2x+6$ Sol: $(-3,+\infty)$
4. $10-3x<4x-4$ Sol: $(2,+\infty)$
5. $2(5-7x)\geq 52$ Sol: $(-\infty,-3]$
6. $3(2x-1)+1<-13-5x$ Sol: $(-\infty,-1)$
7. $\frac{x}{10} > 4x - \frac{78}{10}$ Sol: $(-\infty,2)$
8. $\frac{6x-22}{20} - \frac{10x+2}{14} \geq \frac{2x-14}{10} - \frac{10x-12}{21}$ Sol: $(-\infty,-3]$
9. $\frac{2x}{3} + \frac{5x-1}{2} < \frac{26}{3}$ Sol: $(-\infty,3)$

www.musat.net

10. $\frac{3(4x-7)}{4} - \frac{x}{8} \geq \frac{3x}{8} - \frac{21}{4}$ Sol: $[0, +\infty)$
11. $\frac{3x+5}{6} - \frac{5-2x}{2} \leq \frac{x-12}{3}$ Sol: $(-\infty, -2]$
12. $\frac{4-3x}{3} - \frac{2x-3}{4} > -\frac{65}{13}$ Sol: $(-\infty, 5)$
13. $\frac{2-3x}{3} + \frac{1-2x}{6} \geq \frac{19-22x}{18}$ Sol: $(-\infty, -2]$
14. $x^2 - 7x + 10 > 0$ Sol: $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$
15. $x^2 - 7x + 6 < 0$ Sol: $(1, 6)$
16. $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ Sol: $(-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$
17. $-8x \leq -x^2 - 15$ Sol: $[3, 5]$
18. $6x^2 > 12x$ Sol: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
19. $-27x \leq -12x^2$ Sol: $[0, \frac{9}{4}]$
20. $-2x^2 - 10x - 8 > 0$ Sol: $(-4, -1)$
21. $-(x+2)^2 + 3x \leq 2(-x^2 + 1)$ Sol: $[-2, 3]$
22. $x - 3 + \frac{25}{x} - 7 < 0$ Sol: ϕ
23. $\frac{x-2}{x+3} > 0$ Sol: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
24. $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$
25. $x^4 + 2x^2 - 3x^3 \geq 0$ Sol: $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
26. $\frac{x^2+x}{x-2} > 0$ Sol: $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$
27. $(x^2 + 1)(x - 1) > 0$ Sol: $(1, +\infty)$
28. $(x^2 - 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$ Sol: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, 3)$
29. $4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$ Sol: R
30. $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 > 0$ Sol: $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$
31. $\frac{x-3}{x+1} > 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
32. $\frac{2x(x-3)+x^2}{x-1} < 3(x-1)$ Sol: $(1, +\infty)$
33. $\frac{(x^2+1)(x^2-9x+8)}{x^2+2} \leq 0$ Sol: $[1, 8]$
34. $\frac{x^2-25}{x^2-7x+10} \leq 0$ Sol: $[-5, 2]$
35. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5} \geq 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup [2, 3] \cup (5, +\infty)$

www.musat.net

36. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+1} < 0$ Sol: $(1,3) \cup (-2,-1)$

37. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2} \leq 0$ Sol: $(-2,-1) \cup (1,3)$

38. $\frac{x^2-8x+7}{x^2-3x-10} < 0$ Sol: $(5,7) \cup (-2,1)$

39. $\frac{x^2-2x-8}{x^2-1} \geq 0$ Sol: $(-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [4,+\infty)$

40. $x^2 - 6x + 9 > 0$ Sol: $(-\infty,3) \cup (3,+\infty)$

41. $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$ Sol: $[-2, \frac{1}{3}]$

42. $x^2 + 2x > 0$ Sol: $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$

43. $x^2 + 1 \leq 0$ Sol: No tiene solución.

44. $(x-3)^3 \leq 4$ Sol: $(-\infty, 2^{\frac{2}{3}} + 3]$

45. $3(x^2-1) - 5(x-2) < 0$ Sol: No tiene solución.

46. $x^2 - 7 \geq -3(x-1)$ Sol: $(-\infty,-5] \cup [2,+\infty)$

47. $x^2 + \frac{1}{4} < x - 2$ Sol: No tiene solución.

48. $2(5-x^2) > 3x$ Sol: $(-3,11; 1,61)$

49. $\frac{2x-1}{5} > \frac{3x^2}{2}$ Sol: No tiene solución.

50. $\frac{x-3}{x+1} > 0$ Sol: $(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$

51. $\frac{2x-1}{x} \leq 0$ Sol: $(0, \frac{1}{2}]$

52. $\frac{x^2-3x-4}{x} > 0$ Sol: $(-1,0) \cup (4,+\infty)$

53. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-4} > 0$ Sol: $(-\infty,-2) \cup (-1,2) \cup (3,+\infty)$

54. $5x - 3(1-4x) \leq 4x - 1$ Sol: $(-\infty, \frac{2}{13}]$

55. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-3}{2} \geq \frac{x-2}{3} + \frac{29}{6}$ Sol: $(-\infty,0]$

56. $7(2x-1) - 3x \leq 2(x+1) - 9$ Sol: $(-\infty,0]$

57. $3(x-7) + 2x \leq 5(x-1)$ Sol: $(-\infty,+\infty)$

58. $4(3x-1) - 5x < 7(x-1) + 3$ Sol: ϕ

59. $3x - \frac{x+2}{3} > \frac{2x+1}{4} - \frac{5-x}{2}$ Sol: $(-\frac{19}{20},+\infty)$

60. $(x-2)(x+1) \geq 18$ Sol: $(-\infty,-4] \cup [5,+\infty)$

61. $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ Sol: $\{\frac{1}{3}\}$

www.musat.net

62. $\frac{x-3}{4} > (x-2)(x+7)+17$ Sol: $(-\frac{15}{4}, -1)$

Problema 166 Más problemitas:

1. $x^2-7x-30=(x+3)(x-10)<0$ Sol: $(-3,10)$
2. $x^2-15x+44=(x-4)(x-11)>0$ Sol: $(-\infty,4)\cup(11,+\infty)$
3. $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)>0$ Sol: $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$
4. $x^2+x-6=(x-2)(x+3)>0$ Sol: $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$
5. $x^2-10x-11=(x+1)(x-11)<0$ Sol: $(-1,11)$
6. $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)<0$ Sol: $(4,5)$
7. $x^2+5x-14=(x-2)(x+7)<0$ Sol: $(-7,2)$
8. $x^2+3x-54=(x+9)(x-6)<0$ Sol: $(-9,6)$
9. $x^2+3x-40=(x+8)(x-5)>0$ Sol: $(-\infty,-8)\cup(5,+\infty)$
10. $x^2+9x+14=(x+2)(x+7)>0$ Sol: $(-\infty,-7)(-2,+\infty)$
11. $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)>0$ Sol: $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$
12. $x^2-11x+18=(x-2)(x-9)>0$ Sol: $(-\infty,2)\cup(9,+\infty)$
13. $x^2-12x-13=(x+1)(x-13)>0$ Sol: $(-\infty,-1)\cup(13,+\infty)$
14. $x^2+14x-15=(x+15)(x-1)>0$ Sol: $(-\infty,-15)\cup(1,+\infty)$
15. $x^2-11x-42=(x-14)(x+3)>0$ Sol: $(-\infty,-3)\cup(14,+\infty)$
16. $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)>0$ Sol: $(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$
17. $x^2-13x+22=(x-11)(x-2)<0$ Sol: $(2,11)$
18. $x^2+13x-14=(x-1)(x+14)<0$ Sol: $(-14,1)$
19. $x^2-9x-22=(x+2)(x-11)<0$ Sol: $(-2,11)$
20. $\frac{x^2-4x-21}{x+10}=\frac{(x-7)(x+3)}{x+10}\le 0$ Sol: $(-\infty,-10)\cup[-3,7]$
21. $\frac{x^2+4x-77}{x+8}=\frac{(x+11)(x-7)}{x+8}\ge 0$ Sol: $[-11,-8)\cup[7,+\infty)$
22. $\frac{x^2-4x-77}{x+5}=\frac{(x-11)(x+7)}{x+5}\ge 0$ Sol: $[-7,-5)\cup[11,+\infty)$
23. $\frac{x^2-x-6}{x+3}=\frac{(x+2)(x-3)}{x+3}\le 0$ Sol: $(-\infty,-3)\cup[-2,3]$
24. $\frac{x^2+3x-40}{x-7}=\frac{(x+8)(x-5)}{x-7}\ge 0$ Sol: $[-8,5]\cup(7,+\infty)$

www.musat.net

25. $\frac{x^2-3x-70}{x+2}=\frac{(x+7)(x-10)}{x+2}\geq 0$ Sol: $[-7,-2)\cup[10,+\infty)$

26. $\frac{x^2-12x-13}{x+6}=\frac{(x+1)(x-13)}{x+6}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-6)\cup[-1,13]$

27. $\frac{x^2-17x+52}{x+8}=\frac{(x-4)(x-13)}{x+8}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-8)\cup[4,13]$

28. $\frac{x^2-7x-30}{x-11}=\frac{(x+3)(x-10)}{x-11}\geq 0$ Sol: $[-3,10]\cup(11,+\infty)$

29. $\frac{x^2-x-2}{x+3}=\frac{(x-2)(x+1)}{x+3}\geq 0$ Sol: $(-3,-1]\cup[2,+\infty)$

30. $\frac{x^2+7x+10}{x-2}=\frac{(x+5)(x+2)}{x-2}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-5]\cup[-2,2)$

31. $\frac{x^2-6x-7}{x+2}=\frac{(x+1)(x-7)}{x+2}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-2)\cup[-1,7]$

32. $\frac{x^2-x-12}{x+1}=\frac{(x+3)(x-4)}{x+1}\geq 0$ Sol: $[-3,-1)\cup[4,+\infty)$

33. $\frac{x^2-3x-18}{x-5}=\frac{(x-6)(x+3)}{x-5}\geq 0$ Sol: $[-3,5)\cup[6,+\infty)$

34. $\frac{x^2+3x-4}{x-3}=\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-4]\cup[-1,3)$

35. $\frac{x^2-11x+24}{x+7}=\frac{(x-3)(x-8)}{x+7}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-7)\cup[3,8]$

36. $\frac{x^2+4x-5}{x+1}=\frac{(x+5)(x-1)}{x+1}\geq 0$ Sol: $[-5,-1)\cup[1,+\infty)$

37. $\frac{x^2+3x-54}{x+2}=\frac{(x+9)(x-6)}{x+2}\leq 0$ Sol: $(-\infty,-9]\cup(-2,6]$

1.7.2. Sistemas de Inecuaciones

Problema 167

$$\left\{\begin{array}{rrl} x+ & y & \leq 5\\ 2x+ & y & \geq 3 \end{array}\right.$$

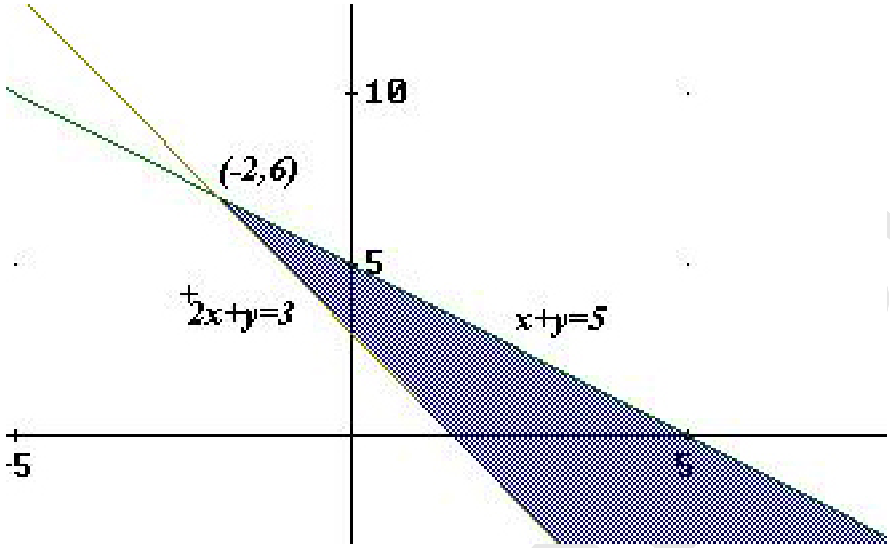
Solución:

$$x+y=5\Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y\\ \hline 0 & 5\\ 5 & 0 \end{array}$$

$$2x+y=3\Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y\\ \hline 0 & 3\\ 3/2 & 0 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrl} x+ & y & =5\\ 2x+ & y & =3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=-2\\ y=6 \end{array}\right. \Longrightarrow (-2,6)$$

www.musat.net



Problema 168

$$\begin{cases} 2x+ & 3y & \leq 12 \\ x- & y & > 3 \end{cases}$$

Solución:

$$2x+3y=12 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$x-y=6 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x+ & 3y & =12 \\ x- & y & =6 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow (6,0)$$

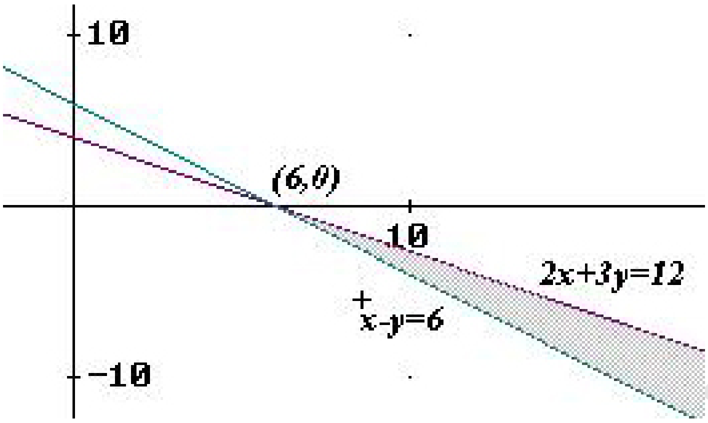
Problema 169

$$\begin{cases} 2x+ & 3y & \geq 12 \\ x- & 2y & < 1 \end{cases}$$

Solución:

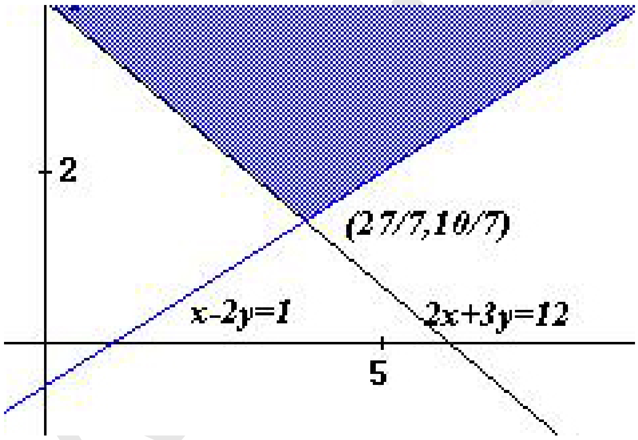
$$2x+3y=12 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{array}$$

www.musat



$$x - 2y = 1 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrl} 2x+ & 3y & = 12 \\ x- & 2y & = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 27/7 \\ y = 10/7 \end{array} \right. \Longrightarrow (27/7, 10/7)$$

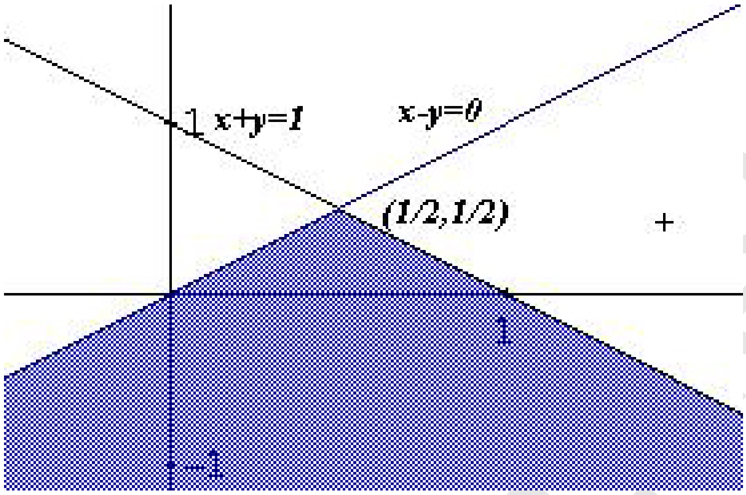


Problema 170

$$\left\{ \begin{array}{rrl} x+ & y & < 1 \\ x- & y & > 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$x + y = 1 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$



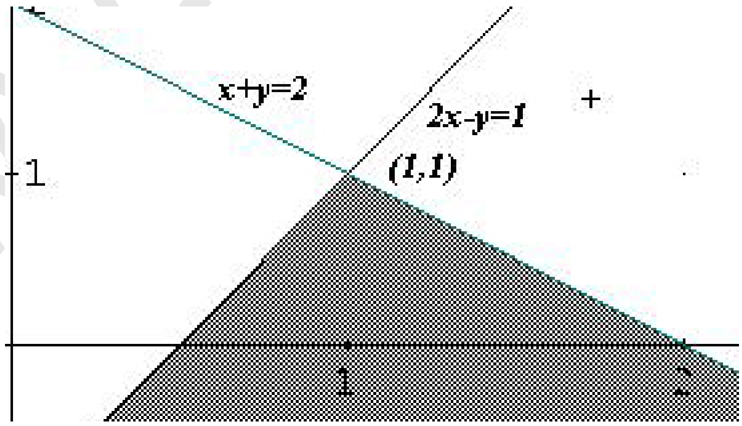
$$x - y = 0 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+ & y & = 1 \\ x- & y & = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{array} \right. \Longrightarrow (1/2, 1/2)$$

Problema 171

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x- & y & > 1 \\ x+ & y & < 2 \end{array} \right.$$

Solución:



$$2x - y = 1 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{array}$$

$$x + y = 2 \Longrightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x- & y & = 1 \\ x+ & y & = 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow (1, 1)$$

Problema 172 Unos problemitas para el entrenamiento

1.

$$\left\{ \begin{array}{rl} x^2 - 2x - 8 \leq & 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > & 0 \end{array} \right.$$

Sol: $[-2, -1) \cup (1, 4]$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rl} x < & 3 \\ 2(x - 1) < & 5(x - 1) \end{array} \right.$$

Sol: $(-1, 3)$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rl} 5 \cdot \frac{x-1}{2} \leq & 3(x - 1) \\ x < & -2 \end{array} \right.$$

Sol: ϕ

1.8. Polinomios

1.8.1. Introducción

Problema 173 Identidades Notables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(2x^2 - x)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)x + x^2 = 4x^4 - 4x^3 + x^2$$

$$(\sqrt{2}x - 2x^3)(\sqrt{2}x + 2x^3) = (\sqrt{2}x)^2 - (2x^3)^2 = 2x^2 - 4x^6$$

A la vista de estos ejemplos:

www.musat.net

1. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:
   a) $(3x^2 - 3)^2 = 9x^4 - 18x^2 + 9$
   b) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) = 3x^2 - 2$
   c) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$
   d) $(\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3})(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}) = 2x^4 - 3$
2. Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los polinomios siguientes:
   a) $16x^4 + 56x^3 + 49x^2 = (4x^2 + 7x)^2$
   b) $9x^4 - 42x^3 + 49x^2 = (3x^2 - 7x)^2$
   c) $4x^4 - 25x^3 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$
   d) $2x^4 - 36x^2 = (\sqrt{2}x^2 - 6x)(\sqrt{2}x^2 + 6x)$
   e) $3x^6 - 6\sqrt{2}x^4 + 6x^2 = (\sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x)^2$
   f) $5x^2 - 3 = (\sqrt{5}x + \sqrt{3})(\sqrt{5}x - \sqrt{3})$

Problema 174 Productos

Efectua los siguientes productos:

1. $(2x^2 + 5x - 10)(x^3 - 3x) = 2x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 15x^2 + 30x$
2. $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5)(3x^2 - x + 2) = 9x^6 + 3x^5 + x^4 + 5x^3 + 13x^2 - 5x + 10$
3. $(5x^2 + 2x - 3)(2x^2 + 3x - 1) = 10x^4 + 19x^3 - 5x^2 - 11x + 3$
4. $(3x^3 + 2x - 1)^2 = 9x^6 + 12x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 4x + 1$

Problema 175 Sacar factor común

Ejemplo:
Sea $P(x) = 8x^6 - 4x^3 + 12x^2 - 4x$, el monomio $4x$ es factor común de todos los términos de $P(x)$, luego:

$$P(x) = 4x(2x^5 - x^2 + 3x - 1)$$

Sacar factor común de:

1. $P(x) = 6x^5 - 4x^3 - 4x^2 = 2x^2(3x^3 - 2x - 2)$
2. $Q(x) = 9x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 3x^2(3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 2)$
3. $R(x) = 15x^6 + 5x^4 - 5x^2 + 35x = 5x(3x^5 + x^3 - x + 7)$

www.musat.net

Problema 176 Cociente de un polinomio por un monomio:

Calcular:

1. $(3x^5+x^3-x+7):(x-3)=(3x^4+9x^3+28x^2+84x+251)(x-3)+760$
2. $(2x^4-3x^2+2x-1):(x+2)=(2x^3-4x^2+5x-8)(x+2)+15$
3. $(x^5-2x^3+1):(x+3)=(x^4-3x^3+7x^2-21x+63)(x+3)-188$

Problema 177 (Teorema del Resto)

1. Halla el valor de k para que el polinomio $P(x)=kx^3+2kx^2-3x+1$ sea divisible entre $(x-1)$.

   Solución:

   Para que $P(x)$ sea divisible entre $(x-1)$, ha de ser $P(1)=0$ $P(1)=k+2k-3+1=3k-2=0\Longrightarrow k=\dfrac{2}{3}$

2. *a*) Halla el valor numérico de $P(x)=-2x^3+x^2-3x-6$ para $x=-1$
   b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x+1$.

   Solución:

   a) $P(-1)=2+1+3-6=0$
   b) Por el teorema del resto sabemos que $P(x):(x+1)$ coincide con $P(-1)=0$, luego si es divisible.

3. *a*) Halla el valor numérico de $P(x)=3x^4-2x^3+2x-3$ para $x=1$
   b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x-1$.

   Solución:

   a) $P(1)=3-2+2-3=0$
   b) Por el teorema del resto sabemos que $P(x):(x-1)$ coincide con $P(1)=0$, luego si es divisible.

4. Dado el polinomio $P(x)=4x^3-8x^2+3x-1$

   a) Halla el cociente y el resto de la división $P(x):(x-2)$
   b) ¿Cuánto vale $P(2)$.

   Solución:

www.musat.net

a) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & 3 & -1 \\ 2 & & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

Cociente: $4x^2 + 3 = 0$
Resto: 5

b) Por el teorema del resto sabemos que $P(2) = 5$.

5. Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta: $(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$

Solución:

Llamamos $P(x) = 3x^2 + kx - 2 \Longrightarrow P(-2) = 0 \Longrightarrow 12 - 2k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 5$

6. a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$

   b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$.

Solución:

a) $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$

b) Por el teorema del resto sabemos que $P(x) : (x + 1)$ coincide con $P(-1) = 0$, luego si es divisible.

Problema 178 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $x^4 - 2x^3 + x^2$
Solución:
$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$

2. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \\ & & & & \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$

3. $x^3 + 2x^2 + x$
Solución:
$x(x + 1)^2$

www.musat.net

4. $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$
   $(x-1)(x+3)(x+5)$ **Solución:**

5. $2x^4 - 18x^2$
   $2x^2(x+3)(x-3)$ **Solución:**

6. $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
   Solución:
   $(x+1)(x-2)(x^2+1)$

7. $x^5 + x^4 - 2x^3$
   Solución:
   $x^3(x-1)(x+2)$

8. $x^3 - 3x + 2$
   Solución:
   $(x-1)^2(x+2)$

9. $x^3 - 13x^2 + 36x$
   Solución:
   $x(x-4)(x-9)$

10. $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$
    Solución:
    $(x-1)(x-5)(2x+3)$

Problema 179 Sacar factor común

Ejemplo:
Sea $P(x) = 8x^6 - 4x^3 + 12x^2 - 4x$, el monomio $4x$ es factor común de todos los términos de $P(x)$, luego:

$$P(x) = 4x(2x^5 - x^2 + 3x - 1)$$

Sacar factor común de:

1. $P(x) = 6x^5 - 4x^3 - 4x^2$
2. $Q(x) = 9x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2$
3. $R(x) = 15x^6 + 5x^4 - 5x^2 + 35x$

Problema 180 Cociente de un polinomio por un monomio:

Calcular:

www.musat.net

1. $(3x^5 + x^3 - x + 7) : (x - 3)$
2. $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$
3. $(x^5 - 2x^3 + 1) : (x + 3)$

1.8.2. Teorema del Resto

Problema 181 Sea $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 3$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
Solución:
Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 2 \Longrightarrow a - b = -3 \\ P(-1) = 0 \Longrightarrow a + b = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 3$

Problema 182 Sea $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx - 3$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
Solución:
Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 2 \Longrightarrow a - b = 3 \\ P(-1) = 0 \Longrightarrow a + b = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 3$

Problema 183 Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + 2x + 1$ un polinomio divisible por $x - 1$ y por $x + 1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
Solución:
Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 0 \Longrightarrow a - b = -3 \\ P(-1) = 0 \Longrightarrow -a - b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 3$

Problema 184 Sea $P(x) = 3x^3 - ax^2 - bx + 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x + 2$ obtenemos de resto 3, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
Solución:
Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 0 \Longrightarrow -a - b = -4 \\ P(-2) = 3 \Longrightarrow -4a + 2b = 26 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 7 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 7x + 1$

www.musat.net

Problema 185 Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + x + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 6, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
Solución:
Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(-1) = 0 \Longrightarrow -a - b = -1 \\ P(2) = 6 \Longrightarrow 8a - 4b = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 2$

Problema 186 Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 3$ obtenemos de resto -10, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
Solución:
Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 0 \Longrightarrow a + b - 3 = 0 \\ P(3) = -10 \Longrightarrow 27a + 3b - 19 = -10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 3 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -2x^2 + 3x - 1$

1.8.3. Descomposición Polinómica

Problema 187 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 15x$
2. $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$
3. $R(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6$

Solución:

1. $P(x) = x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 15x = x(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x + 5)$
2. $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)^2(x + 3)$
3. $R(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = (x + 1)^2(x - 2)(2x - 3)$

Problema 188 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 15x$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
3. $R(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6$

www.musat.net

Solución:

1. $P(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 15x = x(x+1)(x-1)(x+3)(x+5)$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3)$
3. $R(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6 = (x+1)^2(x-2)(2x+3)$

Problema 189 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
3. $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Solución:

1. $P(x) = P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)^2(x+2)$
2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-1)(x+3)(x-5)$
3. $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(x-2)(2x-1)$

Problema 190 Factorizar:

1. $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30 = (x-1)(x-3)(x+2)(x+5)$
2. $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 = x^2(x-1)(x+1)(x-2)$
3. $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$
4. $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 27x^2 - 32x - 12 = (x-3)(x+1)^2(x+2)^2$
5. $x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9 = (x-3)^2(x+1)^2$
6. $x^5 + 3x^4 - 4x^2 = (x+2)^2(x-1)x^2$
7. $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2 = (x-1)^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
8. $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 21x - 30 = (x-5)(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
9. $x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 30x + 35 = (x+7)(x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
10. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = (x+1)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Problema 191 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

www.musat.net

2. $Q(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$
3. $R(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2(x+1)(x+3)$
2. $Q(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25 = (x-5)^2(x-1)$
3. $R(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = (x-1)^2(x+3)(2x-1)$

Problema 192 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$
2. $Q(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$
3. $R(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2(x-1)(x-3)$
2. $Q(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = (x+5)^2(x-1)$
3. $R(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3 = (x+1)^2(x+3)(2x-1)$

Problema 193 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$
2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$
3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 2x - 3$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x-3)^2(x-1)(x+1)$
2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = (x-5)^2(x+1)$
3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2(x+3)(3x-1)$

Problema 194 Factorizar:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + x + 10$
2. $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4$

www.musat.net

3. $R(x) = 3x^4 + 10x^3 - 7x^2 - 38x - 24$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + x + 10 = (x^2 - 1)(x + 2)(2x - 5)$
2. $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4 = (x^2 - 4)(x - 1)(2x - 1)$
3. $R(x) = 3x^4 + 10x^3 - 7x^2 - 38x - 24 = (x + 1)(x - 2)(x + 3)(3x + 4)$

Problema 195 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$
   Solución:
   $$P(x) = (x - 2)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$
2. $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
   Solución:
   $$Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x - \frac{1}{2})$$

Problema 196 Descompón el siguiente polinomio como producto de factores de grado uno:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$$

Solución:

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Problema 197 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
3. $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = x(x - 3)(x + 1)(x - 1)$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$

www.musat.net

3. $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = (x+5)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

Problema 198 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$
3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)(x+1)$
2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x-5)(x-1)(x+1)$
3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = (x-3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

1.8.4. Simplificación

Problema 199 Simplificar:

1. $\dfrac{x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 9x - 27}{x^2 + 2x - 3} = (x+3)(x^2+3) =$
   $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$
2. $\dfrac{x^6 + x^5 - 7x^4 + x^3 + 10x^2 - 6x}{x^3 + 7x^2 + 7x - 15} = \dfrac{x(x-1)(x^2-2)}{x+5} =$
   $\dfrac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x}{x+5}$
3. $\dfrac{x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 4x + 21}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{(x-3)(x+7)}{x-1} =$
   $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x-1}$
4. $\dfrac{x^5 + 12x^4 + 22x^3 - 84x^2 + 49x}{x^4 - 16x^3 + 78x^2 - 112x + 49} = \dfrac{x(x+7)^2}{(x-7)^2} =$
   $\dfrac{x^3 + 14x^2 + 49x}{x^2 - 14x + 49}$
5. $\dfrac{x^5 + 10x^4 + 34x^3 + 36x^2 - 27x - 54}{x^2 + 1} = \dfrac{(x+2)(x+3)^3}{x+1} =$
   $\dfrac{x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 81x + 54}{x+1}$

www.musat.net

1.8.5. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

Problema 200 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$, $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$
2. $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$, $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$

   $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x = x(x-1)^2(2x+1)$
   $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x-1)(x+1)^2(2x+1)$

   $\mathrm{MCD}(P(x), Q(x)) = (x-1)(2x-1)$

   $\mathrm{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^2(x+1)^2(2x+1)$

2. $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

   $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x+1)(x-1)^2$
   $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 = x^3(x-1)(2x-1)$

   $\mathrm{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x-1)$

   $\mathrm{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x-1)^2(x+1)(2x-1)$

Problema 201 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$
2. $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$, $Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

   $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x = x(x+1)^2(2x+1)$
   $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x+1)(x-1)^2(2x+1)$

   $\mathrm{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)(2x+1)$

   $\mathrm{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^2(x+1)^2(2x+1)$

www.musat.net

2. $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$, $Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3$

   $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)^2$
   $Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3 = x^3(x+1)(2x-1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x+1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x-1)(x+1)^2(2x-1)$

Problema 202 Calcula el MCD y el mcm de los siguientes polinomios

$$P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6$$

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18$$

Solución: $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6 = (x-1)^2(x+3)(x^2-2)$

$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18 = (x-1)(x+3)^2(x^2-2)$

$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)(x+3)(x^2-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$

$$\begin{aligned} mcm(P(x), Q(x)) &= (x-1)^2(x+3)^2(x^2-2) = \\ &= x^6 + 4x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + 24x - 18 \end{aligned}$$

Problema 203 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
2. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$, $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

   $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = x(x+1)^2(x+2)$
   $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x-1)^2(x+1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x+1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x-1)^2(x+1)^2(x+2)$

2. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$, $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

   $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x = x(x+2)^2(x-1)$

$Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$

$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x+2)(x-1)$

$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+2)^2(x-1)^2$

Problema 204 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$
2. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

Solución:

1. $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

   $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = x(x-1)^2(2x-1)$
   $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = (x-1)(x+1)^2(2x-1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x-1)(2x-1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^2(x+1)^2(2x-1)$

2. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

   $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)(x-1)^2$
   $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 = x^3(x-1)(2x-1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x-1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x-1)^2(x+2)(2x-1)$

Problema 205 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
2. $P(x) = 2x^5 + 5x^4 + 3x^3 - x^2 - x$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

   $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = x(x-1)^2(x-2)$
   $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x-1)^2(x+1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^2$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x-1)^2(x+1)(x-2)$

www.musat.net

2. $P(x) = 2x^5 + 5x^4 + 3x^3 - x^2 - x$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

   $P(x) = 2x^5 + 5x^4 + 3x^3 - x^2 - x = x(x + 1)^3(2x - 1)$
   $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = (x + 1)^2(x - 1)(2x - 1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x + 1)^2(2x - 1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)^3(x - 1)(2x - 1)$

Problema 206 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
2. $P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x$, $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

Solución:

1. $x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

   $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = x(x + 1)^2(x - 3)$
   $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x - 3)$

2. $P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x$, $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

   $P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x = x(x - 1)^3(3x - 1)$
   $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = (x - 1)^2(x + 1)(3x - 1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x - 1)^2(3x - 1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)^3(x + 1)(3x - 1)$

Problema 207 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$
2. $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

www.musat.net

$P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x = x(x-1)^2(x-5)$
$Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x+1)^2(x-1)$

$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x-1)$

$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x+1)^2(x-1)^2(x-5)$

2. $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

   $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x = x(x+1)^2(3x+1)$
   $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1 = (x+1)^3(x-1)(3x+1)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)^2(3x+1)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)^3(x-1)(3x+1)$

Problema 208 Si $P(x) = (x-3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 3x = x(x-3)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-3)^2x^2(x+7)$

Solución:

$$P(x) = x(x-3)(x+7) = x^3 + 4x^2 - 21x$$

Problema 209 Si $P(x) = (x+3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 3x = x(x+3)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+3)^2x^2(x-7)$

Solución:

$$P(x) = x(x+3)(x-7) = x^3 - 4x^2 - 21x$$

Problema 210 Si $P(x) = (x-2)^3x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x-2)^2$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-2)^3x^2(x+1)$

Solución:

$$Q(x) = x(x-2)^2(x+1) = x^4 - 3x^3 + 4x$$

www.musat.net

Problema 211 Si $P(x) = (x-5)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 5x = x(x-5)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-5)^2x^2(x+6)$

Solución:
$$P(x) = x(x-5)(x+6) = x^3 + x^2 - 30x$$

Problema 212 Si $P(x) = (x-6)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 6x = x(x-6)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-6)^2x^2(x+5)$

Solución:
$$P(x) = x(x+5)(x-6) = x^3 - x^2 - 30x$$

Problema 213 Si $P(x) = (x-7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 7x = x(x-7)$
2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-7)^2x^2(x+1)$

Solución:
$$P(x) = x(x+1)(x-7) = x^3 - 6x^2 - 7x$$

1.8.6. Simplificación de expresiones racionales de polinomios

Problema 214 Efectuar:

1. $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1}$
2. $\left(\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{3}{x}\right) : \left(\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\dfrac{2x}{x-1} \cdot \dfrac{3}{x}$

Solución:

1. $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x^2-1}$

www.musat.net

2. $\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{x}\right):\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{3x^3-x^2+3}{3x^2-x}$

3. $\dfrac{2x}{x-1}\cdot\dfrac{3}{x}=\dfrac{6}{x-1}$

Problema 215 Efectuar:

1. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}$

2. $\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{x}\right):\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

3. $\dfrac{2x}{x-1}\cdot\dfrac{3}{x^2}$

Solución:

1. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2-1}$

2. $\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{x}\right):\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2-3x}$

3. $\dfrac{2x}{x-1}\cdot\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{6}{x^2-x}$

Problema 216 Efectuar:

1. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}$

2. $\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}\right)$

3. $\dfrac{3x}{x-1}\cdot\dfrac{5}{x}$

Solución:

1. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x^2+3x-3}{x^2-1}$

2. $\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}\right)=-\dfrac{2x^3+x^2+1}{(x-1)^2}$

3. $\dfrac{3x}{x-1}\cdot\dfrac{5}{x}=\dfrac{15}{x-1}$

Problema 217 Efectuar:

www.musat.net

1. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}$
2. $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)$
3. $\dfrac{3x}{x-1}\cdot\dfrac{5}{x}$

Solución:

1. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-1}$
2. $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)=\dfrac{x^3+1}{3x^2-x}$
3. $\dfrac{3x}{x-1}\cdot\dfrac{5}{x}=\dfrac{15}{x-1}$

Problema 218 Efectuar:

1. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x+1}$
2. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-3\right):\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\dfrac{6x^2}{x+1}\cdot\dfrac{5}{x}$

Solución:

1. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2-1}$
2. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-3\right):\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{-2x^2+2x+4}{3x-1}$
3. $\dfrac{6x^2}{x+1}\cdot\dfrac{5}{x}=\dfrac{30x}{x+1}$

Problema 219 Calcular:

1. $\left(\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}\right):\left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}\right)$
2. $\dfrac{3x}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x}$

Solución:

www.musat.net

1. $\left(\frac{3x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}\right)=\frac{2(x-2)}{3x-1}$
2. $\frac{3x}{x-2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{x-2}$

Problema 220 Calcular:

1. $\frac{2x}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}$
2. $\left(\frac{3x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}\right)$
3. $\frac{5x}{x-2}\cdot\frac{2}{x}$

Solución:

1. $\frac{2x}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}\Longrightarrow x=-3-2\sqrt{2}=-5,8284;\quad x=-3+2\sqrt{2}=-0,1715$
2. $\left(\frac{3x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}\right)=\frac{2(2x-1)}{3-x}$
3. $\frac{5x}{x-2}\cdot\frac{2}{x}=\frac{10}{x-2}$

Problema 221 Calcular:

1. $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}$
2. $\left(\frac{3x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}\right)$
3. $\frac{8x}{x+3}\cdot\frac{3}{2x}$

Solución:

1. $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}\Longrightarrow x=\frac{1}{4}$
2. $\left(\frac{3x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}\right)=\frac{2(2x-1)}{3x-1}$
3. $\frac{8x}{x+3}\cdot\frac{3}{2x}=\frac{12}{x+3}$

Problema 222 Efectuar:

www.musat.net

1. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3x}{x^2-1} + \dfrac{x}{x+1}$
2. $\left(\dfrac{x+1}{x-1} - 3\right) : \left(\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\dfrac{6x^2}{x+1} \cdot \dfrac{5}{x}$

Solución:

1. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3x}{x^2-1} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x^2-2x+1}{x^2-1}$
2. $\left(\dfrac{x+1}{x-1} - 3\right) : \left(\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{-2x^2+2x+4}{3x-1}$
3. $\dfrac{6x^2}{x+1} \cdot \dfrac{5}{x} = \dfrac{30x}{x+1}$

Problema 223 Calcular x en apartado 1. y Simplificar en apartado 2.

1.
$$\frac{3x}{x-5} - \frac{1}{x+5} = \frac{x}{x^2-25}$$

2.
$$\left(\frac{x^2}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{x+1}{x+3} + \frac{2x}{x-1}\right)$$

Solución:

1.
$$\frac{3x}{x-5} - \frac{1}{x+5} = \frac{x}{x^2-25} \Longrightarrow x_1 = -3,906717751, \quad x_2 = -0,4266155818$$

2.
$$\left(\frac{x^2}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{x+1}{x+3} + \frac{2x}{x-1}\right) = \frac{x^3-x-3}{3x^2+6x-1}$$

Problema 224 Reduce a común denominador y efectua la operación correspondiente:

1. $\dfrac{x^2+1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{x^3+x-1}{x(x-1)}$
2. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} - \dfrac{x-1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-2)(x-1)(x+3)}$

www.musat.net

3. $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^2+x}=\dfrac{x}{x^2-1}$

4. $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{x}{(x+1)^2}=-\dfrac{x^2-3x-2}{(x-1)(x+1)^2}$

5. $\dfrac{x+1}{x^3-8x^2+21x-18}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{2x^2-5x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$

6. $\dfrac{2}{x^3+9x^2+15x-25}-\dfrac{1}{x^3+3x^2-9x+5}=\dfrac{x-7}{(x-1)^2(x+5)^2}$

7. $\dfrac{2x}{x^3-6x^2+11x-6}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{3x-2}{x^3-6x^2+11x-6}$

8. $\dfrac{x}{x^3-3x+2}-\dfrac{3x}{x^3-4x^2+5x-2}=-\dfrac{2x(x+4)}{(x^2-4)(x-1)^2}$

9. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x}{x^3-4x^2+5x-2}=-\dfrac{1}{(x-2)(x-1)^2}$

10. $\dfrac{2}{x^4+3x^3-3x^2-7x+6}+\dfrac{x}{x^3+4x^2+x-6}=\dfrac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x+2)(x+3)}$

Problema 225 Resolver y simplificar:

1. $$\left(\frac{x+2}{x^2+x-2}-1\right):\left(\frac{x+5}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$$

2. $$\left(\frac{x+2}{4x^2+40x+84}\right)\cdot\left(\frac{8x+24}{x^2+4x+4}\right)$$

Solución:

1. $$\left(\frac{x+2}{x^2+x-2}-1\right):\left(\frac{x+5}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{x^2-4}{x^2+6x+11}$$

2. $$\left(\frac{x+2}{4x^2+40x+84}\right)\cdot\left(\frac{8x+24}{x^2+4x+4}\right)=\frac{2}{x^2+9x+14}$$

Problema 226 *(2 puntos)*Resolver y simplificar:

1. $$\left(\frac{x+2}{x^2-3x-10}-1\right):\left(\frac{x+2}{x-5}-\frac{1}{x+2}\right)$$

2. $$\left(\frac{x+2}{5x^2-15x+10}\right)\cdot\left(\frac{5x-5}{x^2+4x+4}\right)$$

Solución:

1. $$\left(\frac{x+2}{x^2-3x-10}-1\right):\left(\frac{x+2}{x-5}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{-x^2+4x+12}{x^2+3x+9}$$

2. $$\left(\frac{x+2}{5x^2-15x+10}\right)\cdot\left(\frac{5x-5}{x^2+4x+4}\right)=\frac{1}{x^2-4}$$

Problema 227 *(2 puntos)*Resolver y simplificar:

1. $$\left(\frac{x+2}{x^2+2x-3}-1\right):\left(\frac{x+5}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$$

2. $$\left(\frac{x+2}{3x^2+12x-63}\right)\cdot\left(\frac{9x-27}{x^2+4x+4}\right)$$

Solución:

1. $$\left(\frac{x+2}{x^2+2x-3}-1\right):\left(\frac{x+5}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{x^2+x-5}{x^2+3x-8}$$

2. $$\left(\frac{x+2}{3x^2+12x-63}\right)\cdot\left(\frac{9x-27}{x^2+4x+4}\right)=\frac{3}{x^2+9x+14}$$

1.8.7. Ecuaciones Polinómicas

Problema 228 Calcular

$$\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$$

Solución:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\Longrightarrow x=-1$$

Problema 229 Calcular las soluciones reales de:

1. $$\frac{2x-3}{x-1}=\frac{3x-7}{2x-5}$$

   Solución:

   $$(2x-3)\cdot(2x-5)=(x-1)\cdot(3x-7)$$

www.musat.net

$$4x^2 - 10x - 6x + 15 = 3x^2 - 7x - 3x + 7$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Longrightarrow x = 4,\ x = 2$$

2.

$$\frac{2+x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

Solución:

$$(2+x)\cdot(x^2-x) = (2-x)\cdot(x^2+x)$$
$$2x^2 - 2x + x^3 - x^2 = 2x^2 + 2x - x^3 - x^2$$
$$2x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x\cdot(2x^2-4) = 0 \Longrightarrow$$
$$x = 0 \text{ (No sería una solución lógica)}$$
$$2x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Problema 230 Calcular x en la siguiente ecuación

$$\frac{2x}{x^2-4x+3} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-2x-3}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2-4x+3 & = (x-3)(x-1) \\ x^2-1 & = (x+1)(x-1) \\ x^2-2x-3 & = (x-3)(x+1) \end{array}\right. \Longrightarrow mcm = (x+1)(x-1)(x-3)$$

$$2x(x+1)-(x-1)(x-3) = 2(x-1) \Longrightarrow x^2+4x-1 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2+\sqrt{5} \\ x = -2-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Problema 231 Calcular las soluciones reales de:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Solución:

$$(x-1)\cdot(x+1) = (x^2-1)\cdot(x-1)$$
$$x^2 - 1 = x^3 - x^2 - x + 1$$
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Por Ruffini: $x = 2$, $x = 1$, $x = -1$, pero estas dos últimas soluciones no serían lógicas, ya que anulan el denominador de alguna de las fracciones.

www.musat.net

Problema 232 Resolver:

1. $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3x + 9 = 0$
2. $\dfrac{x+1}{x^2+4x-5} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{x}{x-1}$

Solución:

1. $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3x + 9 = 0 \Longrightarrow x = -3,\ x = \pm 1,\ x = \pm\sqrt{3}$
2. $\dfrac{x+1}{x^2+4x-5} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{x}{x-1} \Longrightarrow x = -5,372281323, \quad x = 0,3722813232$

www.musat.net

www.musat.net

Capítulo 2

Problemas de Geometría

2.1. Trigonometría

2.1.1. Ángulos

Problema 233 1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360^o

   a) 3215^o
   b) 2612^o

2. Expresa en grados los siguientes radianes

   a) $\dfrac{4\pi}{3}$rad
   b) $\dfrac{7\pi}{4}$rad

3. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados

   a) 215^o
   b) 325^o

Solución:

1. *a*) $3215^o = 8 \cdot 360^o + 335^o \Longrightarrow 8$ vueltas y 335^o
   b) $2612^o = 7 \cdot 360^o + 92^o \Longrightarrow 7$ vueltas y 92^o

2. *a*) $\dfrac{4\pi}{3}$rad$= \dfrac{4 \cdot 180^o}{3} = 240^o$
   b) $\dfrac{7\pi}{4}$rad$= \dfrac{7 \cdot 180^o}{4} = 315^o$

   a)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 180^o & \longrightarrow & \pi \\ 215^o & \longrightarrow & x \end{array} \right. \Longrightarrow x = \frac{215 \cdot \pi}{180} = 1,19\pi\text{rad}$$

www.musat.net

b)

$$\left\{\begin{array}{lll} 180^o & \longrightarrow & \pi \\ 325^o & \longrightarrow & x \end{array}\right. \Longrightarrow x = \frac{325\cdot\pi}{180} = 1,806\pi\text{rad}$$

Problema 234 1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360º

a) 3215º

b) 4160º

2. Expresa en grados los siguientes radianes

a) $\frac{5\pi}{3}$rad

b) $\frac{8\pi}{9}$rad

3. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados

a) 315º

b) 228º

Solución:

1. a) $3215^o = 8\cdot 360^o + 335^o \Longrightarrow 8$ vueltas y 335^o

   b) $4160^o = 11\cdot 360^o + 200^o \Longrightarrow 11$ vueltas y 200^o

2. a) $\frac{5\pi}{3}\text{rad}= \frac{5\cdot 180^o}{3} = 300^o$

   b) $\frac{8\pi}{9}\text{rad}= \frac{8\cdot 180^o}{9} = 160^o$

   a)

$$\left\{\begin{array}{lll} 180^o & \longrightarrow & \pi \\ 315^o & \longrightarrow & x \end{array}\right. \Longrightarrow x = \frac{315\cdot\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}\text{rad}$$

   b)

$$\left\{\begin{array}{lll} 180^o & \longrightarrow & \pi \\ 228^o & \longrightarrow & x \end{array}\right. \Longrightarrow x = \frac{228\cdot\pi}{180} = \frac{19\pi}{15}\text{rad} = 1,266666666\,\text{rad}$$

Problema 235 Calcular:

1. Expresa el 915º como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360º

2. Expresa en grados $\frac{3\pi}{4}$radianes

www.musat.net

3. Expresa en radianes 215^o

Solución:

1. $915^o = 2 \cdot 360^o + 195^o \Longrightarrow 2$ vueltas y 195^o
2. $\dfrac{3\pi}{4}\text{rad}= \dfrac{3 \cdot 180^o}{4} = 135^o$
3. $$\left\{ \begin{array}{lcl} 180^o & \longrightarrow & \pi \\ 215^o & \longrightarrow & x \end{array} \right. \Longrightarrow x = \frac{215 \cdot \pi}{180} = 1,194\text{rad}$$

Problema 236 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- $3485^o = 9 \cdot 360^o + 245^o$
- $5636^o = 15 \cdot 360^o + 236^o$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- $335^o = 1,861\pi$ radianes
- $126^o = 0,7\pi$ radianes

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\dfrac{3}{5}\pi$ radianes$= 108^o$
- $\dfrac{3}{2}\pi$ radianes$= 270^o$

Problema 237 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- $5725^o = 15 \cdot 360^o + 325^o$
- $8391^o = 23 \cdot 360^o + 111^o$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- $325^o = 1,805\pi$ radianes
- $385^o = 2,139\pi$ radianes

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\dfrac{3}{7}\pi$ radianes$= 77^o 8' 34''$
- $\dfrac{6}{5}\pi$ radianes$= 216^o$

www.musat.net

Problema 238 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- $8793^o = 24 \cdot 360^o + 153^o$
- $7421^o = 20 \cdot 360^o + 221^o$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- $185^o = 1,02\pi$ radianes
- $270^o = 1,5\pi$ radianes

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\dfrac{1}{5}\pi$ radianes$= 36^o$
- $\dfrac{4}{7}\pi$ radianes$= 102^o51'26''$

Problema 239 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- $9236^o = 25 \cdot 360^o + 236^o$
- $8721^o = 24 \cdot 360^o + 81^o$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- $335^o = 1,861\pi$ radianes
- $126^o = 0,7\pi$ radianes

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\dfrac{2}{7}\pi$ radianes$= 51^o25'43''$
- $\dfrac{8}{5}\pi$ radianes$= 288^o$

Problema 240 Calcular

1. Reducir el ángulo 3824^o a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\dfrac{8\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 335^o de grados a radianes.

Solución:

1. $3824^o = 10 \cdot 360^o + 224^o$

2. $\dfrac{8\pi}{7}$ radianes$= 205^o42'51''$
3. $335^o = 1,86\pi$ radianes

Problema 241 Calcular

1. Reducir el ángulo 4526^o a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\dfrac{9\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 321^o de grados a radianes.

Solución:

1. $4526^o = 12 \cdot 360^o + 206^o$
2. $\dfrac{9\pi}{7}$ radianes$= 231^o25'43''$
3. $321^o = 1,783\pi$ radianes

Problema 242 Calcular

1. Reducir el ángulo 5728^o a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\dfrac{6\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 223^o de grados a radianes.

Solución:

1. $5728^o = 15 \cdot 360^o + 328^o$
2. $\dfrac{6\pi}{7}$ radianes$= 154^o17'9''$
3. $223^o = 1,239\pi$ radianes

Problema 243 Calcular

1. Reducir el ángulo 8324^o a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\dfrac{9\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 311^o de grados a radianes.

Solución:

1. $8324^o = 23 \cdot 360^o + 44^o$
2. $\dfrac{9\pi}{7}$ radianes$= 231^o25'43''$
3. $311^o = 1,728\pi$ radianes

www.musat.net

2.1.2. Razones Trigonométricas

Problema 244 Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, que pertenece al segundo cuadrante, y sabiendo que $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

Solución:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \Longrightarrow$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \pm\dfrac{4}{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ ya que estamos en el segundo cuadrante.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\dfrac{3}{4}$

Problema 245 Conociendo las razones trigonométricas de 45^o calcular las de 225^o.

Solución:

$225^o = 180^o + 45^o$:

$\sin 225^o = \sin(180^o + 45^o) = -\sin 45^o = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225^o = \cos(180^o + 45^o) = -\cos 45^o = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 225^o = \tan(180^o + 45^o) = \tan 45^o = 1$

Problema 246 Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin\alpha = -\dfrac{3}{4}$

Solución:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 \Longrightarrow$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2} = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4} \Longrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ya que estamos en el tercer cuadrante.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-3/4}{-\sqrt{7}/4} = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

Problema 247 Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α, que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$

www.musat.net

Solución:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\Longrightarrow$

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Longrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ya que estamos en el segundo cuadrante.

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Problema 248 Conociendo las razones trigonométricas de 60°, calcular las de 120°.

Solución:

$$120^{\circ}=180^{\circ}-60^{\circ}$$

$$\sin 120^{\circ}=\sin 60^{\circ},\ \cos 120^{\circ}=-\cos 60^{\circ},\ \tan 120^{\circ}=-\tan 60^{\circ}$$

Problema 249 Conociendo las razones trigonométricas de 30°, calcular las de 150°.

Solución:

$150^{\circ}=180^{\circ}-30^{\circ}$ luego:

$$\sin 150^{\circ}=\sin 30^{\circ},\ \cos 150^{\circ}=-\cos 30^{\circ},\ \tan 150^{\circ}=-\tan 30^{\circ}$$

Problema 250 Sabiendo que $\tan\alpha=3$ y que $\alpha\in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Longrightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1}{10}}\Longrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}=-0,316227766$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Longrightarrow\sin\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}=-0,948683298$$

Problema 251 Sabiendo que $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ y que $\alpha\in$segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow$$

www.musat.net

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)} = -\frac{\sqrt{15}}{4} = -0,9682458365$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \tan\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15} = -0,2581988897$$

Problema 252 Conociendo las razones trigonométricas de 45º, calcular las de 225º.

Solución

$$225^o = 180^o + 45^o$$

$$\sin 225^o = -\sin 45^o,\ \cos 225^o = -\cos 45^o,\ \tan 225^o = \tan 45^o$$

Problema 253 Sabiendo que $\tan\alpha = -4$ y que $\alpha\in$segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} = -0,2425356250$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17} = 0,9701425001$$

Problema 254 Sabiendo que $\tan\alpha = 4$ y que $\alpha\in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} = -0,2425356250$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17} = -0,9701425001$$

Problema 255 Sabiendo que $\tan\alpha = 3$ y que $\alpha\in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} = -0,3162277660$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10} = -0,9486832980$$

www.musat.net

Problema 256 Conociendo las razones trigonométricas de 60^o, calcular las de 240^o.

Solución:

$$240^o = 180^o + 60^o$$

$$\sin 240^o = -\sin 60^o,\ \cos 240^o = -\cos 60^o,\ \tan 240^o = \tan 60^o$$

Problema 257 Sabiendo que $\tan\alpha = -2$ y que $\alpha\in$cuarto cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,4472135955$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} = -0,894427191$$

Problema 258 Sabiendo que $\tan\alpha = 3$ y que $\alpha\in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} = -0,3162277660$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10} = -0,9486832980$$

Problema 259 Sabiendo que $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ y que $\alpha\in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{13}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13} = -0,5547$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{6\sqrt{13}}{26} = -0,416025$$

Problema 260 Sabiendo que $\tan\alpha = -5$ y que $\alpha\in$segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{26}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26} = -0,1961161351$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26} = 0,9805806756$$

www.musat.net

Problema 261 Sabiendo que $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$ y que $\alpha \in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} = -0,9428090415$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3535533905$$

Problema 262 Deducir las razones trigonométricas de 30^{o}

Solución:

$$\sin 30^{\text{o}} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ver teoría.

Problema 263 Conociendo las razones trigonométricas de 30^{o}, 45^{o} y 60^{o} calcular las de 240^{o}.

Solución

$$240^{\text{o}} = 180^{\text{o}} + 60^{\text{o}}$$

$$\sin 240^{\text{o}} = -\sin 60^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 240^{\text{o}} = -\cos 60^{\text{o}} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^{\text{o}} = \tan 60^{\text{o}} = \sqrt{3}$$

Problema 264 Sabiendo que $\tan\alpha = 4$ y que $\alpha \in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} = -0,2425356250$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17} = -0,9701425001$$

Problema 265 Deducir las razones trigonométricas de 60^{o}

Solución:

$$\sin 60^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^{\text{o}} = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^{\text{o}} = \sqrt{3}$$

Ver teoría.

www.musat.net

Problema 266 Conociendo las razones trigonométricas de 30^o, 45^o y 60^o calcular las de 330^o.

Solución

$$330^o = -30^o$$

$$\sin 330^o = -\sin 30^o = -\frac{1}{2}, \quad \cos 330^o = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^o = -\tan 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Problema 267 Sabiendo que $\tan\alpha = -5$ y que $\alpha \in$segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{26}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26} = -0,1961161351$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26} = 0,9805806756$$

Problema 268 Deducir las razones trigonométricas de 45^o

Solución:

$$\sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^o = 1$$

Ver teoría.

Problema 269 Conociendo las razones trigonométricas de 30^o, 45^o y 60^o calcular las de 225^o.

Solución

$$225^o = 180^o + 45^o$$

$$\sin 225^o = -\sin 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 225^o = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^o = \tan 45^o = 1$$

Problema 270 Deducir las razones trigonométricas de 45^o

Solución:

$$\sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^o = 1$$

Ver teoría.

www.musat.net

Problema 271 Conociendo las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º calcular las de 135º.

Solución

$$135^o = 180^o - 45^o$$

$$\sin 135^o = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 135^o = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^o = -\tan 45^o = -1$$

Problema 272 Sabiendo que $\tan\alpha = -7$ y que $\alpha \in$segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{50}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{50}}{50} = -0,1414213562$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{7\sqrt{50}}{50} = 0,9899494936$$

Problema 273 Sabiendo que $\tan\alpha = -7$ y que $\alpha \in$segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{50}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{50}}{50} = -0,1414213562$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{7\sqrt{50}}{50} = 0,9899494936$$

Problema 274 Sabiendo que $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ y que $\alpha \in$tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} = -0,9682458365$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15} = 0,2581988897$$

Problema 275 Sabiendo que $\tan\alpha = 2$, calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que α pertenece al tercer cuadrante.
Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2} = 0,5$$

www.musat.net

Sabemos que $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y aplicando esta fórmula quedaría:
$2^2 + 1 = \sec^2\alpha \implies \sec = \pm\sqrt{5} = \pm 2,24$. Como en el tercer cuadrante la secante es negativa concluimos con el resultado $\sec\alpha = -2,24$.

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ podemos despejar $\cos\alpha$ y nos quedaría $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2,24} = -0,45$, es decir $\cos\alpha = -0,45$.

Ahora vamos a utilizar la fórmula $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$ y tendríamos:
$1 + \frac{1}{4} = \csc^2\alpha \implies \csc\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm 1,12$. Como en el tercer cuadrante la cosecante es negativa será $\csc\alpha = -1,12$.

Como $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \implies \sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{1}{-1,12} = -0,89$ es decir
$\sin\alpha = -0,89$

Problema 276 Teniendo en cuenta que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^{\text{o}});\ \ \sin(\alpha + 45^{\text{o}});\ \ \cos(\alpha - 60^{\text{o}});\ \ \tan(60^{\text{o}} - \alpha)$$

Solución:
Se calcula primero $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$:
$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3};\quad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\sin(\alpha+30^{\text{o}}) = \sin\alpha\cdot\cos 30^{\text{o}} + \cos\alpha\cdot\sin 30^{\text{o}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{6} = 0,7601$

$\sin(\alpha + 45^{\text{o}}) = \sin\alpha\cdot\cos 45^{\text{o}} + \cos\alpha\cdot\sin 45^{\text{o}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,9024$

$\cos(\alpha - 60^{\text{o}}) = \cos\alpha\cdot\cos 60^{\text{o}} + \sin\alpha\cdot\sin 60^{\text{o}} = \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,7601$

$\tan(60^{\text{o}} - \alpha) = \frac{\tan 60^{\text{o}} - \tan\alpha}{1 + \tan 60^{\text{o}}\cdot\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{8}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} = 0,8549$

Problema 277 Hallar las razones trigonométricas de α sabiendo que $\sec\alpha = 3$ y $\alpha \in 4^{\text{o}}$ Cuadrante.

Solución:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 3 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan\alpha = -2\sqrt{2}$$
$$\cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

www.musat.net

Problema 278 Sabiendo que $\csc\alpha = 3$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha = 3 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \sec\alpha = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \cot\alpha = -\sqrt{8}$$

Problema 279 Sabiendo que $\csc\alpha = 2$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha = 2 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sec\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot\alpha = -\sqrt{3}$$

Problema 280 Sabiendo que $\tan\alpha = -4$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{17} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\tan\alpha = -4 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{4}$$

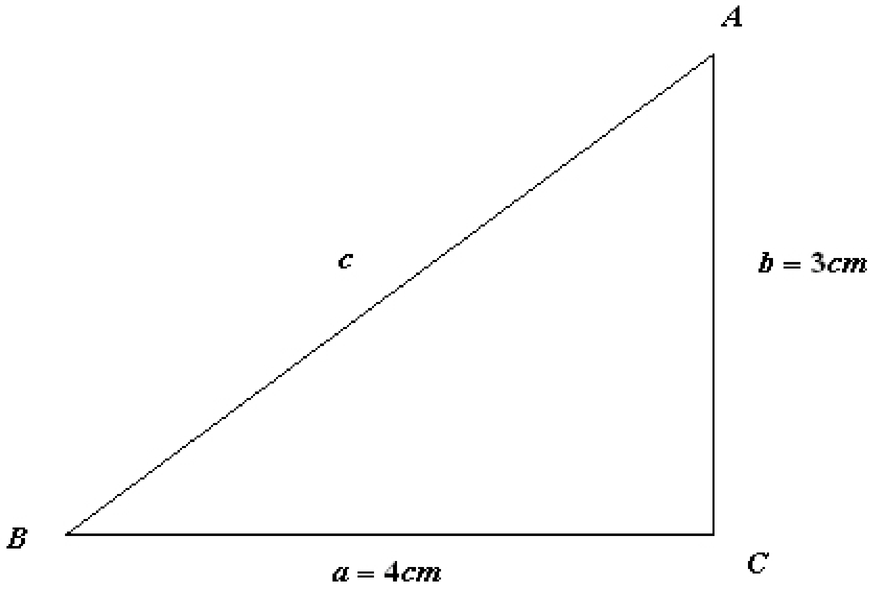
2.1.3. Resolución de Triángulos

Problema 281 Resolver el siguiente triángulo, conociendo los catetos $a = 4cm$ y $b = 3cm$:

Solución:

$$\tan B = \frac{3}{4} = 0,75 \Longrightarrow B = 36^o52'12''$$

www.musat.net



$$A = 90^o - B = 90^o - B = 36^o52'12'' = 53^o7'48''$$
$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5cm$$

Problema 282 De un triángulo rectángulo se conoce su hipotenusa y un cateto, que valen $25cm$ y $16cm$ respectivamente. Calcular el otro cateto y los ángulos de este triángulo.

Solución:

$\sin A = \dfrac{16}{25} \Longrightarrow A = 39^o47'31''$

$B = 90^o - A = 50^o12'29''$

$\cos A = \dfrac{b}{25} \Longrightarrow b = 19,209cm$

Problema 283 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 5 y 9 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Solución:

$$c = \sqrt{25+81} = \sqrt{106} = 10,29563\,cm$$

$$\tan A = \frac{5}{9} \Longrightarrow A = 29^{o}3'17''$$

$$\tan B = \frac{9}{5} \Longrightarrow B = 60^{o}56'43''$$

$$C = 90^{o}$$

Problema 284 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 7 y 10 *cm* respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Solución:

$$c = \sqrt{49+100} = \sqrt{149} = 12,20655561\,cm$$

$$\tan A = \frac{7}{10} \Longrightarrow A = 34^{o}59'31''$$

$$\tan B = \frac{10}{7} \Longrightarrow B = 55^{o}0'29''$$

$$C = 90^{o}$$

Problema 285 En un triángulo rectángulo se conocen un ángulo $A = 37^{o}$ y el cateto opuesto $a = 9$. Calcular el otro ángulo, el otro cateto y su hipotenusa.

Solución:

$$\tan A = \frac{a}{b} \Longrightarrow a = \frac{9}{\tan 37^{o}} = 11,94340339$$

$$\sin A = \frac{a}{c} \Longrightarrow c = \frac{9}{\sin 37^{o}} = 14,95476127$$

$$C = 90^{o},\ \ B = 90^{o} - A = 90^{o} - 37^{o} = 53^{o}$$

Problema 286 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 4 y 7 *cm* respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Solución:

$$c = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} = 8,06\,cm$$

$$\tan A = \frac{7}{4} \Longrightarrow A = 60^{o}15'18''$$

$$\tan B = \frac{4}{7} \Longrightarrow B = 29^{o}44'42''$$

$$C = 90^{o}$$

www.musat.net

Problema 287 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 3 y 5 *cm* respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Solución:

$$c = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 5,830951894\,cm$$
$$\tan A = \frac{3}{5} \Longrightarrow A = 30^{\text{o}}57'50''$$
$$\tan B = \frac{5}{3} \Longrightarrow B = 59^{\text{o}}2'10''$$
$$C = 90^{\text{o}}$$

Problema 288 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 5 y 8 *cm* respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Solución:

$$c = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} = 9,433981132\,cm$$
$$\tan A = \frac{5}{8} \Longrightarrow A = 32^{\text{o}}0'19''$$
$$\tan B = \frac{8}{5} \Longrightarrow B = 57^{\text{o}}59'41''$$
$$C = 90^{\text{o}}$$

Problema 289 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 9 y 12 *cm* respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Solución:

$$c = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15\,cm$$
$$\tan A = \frac{9}{12} \Longrightarrow A = 36^{\text{o}}52'12''$$
$$\tan B = \frac{12}{9} \Longrightarrow B = 53^{\text{o}}7'48''$$
$$C = 90^{\text{o}}$$

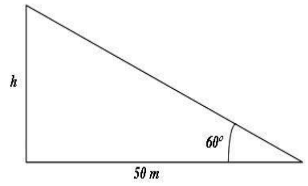
2.1.4. Aplicaciones

Problema 290 La sombra de un árbol mide $50m$ y el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de 60^{o}. ¿Cuál es la altura del árbol?.

Solución:

$$\tan 60^{\text{o}} = \frac{h}{50} \Longrightarrow h = 50 \cdot \tan 60^{\text{o}} = 86,6m$$

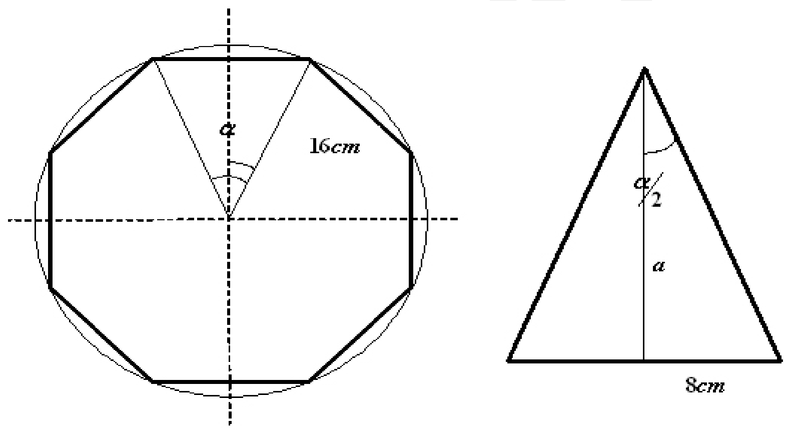
www.musat.net



Problema 291 La longitud del lado de un octógono es de $16cm$. Calcular su área.

Solución:

$$\alpha = \frac{360^o}{8} = 45^o \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 22^o30'$$

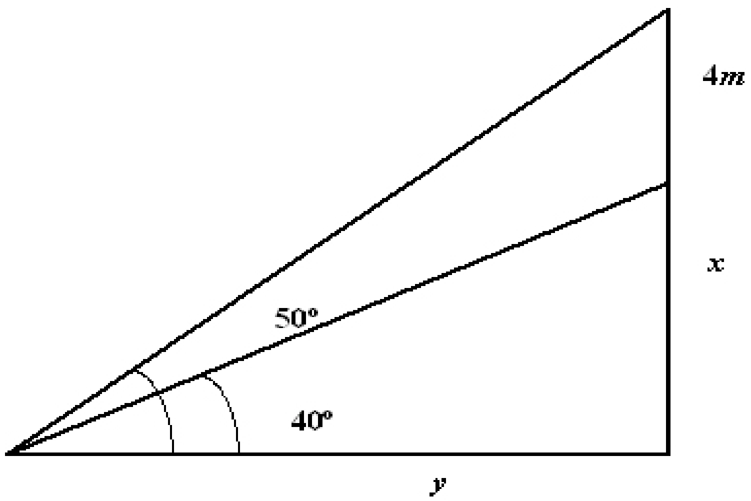


$\tan 22^o30' = \frac{8}{a} \Longrightarrow a = \frac{8}{\tan 22^o30'} = 19,3137cm$
$S_{tri} = \frac{16 \cdot 19,3137}{2} = 154,51cm^2$
$S_{oct} = 8 \cdot 154,51 = 1236,077cm^2$

Problema 292 Desde un puesto de caza, un cazador apunta con su escopeta a una tórtola, que se encuentra posada en la copa de un árbol, con un ángulo de 50^o. Cuando iba a disparar la tórtola salió volando y se posó en una rama $4m$ más abajo; la apunta cuidadosamente con un ángulo de 40^o y cuando fué a disparar decidió no hacerlo; se acordó del pesado de su profesor de "mate"de 4^o y se hizo las siguientes preguntas: ¿Qué altura tiene el árbol?, ¿Qué distancia me separa de él?. (Pobre tórtola)

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}\tan 50^o = \frac{4+x}{y}\\ \tan 40^o = \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y\cdot\tan 50^o = 4+x\\ y\cdot\tan 40^o = x\end{array}\right. \Longrightarrow y\cdot\tan 50^o - 4 = y\cdot\tan 40^o$$



$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{\tan 50^o - \tan 40^o} = 11,34256\\ \\ x = y\cdot\tan 40^o = 9,51754\end{array}\right.$$

En conclusión, la distancia que me separa del árbol será $y = 11,34256m$ y la altura del árbol será $x + 4 = 9,51754 + 4 = 13,51754m$.

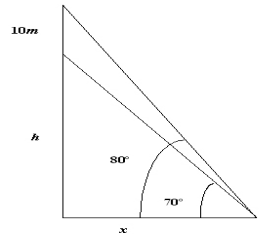
Problema 293 En el tejado de un edificio están colocando una antena. Desde la calle veo la base de ella con un ángulo de 70^o mientras que el extremo superior lo veo con un ángulo de 80^o. Si la antena mide $10m$, calcular la altura del edificio y la distancia que me separa de él.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}\tan 70^o = \frac{h}{x}\\ \tan 80^o = \frac{10+h}{x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\cdot\tan 70^o = h\\ x\cdot\tan 80^o = 10+h\end{array}\right. \Longrightarrow$$

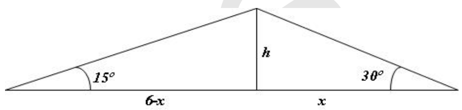
$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{10}{\tan 80^o - \tan 70^o} = 3,42m\\ \\ h = \frac{10\tan 70^o}{\tan 80^o - \tan 70^o} = 9,397m\\ \end{array}\right.$$

www.mu



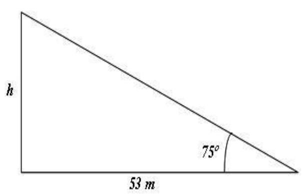
Problema 294 Dos personas, separadas por una distancia de $6Km$ observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30^o, mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15^o. Calcular la altura a la que vuela el avión.

Solución:



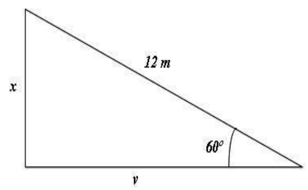
$$\left\{\begin{array}{l} \tan 30^o = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 15^o = \dfrac{h}{6-x} \end{array}\right. \Longrightarrow h = 1,098Km$$

Problema 295 Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75^o y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros.
Solución:



$$\tan 75^o = \frac{h}{53} \Longrightarrow h = 53 \cdot \tan 75^o = 197,798 \text{ metros}$$

Problema 296 Una escalera de $12m$ de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de 60^o. Calcular la altura de pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared.
Solución:



$$\begin{cases} \sin 60^o = \dfrac{x}{12} \Longrightarrow x = 12\sin 60^o = 10,39230484m \\ \\ \cos 60^o = \dfrac{y}{12} \Longrightarrow y = 12\cos 60^o = 6m \end{cases}$$

Problema 297 Calcular el área de un octógono de $5cm$ de lado.

Solución:

$$\frac{360^o}{8} = 45^o \Longrightarrow \tan 22^o 30' = \frac{2,5}{h} \Longrightarrow h = 6,035533906cm$$

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{p \cdot h}}{2} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 6,035533906}{2} = 120,7106781\mathrm{cm}^2$$

donde p es el perímetro y h es la apotema.

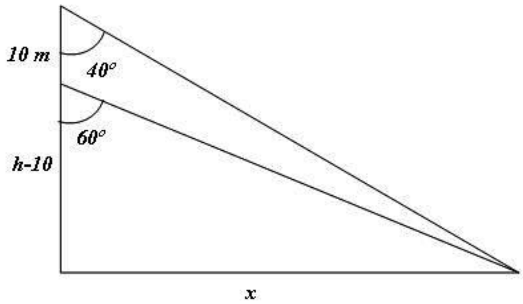
Problema 298 Pablo observa desde la ventana de su casa un accidente con un ángulo de 60^o; como es muy curioso y desde allí no lo ve muy bien, decide subir a la azotea del edificio, que se encuentra 10 metros más arriba. Desde allí, con unos prismáticos, se empapa de todo mirando con un ángulo de 40^o. Lo que no se imaginaba, era que a su vez era observado por el profesor de matemáticas, y éste no le preguntó sobre el accidente, sino por la altura del edificio y la distancia a la que ocurrió desde su casa.

(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

Solución:

$$\begin{cases} \tan 60^o = \frac{x}{h-10} \\ \\ \tan 40^o = \frac{x}{h} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 16,27595362m \\ \\ h = 19,39692620m \end{cases}$$

www.musat.net



Problema 299 Calcular el área de un decágono de $4m$ de lado.

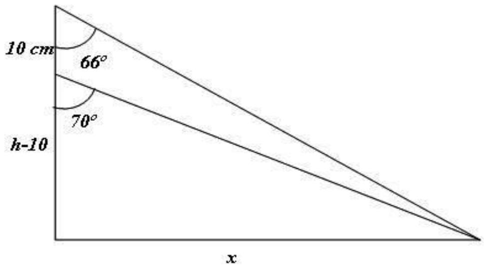
Solución:

$\dfrac{360^{\text{o}}}{10} = 36^{\text{o}} \Longrightarrow \tan 18^{\text{o}} = \dfrac{2}{h} \Longrightarrow h = 6,155367074cm$

$\text{S} = \dfrac{\text{p} \cdot \text{h}}{2} = \dfrac{4 \cdot 10 \cdot 6,155367074}{2} = 123,1073414\text{cm}^2$

donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 300 En un examen de matemáticas, Juan Vicente está intentando copiar de Luis (¿es raro?), el profesor que le observa comprueba que, cuando Juan Vicente intenta mirar sin levantar la cabeza lo hace con un ángulo de 70^{o}, pero en ese caso no puede ver el examen del compañero, así es que estira la cabeza y el cuerpo $10cm$, con lo que ahora si alcanza un ángulo perfecto de visión con 65^{o} (Luis se hace complice bajando el hombro). El profesor decide quitarles el examen y les propone este problema para que calculen la distancia que hay entre Juan Vicente y el examen de Luis, también tendrán que calcular la altura que hay desde el examen de Juan Vicente hasta sus ojos, en el momento en el que esta copiando.
(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)
Solución:



www.musat.net

$$\begin{cases} \tan 70^{\circ} = \frac{x}{h-10} \\ \\ \tan 65^{\circ} = \frac{x}{h} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 97,71596371cm \\ \\ h = 45,56570220cm \end{cases}$$

Problema 301 Calcular el área de un dodecágono de $4cm$ de lado.

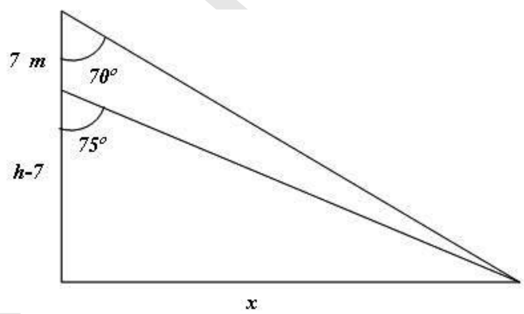
Solución:

$$\frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ} \Longrightarrow \tan 15^{\circ} = \frac{2}{h} \Longrightarrow h = 7,464101615cm$$

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{p} \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 7,464101615}{2} = 179,1384387\mathrm{cm}^2$$

donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 302 En un viaje del colegio por Extremadura, Cristina y Marina quedaron fascinadas con las cigüeñas. En Trujillo decidieron subir a una torre para ver el nido de cerca. Primero subieron hasta el campanario, y desde allí veían al grupo de compañeros con un ángulo de 75°, pero aun tuvieron que subir 7 peligrosos metros para llegar hasta el nido; desde allí volvieron a mirar al grupo y esta vez con un ángulo de 70°. Cometieron el fallo de ir acompañados del profesor de matemáticas, que en cuato bajaron les pregunto por la altura de la torre y la distancia de ésta al grupo. (No se puede llevar a un profesor de matemáticas de excursión)
(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)
Solución:



$$\begin{cases} \tan 75^{\circ} = \frac{x}{h-7} \\ \\ \tan 70^{\circ} = \frac{x}{h} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 72,90068787m \\ \\ h = 26,53368044m \end{cases}$$

Problema 303 Calcular el área de un octógono de $6cm$ de lado.

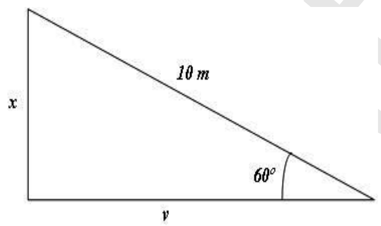
Solución:

$$\frac{360^{\circ}}{8} = 45^{\circ} \Longrightarrow \tan 22^{\circ}30' = \frac{3}{h} \Longrightarrow h = 7,242640687cm$$

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{p} \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 7,242640687}{2} = 173{,}8233764\mathrm{cm}^2$$

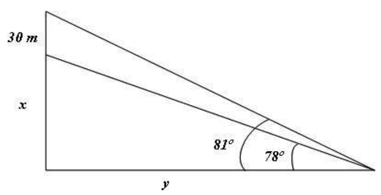
donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 304 Una escalera de $10m$ de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de 60°. Calcular la altura de pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared.
Solución:



$$\begin{cases} \sin 60^{\circ} = \dfrac{x}{10} \Longrightarrow x = 10 \sin 60^{\circ} = 8,660254037m \\ \\ \cos 60^{\circ} = \dfrac{y}{10} \Longrightarrow y = 10 \cos 60^{\circ} = 5m \end{cases}$$

Problema 305 Un paracaidista se va a lanzar desde lo alto de un rascacielos, y tu te encuentras abajo, no muy lejos, para disfrutar con su demostración de valor. Le observas preparar hasta los más mínimos detalles, con un ángulo de 81°, y luego le ves lanzarse al vacio sin el menor asomo de miedo. Todo el mundo contiene la respiración, y por fin despliega el paracaidas, en ese momento tomas aire mientras le observas con un ángulo de 78°. Han sido 30 metros de caida libre, pero no todo va a ser tan espectacular. Allí estaba el pesado de mi profesor de matemáticas para preguntarme por la altura del edificio y por la distancia que nos separaba de él.
Solución:

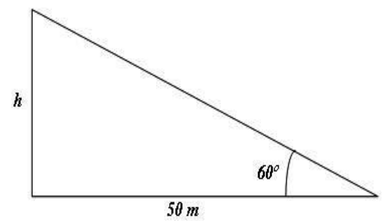


www.mus...t.net

$$\left\{\begin{array}{l}\tan 81^{o} = \frac{30+x}{y} \\ \tan 78^{o} = \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 87,71178037 \\ y = 18,64371445\end{array}\right.$$

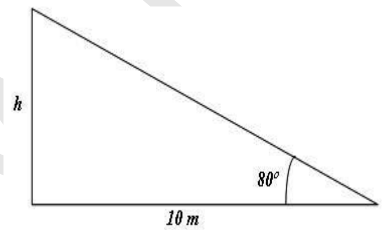
La altura del edificio será de 117,7118 metros, y estamos a 18,6437 metros de él.

Problema 306 En el Parque de Atracciones observas a tu amigo en lo alto de la Noria con un ángulo de 60º. Calcular a la altura que se encuentra, sabiendo que tu estás a 50m de la Noria.
Solución:



$$\tan 60^{o} = \frac{h}{50} \Longrightarrow h = 50 \tan 60^{o} = 86,6025\, m$$

Problema 307 Daniel Merino observa a sus compañeros, que están en lo alto de un campanario, con un ángulo de 80º. Calcular la altura a la que se encuentran sabiendo que Daniel está a 10 metros del edificio.
Solución:

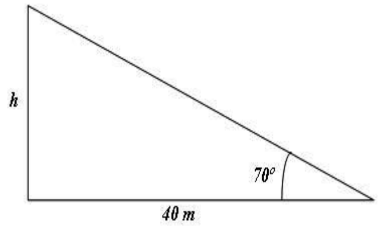


$$\tan 80^{o} = \frac{h}{10} \Longrightarrow h = 10 \tan 80^{o} = 56,71281819\, m$$

Problema 308 Observas el nido de un águila, en una pared vertical de una montaña, con un ángulo de 70º. Calcular la altura a la que se encuentra el nido, sabiendo que estás a 40m de esa pared.
Solución:

$$\tan 70^{o} = \frac{h}{40} \Longrightarrow h = 40 \tan 70^{o} = 109,8990967\, m$$

www.musat.net



Problema 309 Calcular el área de un Dodecágono regular inscrito en una circunferencia de $6m$ de radio.

Solución:

$$\frac{360^{\rm o}}{12} = 30^{\rm o} \Longrightarrow \sin 15^{\rm o} = \frac{l/2}{6} \Longrightarrow l = 3,105828541\, m$$

$$\cos 15^{\rm o} = \frac{h}{6} \Longrightarrow h = 5,795554957\, m$$

$$S = \frac{p \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 3,105828541 \cdot 5,795554957}{2} = 108\, m^2$$

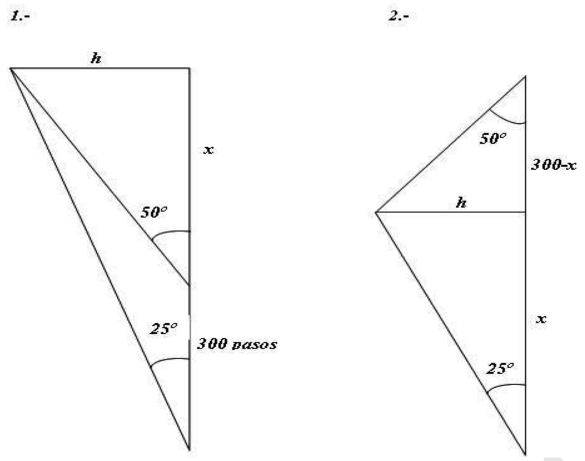
donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 310 Nos hemos encontrado un mensaje en una botella que estaba a la deriva, flotando en las aguas del mar. Se trata de un antigüo manuscrito del pirata Barbacana, y nos explica que su tesoro está escondido en Ïsla Perdida". Nos precisa la siguiente información:
Si nos situamos en el centro de la isla veremos una enorme palmera que nos servirá de referencia; desde ella se ve una gruta a nuestra izquierda (oeste) con un ángulo de 25°(respecto al norte) y si caminamos hacia el norte 300 pasos la vemos con un ángulo de 50°. El tesoro se encuentra en nuestro camino hacia el norte, justamente donde corta la perpendicular al camino que llega desde la gruta. ¿A cuántos pasos de la palmera se encuentra el tesoro?.(Hay dos posibles planteamientos).
Solución:

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 25^{\rm o} = \frac{h}{300+x} \\ \\ \tan 50^{\rm o} = \frac{h}{x} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 192,8362829\, \text{pasos} \\ \\ h = 229,8133329\, \text{pasos} \end{array} \right.$$

Tendremos que dar $492,8$ pasos dirección norte y 229,8 pasos dirección oeste.

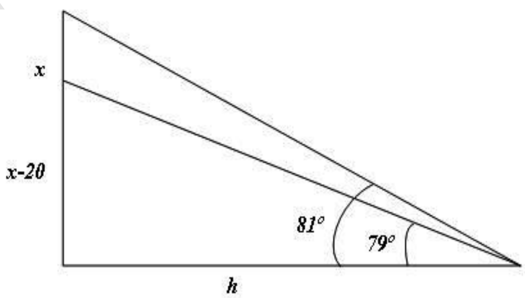


2.

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 25^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 50^{\circ} = \frac{h}{300-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 215,6289929\,\text{pasos} \\ \\ h = 100,5494507\,\text{pasos} \end{array}\right.$$

Tendremos que dar $215,6$ pasos dirección norte y 100,5 pasos dirección oeste.

Problema 311 En un paseo por Madrid Elías se quedo boquiabierto al ver como se quedó el edificio Windsor después del incendio. Observó el trabajo de las gruas, fascinado por la exactitud de sus movimientos.
Había una de ellas que se apoyaba en lo alto del edificio y tenía colgado un hierro enorme en un cable de $20m$.
Elías observaba el hierro con un ángulo de 79º y a la grua con un ángulo de 81º. Calcular la altura del edificio y la distancia a la que Elías se encuentra de él.
Solución:

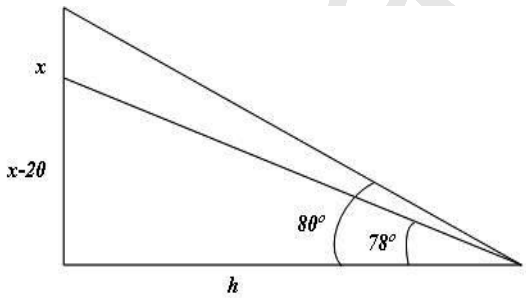


www.musat.net

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 79^{\circ} = \frac{x-20}{h} \\ \\ \tan 81^{\circ} = \frac{x}{h} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 108,0014543\, m \\ \\ h = 17,10574990\, m \end{array}\right.$$

Problema 312 En el parque de atracciones todos estaban pendientes de Marcos de las Heras, que se había subido en la lanzadera, y allí en lo alto parecía tener una cara que era un poema. Le observaban con un ángulo de 80°. La cara se le puso mucho peor cuando en la caida se atascó la lanzadera después de recorrer $20m$, ahora le observaban con un ángulo de 78°. Calcular la altura de la lanzadera y la distancia a la que nos encontramos de ella. (Por eso no vino al examen de Mates)

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 78^{\circ} = \frac{x-20}{h} \\ \\ \tan 80^{\circ} = \frac{x}{h} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 117,3386807\, m \\ \\ h = 20,68997529\, m \end{array}\right.$$

Problema 313 Calcular el área de un octógono regular de $4m$ de lado.

Solución:

$$\frac{360^{\circ}}{8} = 45^{\circ} \Longrightarrow \tan 22^{\circ}30' = \frac{2}{h} \Longrightarrow h = 4,828\, m$$

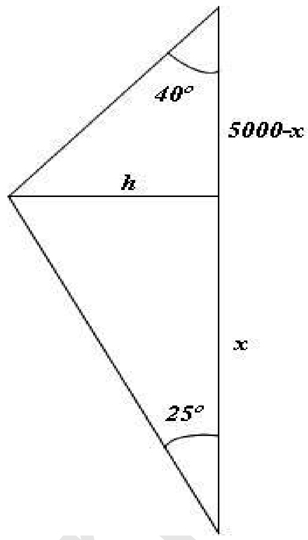
$$S = \frac{p \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4,828}{2} = 77,255\, m^2$$

donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 314 A Quique le han dado trabajo de torpedero en un submarino (hay trabajos peores). En unas maniobras le han trazado un camino rectilineo de boyas de $5Km$ por el que navegará el submarino; y alejado de este camino habrá un objetivo para torpedear. El disparo se hará cuando la

distancia del camino al objetivo sea la menor posible. Se acuerda del pelma de su profesor de matemáticas de 4º y se decide a tomar los datos necesarios: El ángulo con el que observa el objetivo en el origen del camino es de 25º y el ángulo con el que observa el objetivo en el destino es de 40º.
Se pregunta por la distancia que debe recorrer el submarino desde su origen para que Quique de la orden de disparo, y en ese momento la distancia a la que esta el objetivo.

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 25^{\circ} = \frac{d}{x} \\ \\ \tan 40^{\circ} = \frac{d}{5000-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3213,938048\, m \\ \\ d = 1498,683924\, m \end{array}\right.$$

Problema 315 Calcular el área de un pentágono regular de $8m$ de lado.

Solución:

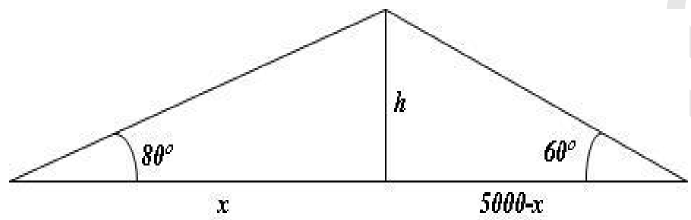
$$\frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ} \Longrightarrow \tan 36^{\circ} = \frac{4}{h} \Longrightarrow h = 5,505527681\, m$$

$$S = \frac{p\cdot h}{2} = \frac{5\cdot 8\cdot 5,505527681}{2} = 110,1105536\, m^2$$

donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 316 Cristina y Desiré se encuentran en una llanura separadas por una distancia de $5Km$ en una excursión del colegio. Se llaman por el teléfono móvil porque acaban de observar un OVNI que vuela en la dirección que las separa. Cristina lo ve con un ángulo de 80º, mientras que Desiré lo ve con un ángulo de 60º. El profesor de matemáticas, que observa a sus alumnas, aprovecha la oportunidad para preguntarlas por la altura a la vuela ese objeto. (Un poco pesado,¿no?)

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 80^{o} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 60^{o} = \frac{h}{5000-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1169,777784\,m \\ \\ h = 6634,139481\,m \end{array}\right.$$

Problema 317 Calcular el área de un Decágono regular de $6m$ de lado.

Solución:

$\dfrac{360^{o}}{10} = 36^{o} \Longrightarrow \tan 18^{o} = \dfrac{3}{h} \Longrightarrow h = 9,233050611\,m$

$S = \dfrac{p \cdot h}{2} = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 9,233050611}{2} = 276,9915183\,m^2$

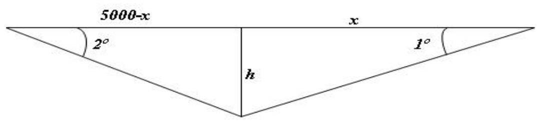
donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 318 Como Luís Alberto no paraba de hablar con Christian Fenández los metimos en un submarino que iba a estar trabajando una semana en el fondo del mar. (¡Que broma!). El submarino se sumergió con un ángulo de 1º, y después emergió con un ángulo de 2º a $5Km$ de donde se empezó a sumergir. Todo ello en camino rectilíneo y con los ángulos medidos sobre la horizontal. Calcular la profundidad a la que estubo trabajando el submarino con nuestros dos amigos.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 1^{o} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 2^{o} = \frac{h}{5000-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3333,671900\,m \\ \\ h = 58,18945946\,m \end{array}\right.$$

www.musat.net



Problema 319 Calcular el área de un Dodecágono regular de $6m$ de lado.

Solución:

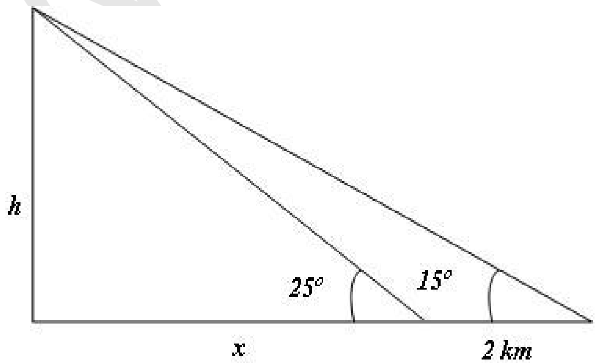
$$\frac{360^o}{12} = 30^o \Longrightarrow \tan 15^o = \frac{3}{h} \Longrightarrow h = 11,19615242\, m$$
$$S = \frac{p \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 11,19615242}{2} = 403,0614871\, m^2$$

donde p es el perímetro y h es la apotema.

Problema 320 Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de 15^o. Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer 10 Km y no sabe si llegará a tierra. Después de recorrer 2 Kms en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de 25^o. En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa, y yo pido que calculéis:

1. La altura del faro.
2. La distancia a la que se encuentra del faro.

Solución:



www.musat.net

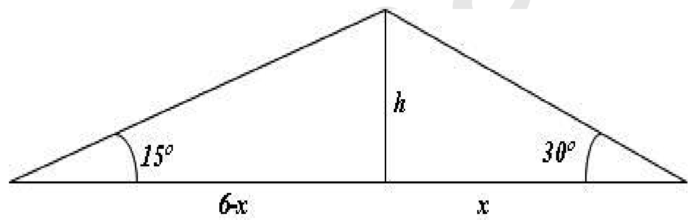
1. Observando la figura nos damos cuenta rápidamente que:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 15^o = \frac{h}{x+2} \\ \\ \tan 25^o = \frac{h}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 0,268 & (x+2) & = h \\ 0,466 & x & = h \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow 0,268(x+2) = 0,466x \Longrightarrow x = 2,71 \;\; h = 1,26$$

2. La distancia que le separa del faro está calculada en el apartado anterior.

Problema 321 Dos personas, separadas por una distancia de $6Km$ observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30^o, mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15^o. Calcular la altura a la que vuela el avión.
Solución:

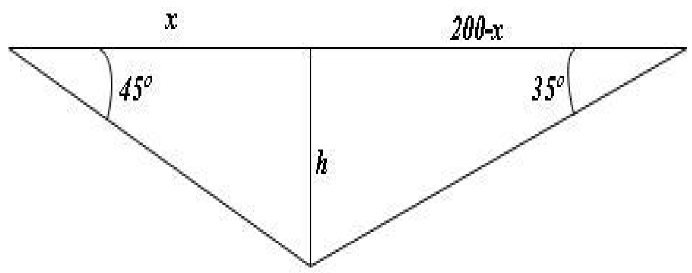


$$\left\{\begin{array}{l} \tan 30^o = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 15^o = \dfrac{h}{6-x} \end{array}\right. \Longrightarrow h = 1,098Km$$

Problema 322 Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de 35^o. Cuando llega al fondo , y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de 45^o. Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado 200 metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estubo trabajando el submarino.

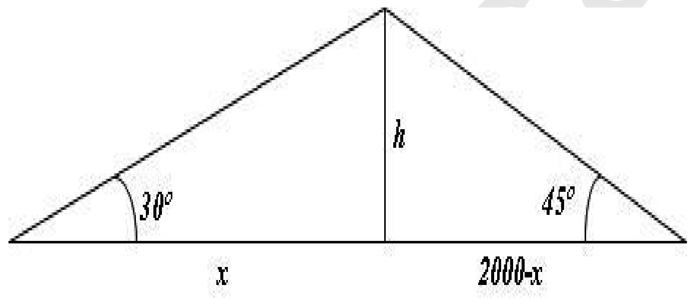
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 35^o = \dfrac{h}{200-x} \\ \\ \tan 45^o = \dfrac{h}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow h = 82,3673m$$



Problema 323 Dos personas separadas por una llanura de $2Km$, observan un globo aerostático con ángulos de 30^o y 45^o respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto.

Solución:

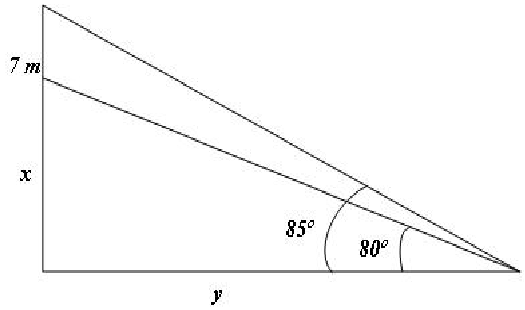


$$\left\{\begin{array}{l} \tan 30^o = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 45^o = \dfrac{h}{2000-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h = 732,0508074m \\ \\ x = 1267,949192m \end{array}\right.$$

La solución pedida es que el globo vuela a una altura de $732,0508074m$.

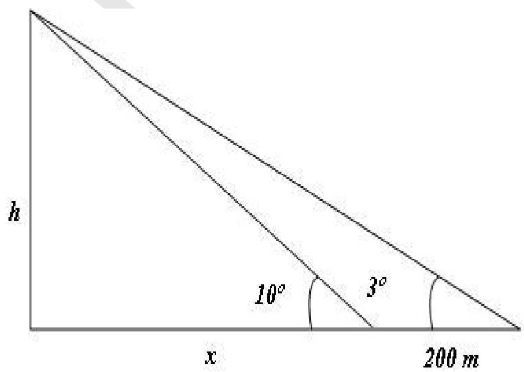
Problema 324 Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. Observas el extremo superior de la antena con un ángulo de 85^o, mientras que su base la observamos con 80^o. Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 85^o = \frac{x+7}{y} \\ \tan 80^o = \frac{x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6,89 \\ y = 1,21 \end{array}\right.$$



Problema 325 Después de un viaje a Ávila con el colegio, Lorena se encuentra sorprendida por las leyendas que la contaron sobre las murallas de la ciudad. El profesor de matemáticas la plantea una cuestión, ¿unos hipotéticos enemigos de esa ciudad de qué tamaño harían las escaleras para saltar las murallas?, ¿cómo podrían saber estas medidas sin llegar a la ciudad?. Todo pasa por contestar a este problema: un guerrero observa la parte alta de la muralla con un ángulo de 3º y después se acerca 200 m y ahora ve ese mismo punto con un ángulo de 10º. En este momento, el guerrero no sólo sabe la altura de la muralla, sino que también sabe la distancia que le separa de ella. Lorena ha decidido que esta es una buena pregunta para que todos la resolváis en este examen.

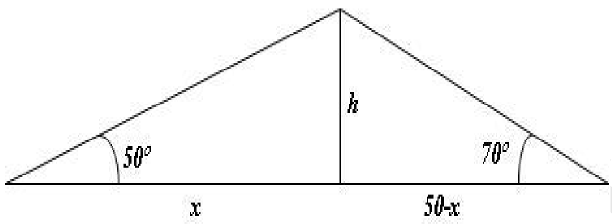
Solución:



$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 10^{\text{o}} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 3^{\text{o}} = \frac{h}{x+200} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = 14,76\, m \\ \\ x = 83,87\, m \end{array} \right.$$

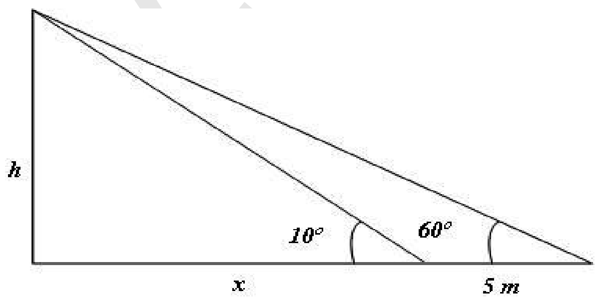
Problema 326 Laura y Sandra se encuentran en un circo, debajo de una

cuerda en la que un equilibrista se juega la vida con la mayor de las indiferencias, cada una de ellas se encuentra en un extremo de la cuerda y son 50 metros la distancia que las separa. Laura observa al acróbata con un ángulo de 50º, mientras que Sandra lo ve con un ángulo de 70º. Se pide calcular la altura a la que se encuentra el artista y que distancias de cuerda le separan de los extremos.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 50^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 70^{\circ} = \frac{h}{50-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 34,86\,m \\ \\ h = 41,48\,m \end{array}\right.$$

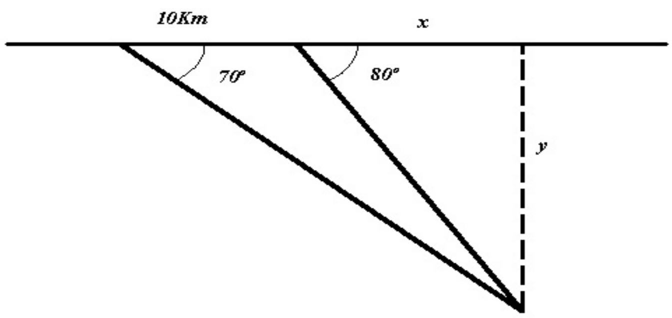
Problema 327 En unos lanzamientos a canasta Miguel Ángel se acuerda de las clases de trigonometría y piensa. Primero observa la canasta con un ángulo de 80º y retrocediendo 5 m la observa con un ángulo de 60º. Ahora tiene que calcular la altura a la que se encuentra la canasta y la distacia a la que se encuentra la base de esa canasta.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 80^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 60^{\circ} = \frac{h}{x+5} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2,195\,m \\ \\ d = 12,44\,m \end{array}\right.$$

Problema 328 Sheila y Javier viajaban en un avión con sus compañeros, en un viaje de fin de curso a la ciudad de Roma. En este viaje divisaron la isla de Ibiza con un ángulo de 70º con la horizontal del avión. En este momento le preguntaron a la azafata por la distancia que debía de recorrer el avión para encontrarse encima de la isla, ella contestó que en el tiempo que habían estado hablando el avión había recorrido 10 Km, volvieron a mirar y se dieron cuenta que ahora se veía la isla con un ángulo de 80º. Se lo contáis al profesor de mates, y como es un poco pesado no se le ocurre otra cosa que preguntaros por la altura a la que vuela el avión y la distancia que nos queda por recorrer para estar encima de la isla.

Solución:

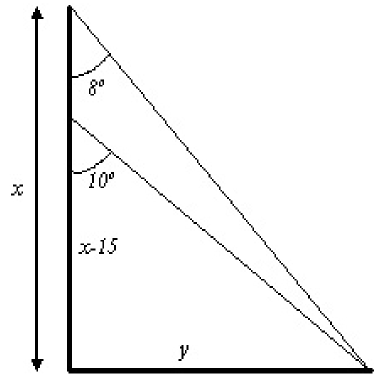


$$\left\{\begin{array}{l} \tan 80^{o} = \frac{y}{x} \\ \\ \tan 70^{o} = \frac{y}{10+x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 9,396926207\,\text{Km} \\ \\ h = 53,29261676\,\text{Km} \end{array}\right.$$

Problema 329 Diego se encuentra en la cima del pico de los Claveles (Peñalara) y desde allí observa la Laguna de los Pájaros con un ángulo de 8º con la vertical. El espectáculo es muy bonito, pero tiene que concentrarse, debe de hacer un descenso de 30 metros por la pared de roca (un rapel) hasta un pequeño saliente. Cuando llegó allí veía la laguna con un ángulo de 10º. Pero eso de hacer alpinismo con el profesor de mates no es de lo más divertido, ya que no se le ocurrió otra cosa que preguntarle por la altura de la pared y por la distancia que separaba a ésta de la laguna.

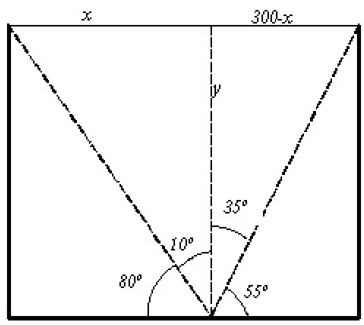
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 8^{o} = \frac{h}{x} \\ \\ \tan 10^{o} = \frac{h}{x-30} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 147,8172424\,m \\ \\ y = 20,77435863\,m \end{array}\right.$$



Problema 330 A nuestro compañero Enrique le encanta el equilibrismo y a decidido jugarse la vida cruzando, sobre una cuerda, el desfiladero de "La Hermida", por un lugar en el que la separación entre las paredes de roca es de 300 metros. Nosotros nos encontramos en el fondo del desfiladero y vemos un extremo de la cuerda con un ángulo de 55º, mientras que el otro extremo lo observamos con un ángulo de 80º(cuidado los águlos medidos sobre la horizontal). No podía faltar la pregunta del profe de mates para preguntarnos por la altura a la que está la cuerda y por la distancia que nos separa de alguna de las paredes. (¡Que pesado!). El desfiladero de "La Hermida"se encuentra en Cantabria; por él fluye el río Deva, uniendo los pueblos de Panes y Potes. Hace de frontera natural con Asturias, y no me equivoco al afirmar que es uno de los parajes más bellos de España.

Solución:



www.musat.net

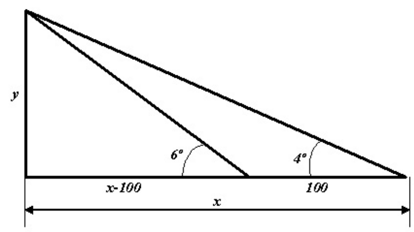
$$\left\{\begin{array}{l}\tan 10^{\circ}=\frac{x}{y}\\ \\ \tan 35^{\circ}=\frac{300-x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=60,34912838\,m\\ \\ h=342,2569146\,m\end{array}\right.$$

Problema 331 Juan José se encontraba ante las murallas y almenas de un castillo medieval con unos antiguos compañeros del colegio Villaeuropa. Recordando viejos tiempos de estudio, apareció el recuerdo del profesor de matemáticas con la pesadez de sus problemas:

Juan José podía ver el extremo superior de una de las almenas, donde ondeaba una bandera, con un ángulo de 4°, mientras que al acercarse a ella 100 m en línea recta ese mismo punto lo veía con un ángulo de 6°.

Calcular la altura de la almena y la distancia que hay desde el grupo hasta ella.

Solución:



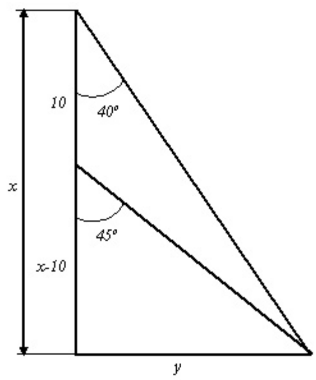
$$\left\{\begin{array}{l}\tan 4^{\circ}=\frac{y}{x}\\ \\ \tan 6^{\circ}=\frac{y}{x-100}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=300\,\mathrm{m}\\ \\ y=21\,\mathrm{m}\end{array}\right.$$

Problema 332 Tomás es un detective con fama nacional. Se encuentra investigando un robo cometido en el último piso de un edificio. Su sorpresa fue enorme al reconocer que el testigo era Laura, su antigua compañera de colegio. Según la declaración de Laura, el ladrón salió por la ventana, trepó por la fachada y subió hasta el punto más alto y desde allí se lanzó en parapente. Laura dejó claro el lugar desde donde observó el suceso. La policía empezó a tomar medidas desde la ventana por donde salió el ladrón, resultó que el ángulo que se forma entre la ventana y el punto en el que estaba Laura era de 45° sobre la vertical, mientras que el formado desde el punto más alto y el lugar de observación de Laura era de 40°, también sobre la vertical del edificio. El ladrón tuvo que trepar 10 metros por el exterior para alcanzar el extremo desde donde Laura dijo que se había lanzado.

Tomás sabe perfectamente que, para poder lanzarse en parapente tiene que haber una altura mínima de 70 m. Observó detenidamente el edificio, y recordando las clases de trigonometría, se puso a hacer cálculos.

Calcular la altura del edificio y la distancia hasta él desde donde Laura vio el suceso.

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 40^{o} = \frac{y}{x} \\ \\ \tan 45^{o} = \frac{y}{x-10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 62,111\,\mathrm{m} \\ \\ y = 52,111\,\mathrm{m} \end{array}\right.$$

Laura está mintiendo.

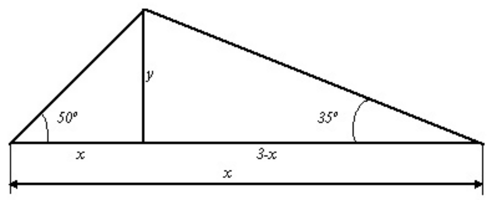
Problema 333 Adrián y Esteban se encuentran, con sus equipos de radio aficionado, en una noche muy oscura y cada uno en su coche, participando en el célebre juego de "La cacería del zorro". Se trata de localizar y capturar a otro coche que emite una señal por una frecuencia determinada (sería el zorro) y un montón de amigos se disponen a la caza, siempre guardando el mayor respeto tanto a las normas de tráfico como a las de medio ambiente. El zorro se mueve por carreteras, caminos, se para, retrocede,... En un cierto momento Adrián y Esteban se encuentran en los dos extremos de un camino de un camino rectilíneo, que según el mapa mide 3 Km, y está cruzado por un montón de caminos que inciden en éste de forma vertical. Están recibiendo claramente la señal del zorro y se encuentra entre ambos coches, uno de ellos recibe la señal con un ángulo de 50º, mientras que el otro la recibe con un ángulo de 35º. Para decidirse por que camino deben de entrar, se ponen a hacer sus cálculos.

Calcular la distancia a la que se encuentra el zorro desde el camino y la

www.musat.net

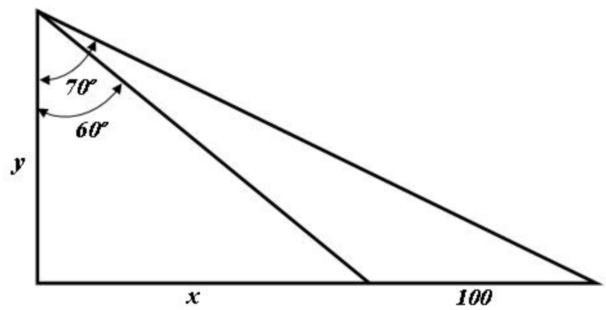
distancia que deben recorrer los dos amigos para coger el camino que de manera infalible los llevaría hasta el zorro.

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 35^{\text{o}} = \frac{y}{3-x} \\ \\ \tan 50^{\text{o}} = \frac{y}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1,1\,\text{Km} \\ \\ y = 1,323\,\text{Km} \end{array}\right.$$

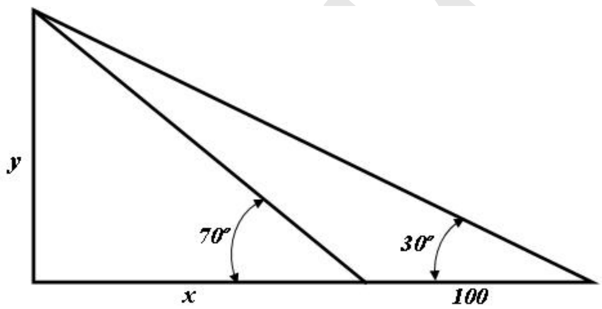
Problema 334 Gemma, María, Alba, Mónica, Cintia, Cristina y Nerea están pasando unas merecidas vacaciones en la costa asturiana. Se encontraban en un pequeño pueblo llamado Poó de LLanes, donde se acercaron a disfrutar de los bellos acantilados de su costa, el paisaje era impresionante. Desde un prodo verde esmeralda podían disfrutar del panorama de un mar rabioso y enfurecido. Luchando contra las olas había un pequeño barco pesquero que se afanaba por llegar a la costa en dirección hacia ellas; lo veían con un ángulo de 70º. Se quedaron ensimismadas observando las manibras y el lento avance durante un rato y ahora lo vieron con un ángulo de 60º (ángulos medidos sobre la vertical del acantilado). María, buena conocedora de aquel lugar y tomando como referencia los islotes, dijo a sus amigas que el barco había avanzado 100 metros entre las dos medidas angulares.
Gemma preguntó a sus amigas: ¿qué altura tendrá el acantilado? ¿qué distancia le queda por recorrer al barco para llegar hasta la base del acantilado?
Solución:



www.musat.net

$$\left\{\begin{array}{l}\tan 70^o = \frac{x+100}{y}\\ \\ \tan 60^o = \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 170,57\,\mathrm{m}\\ \\ y = 98,48\,\mathrm{m}\end{array}\right.$$

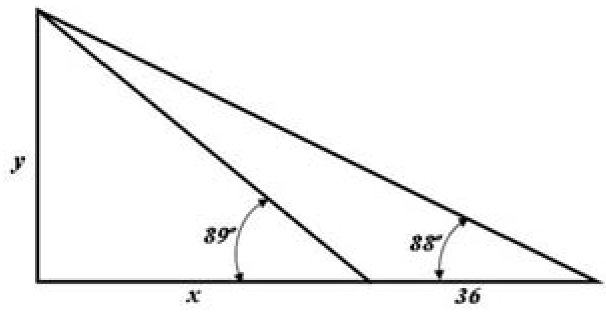
Problema 335 Luís, Darío, Carlos, Alejandro, Gwydion y Rubén se decidieron por el estudio de arqueología (¿se habrían visto todas las películas de Indiana Jones?). No les fué nada mal, por casualidad hicieron un gran descubrimiento. En el desiherto, muy cerca del Nilo, después de una gran tormenta de arena, quedo al descubierto una gran pirámide, hasta entonces desconocida con una enorme esfingie que custodiaba la puerta de entrada a ella. Según contaba la leyenda esta esfinge era la guardiana de los grandes tesoros que había en la pirámide y mataba a todo aquel que se acercaba a menos de 50 metros de ella. Vieron el extremo superior de esta estatua con un ángulo de 30º y después de aproximarse a ella 100 metros con un ángulo de 70º. Gwydion alarmó a los compañeros, recordando las clases de matemáticas de 4º ESO y les dijo que había que reflexionar, seguro que aquel pesado profesor les preguntaría por la altura de esfinge y, sobre todo, si estaban seguros en ese momento.
(Nota: la Esfinge era un monstruo con rostro y pecho de mujer, patas y cola de león, y alas de pájaro).
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\tan 30^o = \frac{y}{x+100}\\ \\ \tan 70^o = \frac{y}{x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 26,60\,\mathrm{m}\\ \\ y = 73,95\,\mathrm{m}\end{array}\right.$$

Problema 336 Laura, Verónica, Virginia, Tania, Andrés, Borja, Iván y Manuel, se encuentran en un pueblo de la Costa del Sol llamado Torrox dándose un fenomenal baño en el mar. Miraban extrañadas la cantidad de montañas que parecían crecer a la orilla del mar formando La Axarquía. Por encima de estos macizos montañosos se veía un pico con nieve, que contrastaba curiosamente con la buena temperatura que hacía en la playa; estaban viendo "El Maroma " con un ángulo de 88º. Por la tarde decidieron recorrer en coche 36 kilómetros en dirección rectilínea hacia la base de esa montaña, y ahora veían el pico con un ángulo de 89º. Laura, recordando las

clases de matemáticas de 4º ESO y aquel pesado profesor, seguro que les preguntaría por la altura del pico y, por la distacia que les separaba.
(Nota: Torrox es la cuna de Almanzor).
Solución:



$$\begin{cases} \tan 88^o = \frac{y}{x+36} \\ \\ \tan 89^o = \frac{y}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 35,95\,\text{Km} \\ \\ y = 2,059\,\text{Km} \end{cases}$$

Problema 337 Roberto, Guillermo, Ismael, Pedro, David, Victor, Carlos, Gabriel e Israel se encuentran muy preocupados por el examen de trigonometría y, ante el posible fracaso, se deciden por robarlo. Saben que ese examen con sus soluciones se encuentra en el domicilio del profesor, les bastará una cuerda para descolgarse mediante un "rápel" desde lo más alto del edificio. En la calle se queda Israel para avisar de una inesperada llegada del profesor.

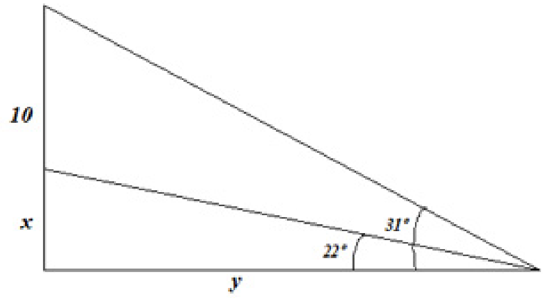
La maniobra hubiera sido éxito, pero toda la maniobra fué observada en la lejanía y el profesor dejó que se produjera el robo del examen.

Cuando se marcharon contentos por el éxito obtenido, el profesor se situó en el punto en el que Israel vigilaba atentamente. Desde este punto se veía el tejado del edificio bajo un ángulo de 31º y la terraza por la que entraron con otro de 22º. La altura que se descolgaron era de 10 metros

La pregunta del examen había cambiado, ahora les preguntan por la altura a la que se encuentra la terraza de la vivienda del profesor y por la distancia a la que se encontraba Israel de la base de ese edificio.

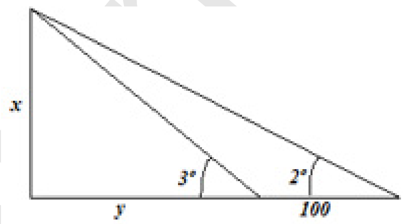
Solución:

$$\begin{cases} \tan 31^o = \frac{x+10}{y} \\ \\ \tan 22^o = \frac{x}{y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 20,526\,\text{m} \\ \\ y = 50,804\,\text{m} \end{cases}$$



Problema 338 Laura, María, Andrea, Adriana, Emma, Leticia, Inés, Shara y Natalia se encuentran caminando por el desierto y sus fuerzas han llegado al límite. La deshidratación y el cansancio las nubla el pensamiento y sus cerebros comienzan a jugar con visiones y espejismos. En un momento dado se quedan paradas, ante ellas pueden ver un oasis con un una palmera y un laguna de frescas aguas. Las parece mentira y piensan que es un espejismo. Laura se acuerda del profesor de matemáticas de 4°ESO y comienza a hacer mediciones mentales. Se ve la altura de la palmera bajo un ángulo de 2° y cuando se aproximaron 100 metros hacia ella con un ángulo de 3°.
¿Qué altura tiene la palmera?
¿A qué distancia se encuentran de ella?
¿Será un espejismo?

Solución:



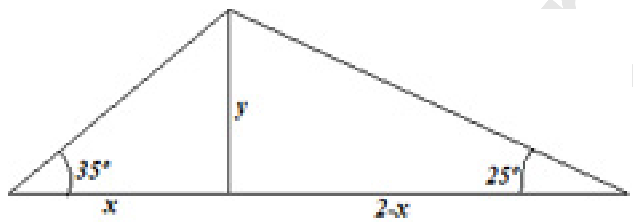
$$\left\{\begin{array}{l} \tan 2^{o} = \frac{x}{y+100} \\ \\ \tan 3^{o} = \frac{x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10,466\,\mathrm{m} \\ \\ y = 199,695\,\mathrm{m} \end{array}\right.$$

Problema 339 Rubén, Pedro, Alejandro, Adrián, Rosty, Andrés, Fernando y Pablo se encuentran en una excursión de 4°ESO por Aranjuez y resulta que en las afueras de esta ciudad se oferta un viaje en globo bastante bonito. En realidad recorre una distancia muy corta a lo largo de una llanura. En uno de los extremos se encuentran Rubén, Pedro y Alejandro mientras que en el contrario Andrés, Fernando y Pablo. El globo viaja del primer grupo hasta el segundo en línea recta por el aire. Los tres primeros ven un globo

www.musat.net

con un ángulo de 35º y los otros tres compañeros lo ven con un ángulo de 25º. Estos dos grupitos se encuentran separados por una distancia de 2 Km. En el momento de la observación el globo comenzó a descender verticalmente aunque despacio, las caras de Alejandro, Adrián y Rosty que iban en él eran auténticos poemas, hasta que llego al suelo mansamente.
El profesor de matemáticas les pidió calcular la altura a la que viajaba el globo y la distancia a la que se encuentraba el globo cuando se posó en el suelo.

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 35^o = \frac{y}{x} \\ \\ \tan 25^o = \frac{y}{2-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 799,4\,\text{m} \\ \\ y = 559,8\,\text{m} \end{array}\right.$$

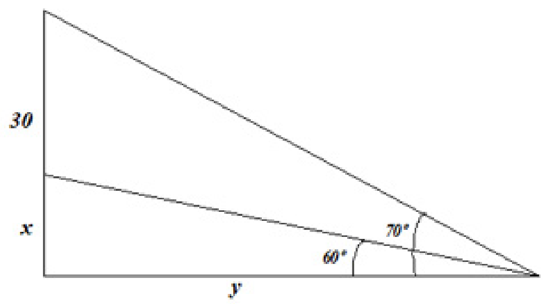
Problema 340 Sara, Gema, Gloria, Marta, Julia, y Patricia están de excursión por las cumbres de Cotos. Casi sin esfuerzo llegaron a un punto en el que se quedaron sorprendidas por la espectacular vista de la Laguna, en la base del pico de Dos Hermanas, un macizo de roca casi vertical que descansa en las orillas del glaciar. En estos momentos nos encontramos a la misma altura que la Laguna y se veía la cumbre con un ángulo de 50º. Se quedaron boquiabiertas al ver a dos montañeros, que luchaban por alcanzar la cumbre, con un ángulo de 40º. El profesor de matemáticas las dijo que aún deberían escalar 30 metros para conquistar ese coloso de piedra y las pidió que calcularan:

1. La distancia a la que se encontraban de la Laguna.
2. La altura de ese pico desde la Laguna.

Solución:

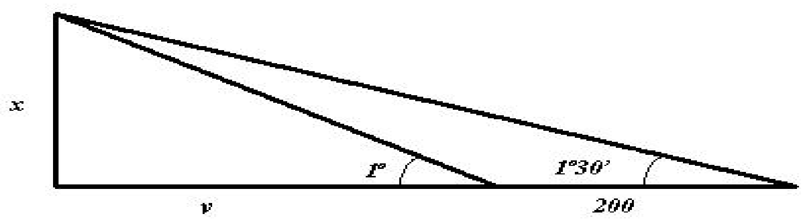
$$\left\{\begin{array}{l} \tan 50^o = \frac{x+30}{y} \\ \\ \tan 40^o = \frac{x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 71,381\,\text{m} \\ \\ y = 85,07\,\text{m} \end{array}\right.$$

Problema 341 Carolina, Noelia, Sergio, Julen, Andrea,Laura e Irene son tripulantes de un buque cargero que se encuentra en una situación muy delicada. Los modernos aparatos de medida han dejado de funcionar por el



impacto de un rayo y, hay que recurrir a otros métodos de cálculo para dirigir el barco. El problema que se plantea es parecido al que sufrió el TITANIC: un iceberg se les acerca suspedido en el agua, su extremo superior se nos muestra bajo un ángulo de 1º, después de acercarnos 200 metros hacia él observamos ese mismo punto con un ángulo de 1º30'. Calcular la altura del iceberg y la distancia que nos separa de él.

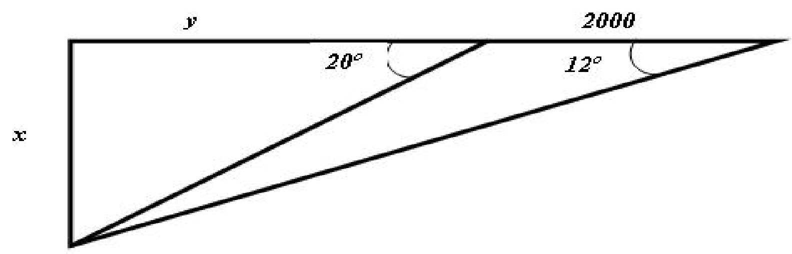
Por curiosidad, sabemos que de un iceberg sólo se muestra el 10 % y que la capacidad de frenado y virage de nuestro navío es de 500 metros, ¿estarán nuestros amigos en peligro?.
Solución:



$$\begin{cases} \tan 1^o = \frac{x}{y+100} \\ \\ \tan 1^o30' = \frac{x}{y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10,47\,\text{m} \\ \\ y = 399,848\,\text{m} \end{cases}$$

Problema 342 Paula, Daniel, Rodrigo, Lorena, Luis Fernando y Alejandro se encuentran en un barco que se dedica a rescatar tesoros de antiguos galeones hundidos. En este caso han detectado un viejo transatlántico que, por su situación, podría ser el TITANIC. Primero lo detectan con un ángulo

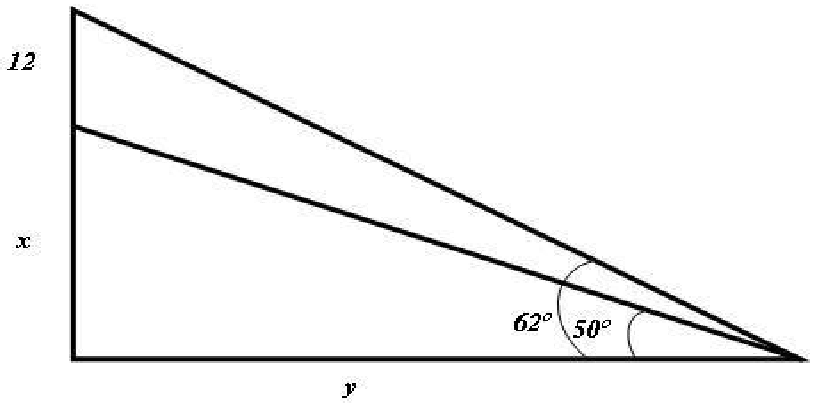
de 12º y cuando se acercaron 2000 metros con un ángulo de 20º. Se pide calcular la profundidad a la que se encuentra el barco hundido y la distancia que nos queda por recorrer para estar encima de él. ¿Será posible acceder al barco hundido?
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\tan 12^{o} = \frac{x}{y+2000}\\ \\ \tan 20^{o} = \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1021\,\mathrm{m}\\ \\ y = 2807\,\mathrm{m}\end{array}\right.$$

Problema 343 Sergio, Nerea, Carlos, Rosa Mª, Elena, Iván y MªElvira se encuentran en una excursión por Galicia y residían en el pazo "Las Meigas". El lugar estaba plagado de extrañas leyendas y cuentos, desplegando por esos paisajes y haciendas una caricia de exoterismo y magia. El dueño de la casa rural animó el espectaculo contándonos alguna terroríficas historías de la comarca. Nos contó que se encontraba en la copa del árbol de enfrente de la puerta de la casa, cuando salieron dos jovenes discutiendo con el trágico desenlace de un asesinato; él intentó bajar lo más rápidamente posible, pero cuenado llevaba descendidos 12 metros se cayo al vacio. Se levanto de inmediato y corrió para auxiliar al herido, ya era demasiado tarde. Mientras tanto el asesino huyo despavorido y no pudo reconocerlo. La Policia recogió los siguientes datos: Desde el lugar donde ocurrió la tragedia se veía la copa del árbol con un ángulo de 62º y, la rama desde la que presumiblemente cayo nuestro interlocutor con un ángulo de 50º.

Calcular la altura desde la que se precipitó al suelo nuestro narrador y la distancia que tuvo que recorrer para llegar hasta el herido. ¿Que conclusión sacáis de los resultados?.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\tan 62^{\circ} = \frac{x+12}{y} \\ \\ \tan 50^{\circ} = \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 20,757\,\mathrm{m} \\ \\ y = 17,417\,\mathrm{m}\end{array}\right.$$

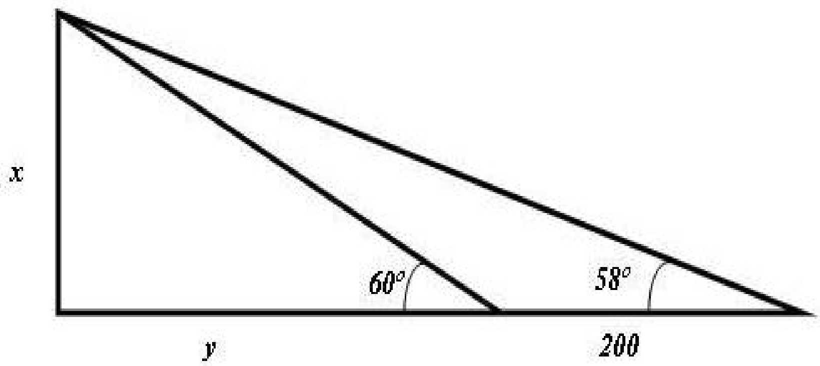
Nuestro interlocutor miente es posiblemente el asesino.

Problema 344 Julio Alberto, Roberto, Javier y Marta nos vienen contando una bonita historia de aventuras. Han estado haciendo barranquismo y hacen grandes alardes de valor personal en la lucha contra implacables elementos naturales. En particular nos contaron que se habían lanzado en tirolina por encima de árboles y barrancos. Después de preguntarles a fondo sobre este suceso sacamos las siguientes medidas. Desde abajo se veía el principio de la tirolina con un ángulo de 60° y retrocediendo 200 metros desde ese punto se volvía a ver el principio de la tirolina con un ángulo de 58°.

Calcular la altura de la tirolina y la distancia que les separa hasta la base en la que se alza. ¿Nos están contando una trola o podemos creerlos?
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}\tan 60^{\circ} = \frac{x}{y-200} \\ \\ \tan 58^{\circ} = \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4208,84\,\mathrm{m} \\ \\ y = 2629,97\,\mathrm{m}\end{array}\right.$$

No es posible creerlos.



2.2. Vectores

2.2.1. Operciones con Vectores

Problema 345 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (1, -1)$, $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (2, 1)$
Solución:
$$\overrightarrow{z} = 3(1, -1) - (-3, 2) + 2(2, 1) = (10, -3)$$

Problema 346 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (-1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (2, 1)$
Solución:
$$\overrightarrow{z} = 3(-1, 1) - (-3, 2) + 2(2, 1) = (4, 3)$$

Problema 347 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 4\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (-1, 3)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (1, 4)$
Solución:
$$\overrightarrow{z} = 4(-1, 3) - 2(2, 1) + (1, 4) = (-7, 14)$$

Problema 348 *(1 puntos)* Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 4\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (1, 3)$, $\overrightarrow{v} = (5, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (-2, 4)$
Solución:
$$\overrightarrow{z} = 4(1, 3) - 2(5, 1) + (-2, 4) = (-8, 14)$$

Problema 349 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (3, -1)$
Solución:
$$\overrightarrow{z} = 2(3, 1) - (-1, 2) + 3(3, -1) = (16, -3)$$

Problema 350 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (3, -2)$, $\overrightarrow{v} = (1, -3)$ y $\overrightarrow{w} = (1, -2)$
Solución:
$$\overrightarrow{z} = 2(3, -2) + 3(1, -3) - (1, -2) = (8, -11)$$

www.musat.net

Problema 351 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (3, -1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{w} = (1, 2)$
Solución:

$$\overrightarrow{z} = 2(3, -1) + 3(-1, 3) - (1, 2) = (2, 5)$$

Problema 352 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (-3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, -3)$ y $\overrightarrow{w} = (1, 2)$
Solución:

$$\overrightarrow{z} = 2(-3, 1) + 3(1, 3) - (1, 2) = (-4, -9)$$

Problema 353 Calcular el vector $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{u} = (4, -1)$, $\overrightarrow{v} = (1, -3)$ y $\overrightarrow{w} = (1, 3)$
Solución:

$$\overrightarrow{z} = 2(4, -1) + 3(1, -3) - (1, 3) = (10, -14)$$

2.2.2. Distancia entre dos puntos

Problema 354 Calcular la distancia entre los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, -2)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (5, -2) - (-3, 2) = (8, -4); \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

Problema 355 Calcular la distancia entre los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, -2)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (5, -2) - (3, 2) = (2, -4); \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Problema 356 Calcular la distancia entre los puntos $A(1, 3)$ y $B(4, -7)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -7) - (1, 3) = (3, -10); \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 100} = \sqrt{109}$$

Problema 357 Calcular la distancia entre los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, -6)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -6) - (2, 3) = (2, -9); \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$$

Problema 358 Calcular la distancia entre los puntos $A(1, -3)$ y $B(3, 8)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 8) - (1, -3) = (2, 11); \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 121} = 5\sqrt{5}$$

www.musat.net

2.2.3. División de un segmento

Problema 359 Dividir el segmento que une los puntos $A(1,1)$ y $B(5,9)$ en cuatro partes iguales.
Solución:

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}[(5,9)-(1,1)] = (1,2)$$
$$A_1 = A + (1,2) = (1,1) + (1,2) = (2,3)$$
$$A_2 = A_1 + (1,2) = (2,3) + (1,2) = (3,5)$$
$$A_3 = A_2 + (1,2) = (3,5) + (1,2) = (4,7)$$
$$B = A_3 + (1,2) = (4,7) + (1,2) = (5,9)$$

Problema 360 Dividir el segmento que une los puntos $A(-1,1)$ y $B(7,9)$ en cuatro partes iguales.
Solución:

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}[(7,9)-(-1,1)] = (2,2)$$
$$A_1 = A + (2,2) = (-1,1) + (2,2) = (1,3)$$
$$A_2 = A_1 + (2,2) = (1,3) + (2,2) = (3,5)$$
$$A_3 = A_2 + (2,2) = (3,5) + (2,2) = (5,7)$$
$$B = A_3 + (2,2) = (5,7) + (2,2) = (7,9)$$

Problema 361 Dividir el segmento que une los puntos $A(3,-1)$ y $B(15,7)$ en cuatro partes iguales.
Solución:

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}[(15,7)-(3,-1)] = (3,2)$$
$$A_1 = A + (3,2) = (3,-1) + (3,2) = (6,1)$$
$$A_2 = A_1 + (3,2) = (6,1) + (3,2) = (9,3)$$
$$A_3 = A_2 + (3,2) = (9,3) + (3,2) = (12,5)$$
$$B = A_3 + (3,2) = (12,5) + (3,2) = (15,7)$$

Problema 362 Dividir el segmento que une los puntos $A(-2,3)$ y $B(14,7)$ en cuatro partes iguales.
Solución:

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}[(14,7)-(-2,3)] = (4,1)$$
$$A_1 = A + (4,1) = (-2,3) + (4,1) = (2,4)$$
$$A_2 = A_1 + (4,1) = (2,4) + (4,1) = (6,5)$$
$$A_3 = A_2 + (4,1) = (6,5) + (4,1) = (10,6)$$
$$B = A_3 + (4,1) = (10,6) + (4,1) = (14,7)$$

www.musat.net

Problema 363 Dividir el segmento que une los puntos $A(-1,1)$ y $B(8,22)$ en tres partes iguales.
Solución:
$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}[(8,22)-(-1,1)] = (3,7)$$
$$A_1 = A + (3,7) = (-1,1) + (3,7) = (2,8)$$
$$A_2 = A_1 + (3,7) = (2,8) + (3,7) = (5,15)$$
$$B = A_3 = A_2 + (3,7) = (5,15) + (3,7) = (8,22)$$

Problema 364 Dividir el segmento que une los puntos $A(2,1)$ y $B(11,7)$ en tres partes iguales.
Solución:
$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}[(11,7)-(2,1)] = (3,2)$$
$$A_1 = A + (3,2) = (2,1) + (3,2) = (5,3)$$
$$A_2 = A_1 + (3,2) = (5,3) + (3,2) = (8,5)$$
$$A_3 = A_2 + (3,2) = (8,5) + (3,2) = (11,7)$$

Problema 365 Dividir el segmento que une los puntos $A(-2,-1)$ y $B(13,9)$ en cinco partes iguales.
Solución:
$$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}[(13,9)-(-2,-1)] = (3,2)$$
$$A_1 = A + (3,2) = (-2,-1) + (3,2) = (1,1)$$
$$A_2 = A_1 + (3,2) = (1,1) + (3,2) = (4,3)$$
$$A_3 = A_2 + (3,2) = (4,3) + (3,2) = (7,5)$$
$$A_4 = A_3 + (3,2) = (7,5) + (3,2) = (10,7)$$
$$B = A_4 + (3,2) = (10,7) + (3,2) = (13,9)$$

Problema 366 Dividir el segmento que une los puntos $A(3,2)$ y $B(13,7)$ en cinco partes iguales.
Solución:
$$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}[(13,7)-(3,2)] = (2,1)$$
$$A_1 = A + (2,1) = (3,2) + (2,1) = (5,3)$$
$$A_2 = A_1 + (2,1) = (5,3) + (2,1) = (7,4)$$
$$A_3 = A_2 + (2,1) = (7,4) + (2,1) = (9,5)$$
$$A_4 = A_3 + (2,1) = (9,5) + (2,1) = (11,6)$$
$$B = A_4 + (2,1) = (11,6) + (2,1) = (13,7)$$

www.musat.net

Problema 367 Dividir el segmento que une los puntos $A(1,3)$ y $B(11,18)$ en cinco partes iguales.
Solución:

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}[(11,18)-(1,3)] = (2,3)$$

$$A_1 = A + (2,3) = (1,3) + (2,3) = (3,6)$$

$$A_2 = A_1 + (2,3) = (3,6) + (2,3) = (5,9)$$

$$A_3 = A_2 + (2,3) = (5,9) + (2,3) = (7,12)$$

$$A_4 = A_3 + (2,3) = (7,12) + (2,3) = (9,15)$$

$$B = A_4 + (2,3) = (9,15) + (2,3) = (11,18)$$

Problema 368 Dividir el segmento que une los puntos $A(1,3)$ y $B(21,18)$ en cinco partes iguales.
Solución:

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}[(21,18)-(1,3)] = (4,3)$$

$$A_1 = A + (4,3) = (1,3) + (4,3) = (5,6)$$

$$A_2 = A_1 + (4,3) = (5,6) + (4,3) = (9,9)$$

$$A_3 = A_2 + (4,3) = (9,9) + (4,3) = (13,12)$$

$$A_4 = A_3 + (4,3) = (13,12) + (4,3) = (17,15)$$

$$B = A_4 + (4,3) = (17,15) + (4,3) = (21,18)$$

2.2.4. Punto medio y simétrico

Problema 369 Encontrar el punto simétrico B de $A(1,-1)$ respecto del punto $M(2,3)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+x}{2} = 2 \Longrightarrow x = 3 \\ \\ \dfrac{-1+y}{2} = 3 \Longrightarrow y = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow (3,7)$$

Problema 370 Encontrar el punto simétrico B de $A(1,-1)$ respecto del punto $M(-2,3)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+x}{2} = -2 \Longrightarrow x = -5 \\ \\ \dfrac{-1+y}{2} = 3 \Longrightarrow y = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow (-5,7)$$

www.musat.net

Problema 371 Encontrar el punto simétrico B de $A(-2,3)$ respecto del punto $M(3,-4)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-2+x}{2} = 3 \Longrightarrow x = 8 \\ \\ \dfrac{3+y}{2} = -4 \Longrightarrow y = -11 \end{array}\right\} \Longrightarrow (8,-11)$$

Problema 372 Encontrar el punto simétrico B de $A(3,-1)$ respecto del punto $M(-3,5)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = -3 \Longrightarrow x = -9 \\ \\ \dfrac{-1+y}{2} = 5 \Longrightarrow y = 11 \end{array}\right\} \Longrightarrow (-9,11)$$

Problema 373 Encontrar el punto simétrico B de $A(-3,1)$ respecto del punto $M(1,0)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-3+x}{2} = 1 \Longrightarrow x = 5 \\ \\ \dfrac{1+y}{2} = 0 \Longrightarrow y = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (5,-1)$$

Problema 374 Encontrar el punto simétrico B de $A(3,1)$ respecto del punto $M(1,0)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = 1 \Longrightarrow x = -1 \\ \\ \dfrac{1+y}{2} = 0 \Longrightarrow y = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (-1,-1)$$

Problema 375 Encontrar el punto simétrico B de $A(3,-1)$ respecto del punto $M(1,0)$
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = 1 \Longrightarrow x = -1 \\ \\ \dfrac{-1+y}{2} = 0 \Longrightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (-1,1)$$

Problema 376 Encontrar el punto simétrico B de $A(5,-1)$ respecto del punto $M(1,0)$

www.musat.net

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{5+x}{2}=1\Longrightarrow x=-3\\[2ex]\dfrac{-1+y}{2}=0\Longrightarrow y=1\end{array}\right\}\Longrightarrow(-3,1)$$

2.2.5. Ángulo entre dos vectores

Problema 377 Calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2)$ y $\overrightarrow{v}=(3,-1)$.
Solución:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cos\alpha$$

$$3-2=\sqrt{5}\sqrt{10}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}}\Longrightarrow\alpha=81^{\circ}52'12''$$

Problema 378 Calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2)$ y $\overrightarrow{v}=(3,1)$.
Solución:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cos\alpha$$

$$3+2=\sqrt{5}\sqrt{10}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{50}}\Longrightarrow\alpha=45^{\circ}$$

Problema 379 Calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u}=(1,3)$ y $\overrightarrow{v}=(5,1)$.
Solución:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cos\alpha$$

$$5+3=\sqrt{10}\sqrt{26}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{260}}\Longrightarrow\alpha=60^{\circ}15'18''$$

Problema 380 Calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u}=(-2,3)$ y $\overrightarrow{v}=(3,1)$.
Solución:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cos\alpha$$

$$-6+3=\sqrt{13}\sqrt{10}\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{130}}\Longrightarrow\alpha=105^{\circ}15'18''$$

2.2.6. Varios

Problema 381 Sean $A(-2,1)$, $B(3,-1)$ y $C(5,8)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Solución:

$$D=A+\overrightarrow{BC}=(-2,1)+[(5,8)-(3,-1)]=(0,10)$$

www.musat.net

$$M\left(\frac{-2+5}{2},\frac{1+8}{2}\right)=M\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$$

Problema 382 Sean $A(-1,1)$, $B(2,-1)$ y $C(5,8)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Solución:

$$C=A+\overrightarrow{BC}=(-1,1)+[(5,8)-(2,-1)]=(2,10)$$

$$M\left(\frac{-1+5}{2},\frac{1+8}{2}\right)=M\left(2,\frac{9}{2}\right)$$

Problema 383 Sean $A(-3,1)$, $B(3,-2)$ y $C(5,8)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Solución:

$$D=A+\overrightarrow{BC}=(-3,1)+[(5,8)-(3,-2)]=(-1,11)$$

$$M\left(\frac{-3+5}{2},\frac{1+8}{2}\right)=M\left(1,\frac{9}{2}\right)$$

Problema 384 Sean $A(-3,1)$, $B(3,-1)$ y $C(5,7)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Solución:

$$D=A+\overrightarrow{BC}=(-3,1)+[(5,7)-(3,-1)]=(-1,9)$$

$$M\left(\frac{-3+5}{2},\frac{1+7}{2}\right)=M\left(1,4\right)$$

Problema 385 Dado el vector $\overrightarrow{u}=(-1,4)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.
Solución:

$$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{17}\Longrightarrow\overrightarrow{v}=\left(\frac{-3}{\sqrt{17}},\frac{12}{\sqrt{17}}\right)$$

Problema 386 Dado el vector $\overrightarrow{u}=(3,1)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.
Solución:

$$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{10}\Longrightarrow\overrightarrow{v}=\left(\frac{9}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Problema 387 Dado el vector $\overrightarrow{u}=(2,-1)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.
Solución:

$$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{5}\Longrightarrow\overrightarrow{v}=\left(\frac{6}{\sqrt{5}},\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)$$

www.musat.net

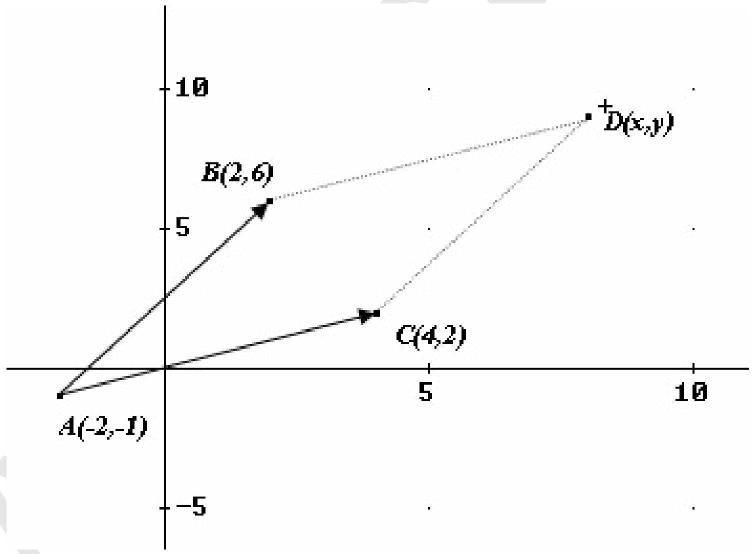
Problema 388 Dado el vector $\overrightarrow{u} = (3, -1)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.
Solución:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{10} \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

Problema 389 Dados los puntos $A(-2, -1)$, $B(2, 6)$ y $C(4, 2)$, se pide:

1. Encontrar un punto D de manera que estos cuatro puntos formen un paralelogramo y encontrar su centro.
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Encontrar todos los vectores perpendiculares al vector $\overrightarrow{AB}$ que tengan módulo 8.

Solución:



Al no especificar el problema si estos vértices están consecutivos hay varias soluciones posibles, yo voy a pensar que no lo están y encontraré una solución.

1. $\overrightarrow{AC} = (4, 2) - (-2, -1) = (6, 3)$. Luego

$$D = (2, 6) + (6, 3) = (8, 9)$$

El punto medio sería: (entre B y C)

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = M(3, 4)$$

2. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}\,u$

   Para calcular el otro lado calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2,6)-(-2,-1) = (4,7)$.

   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}\,u$

   Ahora calculamos los ángulos:

   a) Sea α el ángulo con vértice en A:

   $$\overrightarrow{AB} = (4,7);\ \overrightarrow{AC} = (6,3)$$

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 6 + 7\cdot 3 = 45$$

   $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65};\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{45}$$

   $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{45}{\sqrt{45}\sqrt{65}} = 0,83205 \Longrightarrow \alpha = 33^{\text{o}}41'24''$$

   b) Sea β el ángulo con vértice en C:

   $$\overrightarrow{CA} = (-2,-1)-(4,2) = (-6,-3);\ \overrightarrow{CD} = (8,9)-(4,2) = (4,7)$$

   $$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = -6\cdot 4 + (-3)\cdot 7 = -45$$

   $$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC}|\sqrt{45};\ |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{65}$$

   $$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} = \frac{-45}{\sqrt{45}\sqrt{65}} = -0,83205 \Longrightarrow \beta = 146^{\text{o}}18'36''$$

   c) Sea $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (4,7)$ y su módulo $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{65}$. Un vector que tenga módulo uno con la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{u}$ sería:

   $$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{(4,7)}{\sqrt{65}} = \left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right)$$

   Para obtener otro de módulo 8:

   $$\overrightarrow{u_2} = 8\overrightarrow{u_1} = 8\left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right) = \left(\frac{32}{\sqrt{65}}, \frac{56}{\sqrt{65}}\right)$$

   Los dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ que estamos buscando serán:

   $$\overrightarrow{w_1} = \left(-\frac{56}{\sqrt{65}}, \frac{32}{\sqrt{65}}\right),\quad \overrightarrow{w_2} = \left(\frac{56}{\sqrt{65}}, -\frac{32}{\sqrt{65}}\right)$$

www.musat.net

Problema 390 Hallar todos los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$ que tengan módulo 20.

Solución:
Sea $\overrightarrow{v} = (x, y)$ un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$. Lo primero que pensamos es que su producto escalar debe ser cero, es decir, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, como el espacio es ortonormal, nos quedaría que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-3, -4) \cdot (x, y) = -3x - 4y = 0$
Es trivial comprobar que, en esta ecuación, para cada valor que apliquemos a una de las variables obtendríamos otro valor para la otra. Me voy a limitar a las soluciones enteras.
Una solución posible sería $x = 4$ e $y = -3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (4, -3)$.
Otra solución posible sería $x = -4$ e $y = 3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (-4, 3)$
Claro está, que estos vectores así obtenidos deben ser perpendiculares al vector $\overrightarrow{u}$, lo que nos queda es pasarlos a módulo 20. Para ello voy a seguir dos pasos, primero los pasaré a módulo 1 y luego los pasaré a módulo 20.
Para pasar $\overrightarrow{v}$ a módulo 1 aplicamos la siguiente fórmula: $v' = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$
Obtendríamos los siguientes vectores:
$\overrightarrow{v_1'} = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$
$\overrightarrow{v_2'} = (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$
Para pasarlos a módulo 20 lo único que tendremos que hacer es multiplicar por 20: y nos quedaría:
$\overrightarrow{w_1} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (16, -12)$
$\overrightarrow{w_2} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (-16, 12)$

Problema 391 Calcular dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (3, -1)$ que tengan de módulo 8.

Solución:
Dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ serían $\overrightarrow{u_1} = (1, 3)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-1, -3)$. Tenemos $|\overrightarrow{u_1}| = |\overrightarrow{u_2}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

Los vectores $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ \\ \overrightarrow{v_2} = \dfrac{\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2}|} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}, \dfrac{-3}{\sqrt{10}} \right) \end{array} \right.$ son perperpendiculares al dado y tienen de módulo 1. Luego

www.musat.net

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{w_1} = 8\overrightarrow{v_1} = \left(\dfrac{8}{\sqrt{10}}, \dfrac{24}{\sqrt{10}}\right) \\ \\ \overrightarrow{w_2} = 8\overrightarrow{v_2} = \left(\dfrac{-8}{\sqrt{10}}, \dfrac{-24}{\sqrt{10}}\right) \end{array}\right.$$ son vectores perpendiculares al dado y tienen módulo 8.

Problema 392 Sean los puntos $A(1,0)$, $B(3,1)$ y $C(5,7)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D y el centro.
2. Calcular el ángulo que tiene por vértice B.
3. Encontrar los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{AB}$ que tengan módulo 5.

Solución:

1. Calculamos $\overrightarrow{BC} = (5,7)-(3,1) = (2,6) \Longrightarrow D = (1,0)+(2,6) = (3,6)$, el centro será el punto medio entre A y C, es decir, $\left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{0+7}{2}\right) = \left(3, \dfrac{7}{2}\right)$
2. $\overrightarrow{BA} = (2,1)$, $\overrightarrow{BC} = (2,6)$
$$4+6 = \sqrt{5}\sqrt{40}\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{200}} = 0,7 \Longrightarrow \alpha = 45^{\text{o}}$$
3. Tenemos dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{AB} = (2,1)$:
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = \frac{5}{\sqrt{5}}(-1,2) = \left(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right) \\ \overrightarrow{v} = \frac{5}{\sqrt{5}}(1,-2) = \left(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right) \end{array}\right.$$

2.3. Geometría Analítica

2.3.1. Ecuaciones de la Recta

Problema 393 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(-1,5)$
Solución:
$$\overrightarrow{AB} = (-1,5) - (1,3) = (-2,2)$$
Ecuación Vectorial: $(x,y) = (1,3) + \lambda(-2,2)$
Ecuación Paramétrica: $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{array}\right.$

Ecuación Continua: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-3}{2}$
Ecuación General: $x + y - 4 = 0$
Ecuación Explícita: $y = -x + 4$, luego $m = -1$
Ecuación punto pendiente: $y - 3 = -(x - 1)$

Problema 394 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, -5)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -5) - (2, 3) = (2, -8)$$

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (2, 3) + \lambda(2, -8)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - 8\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-8}$
Ecuación General: $4x + y - 11 = 0$
Ecuación Explícita: $y = -4x + 11$, luego $m = -4$
Ecuación punto pendiente: $y - 3 = -4(x - 2)$

Problema 395 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(5, 2)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (5, 2) - (3, -1) = (2, 3)$$

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (3, -1) + \lambda(2, 3)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3}$
Ecuación General: $3x - 2y - 11 = 0$
Ecuación Explícita: $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$, luego $m = -\dfrac{3}{2}$
Ecuación punto pendiente: $y + 1 = \dfrac{3}{2}(x - 3)$

Problema 396 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(4, -3)$
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -3) - (2, 1) = (2, -4)$$

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (2, 1) + \lambda(2, -4)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-4}$
Ecuación General: $2x + y - 5 = 0$
Ecuación Explícita: $y = -2x + 5$, luego $m = -2$
Ecuación punto pendiente: $y - 1 = -2(x - 2)$

www.musat.net

Problema 397 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3,1)$ y $B(4,-1)$
Solución:
$$\overrightarrow{AB} = (4,-1) - (3,1) = (1,-2)$$
Ecuación Vectorial: $(x,y) = (3,1) + \lambda(1,-2)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-2}$
Ecuación General: $2x + y - 7 = 0$
Ecuación Explícita: $y = -2x + 7$, luego $m = -2$
Ecuación punto pendiente: $y - 1 = -2(x-3)$

Problema 398 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(3,-1)$
Solución:
$$\overrightarrow{AB} = (3,-1) - (1,1) = (2,-2)$$
Ecuación Vectorial: $(x,y) = (1,1) + \lambda(2,-2)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-2}$
Ecuación General: $x + y - 4 = 0$
Ecuación Explícita: $y = -x + 4$, luego $m = -1$
Ecuación punto pendiente: $y - 1 = -(x-1)$

Problema 399 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(-1,3)$
Solución:
$$\overrightarrow{AB} = (-1,3) - (1,2) = (-2,1)$$
Ecuación Vectorial: $(x,y) = (1,2) + \lambda(-2,1)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1}$
Ecuación General: $x + 2y - 5 = 0$
Ecuación Explícita: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$, luego $m = -\dfrac{1}{2}$
Ecuación punto pendiente: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x-1)$

Problema 400 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,-1)$
Solución:
$$\overrightarrow{AB} = (3,-1) - (1,2) = (2,-3)$$

www.musat.net

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (1, 2) + \lambda(2, -3)$

Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$

Ecuación Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3}$

Ecuación General: $3x + 2y - 7 = 0$

Ecuación Explícita: $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$, luego $m = -\dfrac{3}{2}$

Ecuación punto pendiente: $y - 2 = -\dfrac{3}{2}(x - 1)$

Problema 401 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abcisas.
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (1, -2) = (2, 5)$$

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (1, -2) + \lambda(2, 5)$

Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \end{cases}$

Ecuación Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{5}$

Ecuación General: $5x - 2y - 9 = 0$

Ecuación Explícita: $y = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{9}{2}$, luego $m = \dfrac{5}{2}$

Ecuación punto pendiente: $y + 2 = \dfrac{5}{2}(x - 1)$ Ángulo: $m = \tan\alpha = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow \alpha = 68^{o}11'55''$

Problema 402 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abcisas.
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (-1, 2) = (4, 1)$$

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (-1, 2) + \lambda(4, 1)$

Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

Ecuación Continua: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{1}$

Ecuación General: $x - 4y + 9 = 0$

Ecuación Explícita: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$, luego $m = \dfrac{1}{4}$

Ecuación punto pendiente: $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x + 1)$ Ángulo: $m = \tan\alpha = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow \alpha = 14^{o}2'11''$

Problema 403 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abcisas.
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (1, -1) = (2, 4)$$

www.musat.net

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (1, -1) + \lambda(2, 4)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{4}$
Ecuación General: $2x - y - 3 = 0$
Ecuación Explícita: $y = 2x - 3$, luego $m = 2$
Ecuación punto pendiente: $y+1 = 2(x-1)$ Ángulo: $m = \tan\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = 63^{o}26'6''$

Problema 404 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abcisas.
Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (1, -1) = (2, 4)$$

Ecuación Vectorial: $(x, y) = (1, -1) + \lambda(2, 4)$
Ecuación Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \end{cases}$
Ecuación Continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{4}$
Ecuación General: $2x - y - 3 = 0$
Ecuación Explícita: $y = 2x - 3$, luego $m = 2$
Ecuación punto pendiente: $y+1 = 2(x-1)$ Ángulo: $m = \tan\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = 63^{o}26'6''$

Problema 405 Expresa de todas las maneras que conozcas la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(4, 5)$, calcula después el ángulo que forma con el eje de abcisas.

Solución:

Sea $\overrightarrow{AB} = (4, 5) - (1, 0) = (3, 5)$ tendremos:

- $r : (x, y) = (1, 0) + \lambda(3, 5)$ ecuación vectorial
- ecuación paramétrica
$$r : \begin{cases} x = & 1 + 3\lambda \\ y = & 5\lambda \end{cases}$$
- Ecuación continua
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5}$$
- $5x - 3y - 5 = 0$ ecuación general.
- $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{5}{3}$ ecuación explícita.

- $y = \frac{5}{3}(x-1)$ ecuación punto pendiente.

$$m = \tan\alpha = \frac{5}{3} \Longrightarrow \alpha = 59^{o}2'11''$$

2.3.2. Intersección de dos rectas

Problema 406 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - y + 8 = 0, \;\; 3x + y - 3 = 0$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 8 = 0 \\ 3x + y - 3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, 6)$$

Problema 407 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x + y + 8 = 0, \;\; 3x - y - 3 = 0$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 8 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, -6)$$

Problema 408 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$3x + 2y + 8 = 0, \;\; 3x - y - 4 = 0$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + 8 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, -4)$$

Problema 409 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - y + 8 = 0, \;\; 3x - y - 4 = 0$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 8 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 32 \end{array}\right. \Longrightarrow (12, 32)$$

Problema 410 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$x - y + 3 = 0, \;\; 2x + y - 6 = 0$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow (1, 4)$$

www.musat.net

Problema 411 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : x-3y+2 = 0$ y $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Solución:

$$1 + \lambda - 3(1 - \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow (1, 1)$$

$$r : x - 3y + 2 = 0, \quad s : x + y - 2 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{1-3}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{20}} \Longrightarrow \alpha = 116^o 33' 54''$$

Problema 412 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : 2x+3y-1 = 0$ y $s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Solución:

$$2(2 - \lambda) + 3(1 + \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -6 \Longrightarrow (8, -5)$$

$$r : 2x + 3y - 1 = 0, \quad s : x + y - 3 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2+3}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Longrightarrow \alpha = 11^o 18' 35''$$

Problema 413 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : 2x+y-1 = 0$ y $s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Solución:

$$2(2 + \lambda) + (2 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow (-3, 7)$$

$$r : 2x + y - 1 = 0, \quad s : x + y - 4 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2+1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \alpha = 18^o 26' 6''$$

Problema 414 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : 2x+y-1 = 0$ y $s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Solución:

$$2(2 + \lambda) + (2 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow (-3, 7)$$

$$r : 2x + y - 1 = 0, \quad s : x + y - 4 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2+1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \alpha = 18^o 26' 6''$$

www.musat.net

2.3.3. Distancias

Problema 415 Calcula la distancia del punto $P(2,3)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r: \ y = 3x - 2$
2. $r: \left\{ \begin{array}{lll} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{array} \right.$
3. $r: \ 3x + 4y - 5 = 0$

Solución:

1. $y = 3x - 2 \implies 3x - y - 2 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
$$= 0,3162$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{array} \right. \implies t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \implies -x + 1 = 2y - 4 \implies$$

$x + 2y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$
$$= 1,3416$$

3. $3x + 4y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Problema 416 Dado el punto $P(2,-1)$, calcular la distancia de éste a las siguientes rectas:

1.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

2.

$$s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1}$$

www.musat.net

Solución:

1.

$$\lambda = \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} \Longrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2.

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} \Longrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

$$d(P, s) = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Problema 417 Calcular la distancia del punto $A(3, -1)$ a las rectas:

a) $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2}$

b) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

c) $r : 2x + 3y - 3 = 0$

Solución:

a) $r : 2x - 3y - 8 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

b) $r : 2x + y - 2 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

c) $r : 2x + 3y - 3 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{4+9}} = 0$$

Problema 418 Calcular

1. la distancia del punto $P(2, 1)$ a la recta $3x - y + 1 = 0$.

www.musat.net

2. el ángulo formado por las rectas

$$r: 3x - y - 1 = 0, \quad s: x + y + 2 = 0$$

Solución:

1.

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = 1,89737$$

2.

$$\cos\alpha = \frac{3-1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = 0,4472 \Longrightarrow \alpha = 63^{\circ}26'6''$$

2.3.4. Ángulos

Problema 419 Calcula el ángulo formado por las rectas:

1.

$$r_1: \ 3x - y + 1 = 0$$

$$s_1: \ 2x + 3y + 4 = 0$$

2.

$$r_1: \begin{cases} \text{x=} & 2+ & \lambda \\ \text{y=} & 2- & 3\lambda \end{cases} \quad r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Solución:

1. Como las rectas están definidas por su ecuación general, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$

$$= 0,2631 \quad \Longrightarrow \alpha = 74^{\circ}44'42''$$

2.

$$r_1: \begin{cases} \text{x=} & 2+ & \lambda \\ \text{y=} & 2- & 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} \Longrightarrow 3x + y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} \Longrightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$

www.musat.net

(Ecuación general de la recta)

$$\cos\alpha = \frac{|u_1\cdot u_1' + u_2\cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{u_1'^2+u_2'^2}} = \frac{|3\cdot 2 + 1\cdot(-3)|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}$$

$$= 0,2631 \Longrightarrow \alpha = 74^{\circ}44'42''$$

Problema 420 Calcular el ángulo que forman las rectas

a) $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3}, \quad s: 2x+y-1=0$

b) $r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases} \quad s: 3x+y+1=0$

Solución:

a) $r: 3x+2y-1=0,\ s: 2x+y-1=0$

$$\cos\alpha = \frac{6+2}{\sqrt{65}} = 0,992277 \Longrightarrow \alpha = 7^{\circ}7'32''$$

b) $r: x+y-3=0,\ s: 3x+y+1=0$

$$\cos\alpha = \frac{3+1}{\sqrt{20}} = 0,894427 \Longrightarrow \alpha = 26^{\circ}33'54''$$

2.4. Cónicas

2.4.1. Circunferencia

Problema 421 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3,1)$ y radio $r=2$
Solución:

$$(x-3)^2+(y-1)^2 = 2^2 \Longrightarrow x^2+y^2-6x-2y+6=0$$

Problema 422 Dada la circunferencia $x^2+y^2-2x+8y-16=0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m=-2a=-2 \Longrightarrow a=1 \\ n=-2b=8 \Longrightarrow b=-4 \\ p=a^2+b^2-r^2=-16 \Longrightarrow r=\sqrt{33} \end{array}\right\} \Longrightarrow C(1,-4)\ \ r=\sqrt{33}$$

Problema 423 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3,-1)$ y radio $r=2$
Solución:

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 2^2 \Longrightarrow x^2+y^2-6x+2y+6=0$$

www.musat.net

Problema 424 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m = -2a = 2 \Longrightarrow a = -1 \\ n = -2b = -8 \Longrightarrow b = 4 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = -16 \Longrightarrow r = \sqrt{33} \end{array}\right\} \Longrightarrow C(-1, 4) \;\; r = \sqrt{33}$$

Problema 425 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3, -2)$ y radio $r = 3$
Solución:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

Problema 426 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m = -2a = -4 \Longrightarrow a = 2 \\ n = -2b = 6 \Longrightarrow b = -3 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = -16 \Longrightarrow r = \sqrt{29} \end{array}\right\} \Longrightarrow C(2, -3) \;\; r = \sqrt{29}$$

Problema 427 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(-1, 1)$ y radio $r = 4$
Solución:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$$

Problema 428 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m = -2a = 12 \Longrightarrow a = -6 \\ n = -2b = -4 \Longrightarrow b = 2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = -16 \Longrightarrow r = 2\sqrt{14} \end{array}\right\} \Longrightarrow C(-6, 2) \;\; r = 2\sqrt{14}$$

Problema 429 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -1)$ y radio $r = 4$
Solución:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

Problema 430 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(1, 2)$ y radio $r = 3$
Solución:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

www.musat.net

Problema 431 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(-1,1)$ y radio $r=\sqrt{3}$
Solución:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=3 \Longrightarrow x^2+y^2+2x-2y-1=0$$

Problema 432 Dada la circunferencia $x^2+y^2-6x-8y+16=0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m=-2a=-6 \Longrightarrow a=3 \\ n=-2b=-8 \Longrightarrow b=4 \\ p=a^2+b^2-r^2=11 \Longrightarrow r=3 \end{array}\right\} \Longrightarrow C(3,4)\;\; r=3$$

Problema 433 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(1,-2)$ y radio $r=\sqrt{7}$
Solución:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=7 \Longrightarrow x^2+y^2-2x+4y-2=0$$

Problema 434 Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x-8y+11=0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m=-2a=-4 \Longrightarrow a=2 \\ n=-2b=-8 \Longrightarrow b=4 \\ p=a^2+b^2-r^2=11 \Longrightarrow r=3 \end{array}\right\} \Longrightarrow C(2,4)\;\; r=3$$

Problema 435 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,0)$ y radio $r=\sqrt{5}$
Solución:

$$(x-2)^2+(y-0)^2=5 \Longrightarrow x^2+y^2-4x-1=0$$

Problema 436 Dada la circunferencia $x^2+y^2-6x-4y+9=0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m=-2a=-6 \Longrightarrow a=3 \\ n=-2b=-4 \Longrightarrow b=2 \\ p=a^2+b^2-r^2=9 \Longrightarrow r=2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C(3,2)\;\; r=2$$

Problema 437 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3,0)$ y radio $r=\sqrt{5}$
Solución:

$$(x-3)^2+(y-0)^2=5 \Longrightarrow x^2+y^2-6x+4=0$$

www.musat.net

Problema 438 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, calcular su centro y su radio.
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} m = -2a = -6 \Longrightarrow a = 3 \\ n = -2b = -4 \Longrightarrow b = 2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = 9 \Longrightarrow r = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow C(3,2) \;\; r = 2$$

Problema 439 Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$ en el punto $P(-1,0)$
Solución:

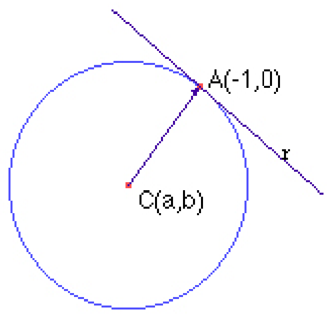
Primero calculamos el centro de la circunferencia, ya que si obtenemos este punto, podremos calcular el vector que partiendo de este punto llega al punto donde queremos hallar la tangente, y este vector será perpendicular a la recta tangente:

$$3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{3}\cdot x - \frac{5}{3}\cdot y - \frac{2}{3} = 0 \Longrightarrow$$

$$m = -2\cdot a \Longrightarrow \frac{1}{3} = -2\cdot a \Longrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

$$n = -2\cdot b \Longrightarrow -\frac{5}{3} = -2\cdot b \Longrightarrow b = \frac{5}{6}$$

Luego el centro de la circunferencia será $C(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$
Esto quiere decir que un vector perpendicular a la recta que nos piden



será el vector $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{u} = (-1,0) - (-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) = (-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$
Luego la ecuación general de la recta será de la forma $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + Cte = 0$, y teniendo en cuenta que esta recta pasa por el punto $P(-1,0)$, sustituyendo obtendríamos $-\frac{5}{6}\cdot(-1) - \frac{5}{6}\cdot 0 + Cte = 0 \Longrightarrow Cte = -\frac{5}{6}$
La recta pedida sería, por tanto,$-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + (-\frac{5}{6}) = 0 \Longrightarrow x + y + 1 = 0$

www.musat.net

Problema 440 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1,1)$, $B(2,2)$ y $C(2,0)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2- & m+ & n+ & p=0 \\ 8+ & 2m+ & 2n+ & p=0 \\ 4+ & 2m+ & & p=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-\frac{4}{3} \\ n=-2 \\ p=-\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Problema 441 Encontrar el centro y el radio de las posibles circunferencias:

1. $x^2+y^2-10x+8y-4=0$

2. $x^2+y^2-2x-2y+15=0$

Solución:

1. $m=-2a=-10 \Longrightarrow a=5$
   $n=-2b=8 \Longrightarrow b=-4$
   $p=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\sqrt{45}$

2. $m=-2a=-2 \Longrightarrow a=1$
   $n=-2b=-2 \Longrightarrow b=1$
   $p=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\sqrt{-13}$. Luego no es una circunferencia.

2.4.2. Elipse

Problema 442 Sea una elipse cuyo eje mayor mide $18cm$ y su distancia focal es $6cm$. Calcular el semieje menor y su excentricidad.

Solución:

$$2a=18 \Longrightarrow a=9$$

$$2c=6 \Longrightarrow c=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow 81=b^2+9 \Longrightarrow b=\sqrt{81-9}=8,49cm$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{9}=0,3333$$

Problema 443 Dada una elipse, que tiene una excentricidad de 0,6, y una distancia focal de $8cm$, calcular las dimensiones del semieje mayor y del eje menor.
Solución:

$$2c=8 \Longrightarrow c=4$$

www.musat.net

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow a = \frac{c}{e} = \frac{4}{0,6} = 6,67cm \text{ (semieje mayor)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{44,4 - 16} = 5,33cm \Longrightarrow$$

$$2b = 2 \cdot 5,33 = 10,66 \text{ (eje menor)}$$

Problema 444 Dada una elipse, que tiene 0,4 de excentricidad, y su semieje menor mide $4cm$, calcular las dimensiones del eje mayor y la semidistancia focal.

Solución:

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = 0,4 \cdot a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a^2 = 16 + (0,4 \cdot a)^2 \Longrightarrow 0,84 \cdot a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4,364cm \Longrightarrow$$

$$2a = 8,729cm \text{ (eje mayor)}$$

$$c = 0,4 \cdot 4,364 = 1,7456cm \text{ (semidistancia focal)}$$

2.4.3. Hipérbola

Problema 445 *(2 puntos)* Dada una hipérbola de excentricidad $1,5$ y cuyo eje principal mide $4cm$, calcular el eje secundario y la distancia focal.

Solución:

$$2a = 4 \Longrightarrow a = 2$$

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow 1,5 = \frac{c}{2} \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow 2c = 6cm \text{ (distancia focal)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Longrightarrow b = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Longrightarrow$$

$$2b = 2\sqrt{5} = 4,4472cm \text{ (eje secundario)}$$

Problema 446 Dada la hipérbola de cuyo eje secundario mide $6cm$ y tiene de semidistancia focal $9cm$, calcular el eje principal y su excentricidad.

Solución:

$$2b = 6 \Longrightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 9^2 = a^2 + 3^2 \Longrightarrow a = \sqrt{81-9} = 8,845 \Longrightarrow$$

$$2a = 16,9706cm \text{ (eje principal)}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{9}{8,485} = 1,06 \text{ (excentricidad)}$$

www.musat.net

Problema 447 Si la distancia desde un punto cualquiera de la hipérbola hasta los dos focos es de 28 y 14cm respectivamente, y su excentricidad es de $1,8$, calcular la distancia focal y el semieje secundario.

Solución:

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a \Longrightarrow 28 - 14 = 2a \Longrightarrow a = 7$$

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow 1,8 = \frac{c}{7} \Longrightarrow c = 12,6 \Longrightarrow 2c = 25,2cm \text{ (distancia focal)}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{12,6^2 - 49} = 10,4766cm \text{ (semieje secundario)}$$

www.musat.net

www.musat.net

Capítulo 3

Problemas de Análisis

3.1. Sucesiones

3.1.1. Términos de una sucesión

Problema 448 Se pide:

1. Calcular el término primero y noveno de las siguientes sucesiones:

   a) $a_n = 2n^2 + 3$

   Solución:

   $$a_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5, \quad a_9 = 2 \cdot 9^2 + 5 = 167$$

   b) $b_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

   Solución:

   $$b_1 = \frac{2 \cdot 1 + 5}{1+1} = \frac{7}{2} \qquad b_9 = \frac{2 \cdot 5}{9+1} = \frac{23}{10}$$

   c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$

   Solución:

   $$c_1 = (-1)^1 \cdot 2^1 = -2 \quad c_9 = (-1)^9 \cdot 2^9 = -512 \quad c_{12} = (-1)^{12} \cdot 2^{12} = 4096$$

www.musat.net

2. Ahora calcular los términos segundo y séptimo de las siguientes sucesiones:

   a) $a_n = n^3 - 1$

   Solución

   $$a_2 = 2^3 - 1 = 7 \quad a_7 = 7^3 - 1 = 342$$

   b) $b_n = \dfrac{2n^2 - 1}{2n - 1}$

   Solución:

   $$b_2 = \frac{2 \cdot 2^2 - 1}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{7}{3} \qquad b_7 = \frac{2 \cdot 7^2 - 1}{2 \cdot 7 - 1} = \frac{97}{13}$$

   c) $c_n = (-1)^n \cdot n^n$

   Solución

   $$c_2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = 4 \qquad c_7 = (-1)^7 \cdot 2^7 = -7^7 = -823543$$

3. Comprobar si los números 1, 6, 5, $\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{18}{5}$, 4 y $\dfrac{7}{2}$ son términos de la sucesión $a_n = \dfrac{3n + 6}{n}$

   Solución

   - $\dfrac{3n + 6}{n} = 1 \Longrightarrow n = -3$ luego el 1 no pertenece a la sucesión.
   - $\dfrac{3n + 6}{n} = 6 \Longrightarrow n = 2$ luego el 6 es el segundo término de la sucesión.
   - $\dfrac{3n + 6}{n} = 5 \Longrightarrow n = 3$ luego el 5 es el tercer témino de la sucesión.
   - $\dfrac{3n + 6}{n} = \dfrac{9}{4} \Longrightarrow n = -8$ luego $\dfrac{9}{4}$ no es témino de la sucesión.
   - $\dfrac{3n + 6}{n} = \dfrac{18}{5} \Longrightarrow n = 10$ luego el $\dfrac{18}{5}$ es el décimo término de la sucesión.
   - $\dfrac{3n + 6}{n} = 4 \Longrightarrow n = 6$ luego el 4 es el sexto término de la sucesión.
   - $\dfrac{3n + 6}{n} = \dfrac{7}{2} \Longrightarrow n = 12$ luego el $\dfrac{7}{2}$ es término duodécimo de la sucesión.

4. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

www.musat.net

a) 4, 9, 14, 19, 24,...
Solución:

$$a_n = 5n - 1$$

b) 5, 11, 17, 23, 29,...
Solución:

$$a_n = 6n - 1$$

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$

Solución:

Fijándonos un poco nos damos cuenta que el denominador lo forman los números pares, $2n$, mientras que el numerador es el denominador menos uno $2n-1$, luego el término general buscado sería $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

d) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

Solución:

$$a_n = \frac{n-1}{2}$$

e) 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51,...

Solución:

$$a_n = n^2 + 2$$

f) -3, 9, -27, 81, -243,...

Solución:

$$a_n = (-1)^n \cdot 3^n$$

3.1.2. Sucesiones crecientes y acotadas:

Problema 449 Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesines son monótonas crecientes o decrecientes y cuyos términos generales son:

   a) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

www.musat.net

Solución
Obtenemos los siguientes términos $3, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{13}{6}, \cdots$, que cumplen $3 > \frac{5}{3} > \frac{7}{3} > \frac{9}{4} > \frac{13}{6} > \cdots$, luego la sucesión es decreciente.

b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

Solución
Obtenemos los siguientes términos $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots$, luego la sucesión no es creciente ni decreciente.

c) $c_n = \frac{2n-1}{n+1}$

Solución

Obtenemos los siguientes términos Obtenemos los siguientes términos $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \cdots$, que cumplen $\frac{1}{2} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{7}{5} < \frac{9}{6} < \cdots$, luego la sucesión es creciente.

d) $d_n = 7$

Solución:

Obtenemos los siguientes términos $7, 7, 7, 7, 7, 7 \ldots$, luego la sucesión es creciente y decreciente.

e) $e_n = n - 3^n$

Solución:

Obtenemos los siguientes términos $-2, -7, -24, -77, \ldots$, luego la sucesión cumple $-2 > -7 > -24 > -77 > \ldots$ y por tanto es decreciente.

2. Indicar si están acotadas las siguientes sucesiones, que tienen por termino general:

a) $a_n = 3n - 2$

Solución:

$\{a_n\} = \{1, 4, 7, 10, \ldots\} \Longrightarrow 1 < 4,\ 1 < 7,\ 1 < 10, \ldots \Longrightarrow$ la sucesión está acotada inferiormente por 1, pero no lo está superiormente.

www.musat.net

b) $b_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

Solución:

$\{b_n\} = \left\{1, \dfrac{5}{3}, 2, \dfrac{11}{5}, \cdots\right\}$

Tenemos $1 \leq 1$, $1 \leq \dfrac{5}{3}$, $1 \leq 2$, $1 \leq \dfrac{11}{5}, \cdots$, luego la sucesión está acotada inferiormente por 1.

Tenemos $3 \geq 1$, $3 \geq \dfrac{5}{3}$, $3 \geq 2$, $3 \geq \dfrac{11}{5}, \cdots$, luego la sucesión está acotada superiormente 3.

En conclusión, la sucesión está acotada.

c) $c_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{3n}$

Solución:

$\{c_n\} = \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{12}, \cdots\right\}$

Tenemos $-\dfrac{1}{3} \leq -\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{6}$, $-\dfrac{1}{3} \leq -\dfrac{1}{9}$, $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{12}, \cdots$, luego $-\dfrac{1}{3}$ es una cota inferior.

$\dfrac{1}{6} \geq -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{6} \geq \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{6} \geq -\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{6} \geq \dfrac{1}{12}, \cdots$, luego $\dfrac{1}{6}$ es una cota superior.

En conclusión, la sucesión está acotada.

d) $d_n = (-1)^{n+1}(n+3)$

Solución:

$\{d_n\} = \{4, -5, 6, -7, 8, -9, \cdots\}$ no tiene ni cota superior ni cota inferior; no está acotada.

3.1.3. Progresiones aritméticas

Problema 450 Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son aritméticas

   a) $1, 5, 9, 13, 17, 21, \cdots$

   Solución:

www.musat.net

La diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre la misma $d = 4$ por tanto, se trata de una progresión aritmética de razón $d = 4$, cuyo primer término es $a_1 = 1$ y cuyo término general será $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$.

b) $1, 4, 8, 13, 19, 26, \cdots$

Solución:

La diferencia entre términos consecutivos no es siempre la misma, y por tanto, no es una progresión aritmética.

c) $-2, -5, -8, -11, -14, \cdots$

Solución:

La diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre la misma $d = -3$ por tanto, se trata de una progresión aritmética de razón $d = -3$, cuyo primer término es $a_1 = -2$ y cuyo término general será $a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1)(-3) = 1 - 3n$.

d) $1, -2, 3, -4, 5, \cdots$

Solución:

La diferencia entre términos consecutivos no es siempre la misma, y por tanto, no es una progresión aritmética.

e) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \cdots$

Solución:

La diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre la misma $d = \frac{1}{2}$ por tanto, se trata de una progresión aritmética de razón $d = \frac{1}{2}$, cuyo primer término es $a_1 = 1$ y cuyo

www.musat.net

término general será $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

2. Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes, y calcular en cada una de ellas el término que ocupa el lugar 10 y el término general.

   a) El primero es -2 y la diferencia es $d = \frac{1}{5}$

   Solución:

   $a_1 = -2$
   $a_2 = -2 + \frac{1}{5} = -\frac{9}{5}$
   $a_3 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{8}{5}$
   $a_4 = -2 + 3 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{7}{5}$
   $a_{10} = -2 + 9 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$
   $a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1)\frac{1}{5} = \frac{n-11}{5}$

   b) El segundo vale -4 y la diferencia es $d = 3$.

   Solución:

   $a_2 = a_1 + d \Longrightarrow -4 = a_1 + 3 \Longrightarrow a_1 = -7$
   $a_1 = -7$
   $a_2 = -4$
   $a_3 = -7 + 2 \cdot 3 = -1$
   $a_4 = -7 + 3 \cdot 3 = 2$
   $a_{10} = -7 + 9 \cdot 3 = 20$
   $a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + (n-1)3 = 3n - 10$

   c) El primero vale 16 y el segundo 12.

   Solución:

   $a_1 = 16$
   $a_2 = 12 \Longrightarrow 12 = 16 + d \Longrightarrow d = -4$

www.musat.net

$a_3 = 16 + 2 \cdot (-4) = 8$
$a_4 = 16 + 3 \cdot (-4) = 4$
$a_{10} = 16 + 9 \cdot (-4) = -20$
$a_n = a_1 + (n-1)d = 16 + (n-1)(-4) = 20 - 4n$

3. En las siguientes progresiones aritméticas, hallar el primer término, la diferencia, el término general y el término a_{12}

   a) El tercer término es -5 y el cuarto -9

   Solución:

   $d = -9 - (-5) = -4$
   $a_3 = a_1 + 2(-4) \Longrightarrow a_1 = -5 + 8 = 3$
   $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)(-4) = 7 - 4n$
   $a_{12} = 3 + 11(-4) = -41$

   b) El cuarto término es $\sqrt{2}$ y el noveno $3 + \sqrt{2}$.

   Solución:

   $$a_9 = a_4 + (9-4)d \Longrightarrow 3 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 5d \Longrightarrow d = \frac{3}{5}$$
   $$a_4 = a_1 + 3d \Longrightarrow \sqrt{2} = a_1 + \frac{9}{5} \Longrightarrow a_1 = \sqrt{2} - \frac{9}{5}$$
   $$a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{2} - \frac{9}{5} + (n-1)\frac{3}{5} = \frac{5\sqrt{2} - 11 + 3n}{5}$$
   $$a_{12} = \frac{5\sqrt{2} - 11 + 3 \cdot 12}{5} = 5 + \sqrt{2}$$

4. Calcular el término a_{13} de las siguientes progresiones aritméticas:

   a) La diferencia es igual al cuarto término, y el noveno vale 8.

   Solución:

   $$a_9 = a_4 + (9-4)d \Longrightarrow 8 = d + 5d \Longrightarrow d = \frac{4}{3}$$
   $$a_n = a_9 + (n-9)\frac{4}{3} = \frac{4n - 12}{3}$$

www.musat.net

$$a_{13} = a_9 + (13-9)\frac{4}{3} = \frac{40}{3}$$

b) El quinto término es $-\frac{1}{2}$ y el décimo es 5.

Solución:

$$a_{10} = a_5 + (10-5)d \Longrightarrow 5 = -\frac{1}{2} + 5d \Longrightarrow d = \frac{11}{10}$$
$$a_{13} = a_{10} + 3d = 5 + 3 \cdot \frac{11}{10} = \frac{83}{10}$$

5. Calcular el término a_{15} de las siguientes progresiones aritméticas.

a) La diferencia es igual al segundo término y el término octavo vale -6.

Solución:

$$a_8 = a_2 + (8-2)d \Longrightarrow -6 = d + 6d \Longrightarrow d = -\frac{6}{7}$$
$$a_{15} = a_8 + (15-8)d = -6 + 7\left(-\frac{6}{7}\right) = -12$$

b) El tercer término es $-\frac{1}{3}$ y el noveno es 9.

Solución:

$$a_9 = a_3 + (9-3)d \Longrightarrow 9 = -\frac{1}{3} + 6d \Longrightarrow d = \frac{14}{9}$$
$$a_{15} = a_9 + (15-9)d = 9 + 6 \cdot \frac{14}{9} = \frac{55}{3}$$

Problema 451 Las edades de cinco hermanos están en progresión aritmética y suman 40 años. Si la edad del mayor es cinco veces la del pequeño, ¿cuál es la edad de cada uno de ellos?.

Solución:

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 30 \Longrightarrow a_1 + a_5 = 12$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_5 = 12 \\ a_5 = 5a_1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_5 = 10 \end{array} \right.$$

www.musat.net

$a_n = a_1 + (n-1)d \Longrightarrow 10 = 2 + 4d \Longrightarrow d = 2$

Luego $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ y $a_5 = 10$.

Problema 452 Hallar la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética $2,\ 8,\ 14,\ 20, \cdots$.

Solución:

Tenemos $a_1 = 2$ y $d = 6$, luego $a_{30} = 2 + (30-1)\cdot 6 = 176$

$S_{30} = \dfrac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \dfrac{2+176}{2} \cdot 30 = 2670$

Problema 453 Calcular la suma de los 50 primeros números pares.

Solución:

Tenemos $a_1 = 2,\ \ d = 2 \Longrightarrow a_50 = 2 + 49 \cdot 2 = 100$

$S_{100} = \dfrac{2+100}{2} \cdot 50 = 2550$

Problema 454 En una progresión aritmética en la que $a_4 = 12$ y $d = \dfrac{1}{2}$. Calcular la suma de los primeros 20 primeros números.

Solución:

$a_4 = a_1 + 3d \Longrightarrow 12 = a_1 + 3 \cdot \dfrac{1}{2} \Longrightarrow a_1 = \dfrac{21}{2}$

$a_{20} = a_4 + 19d = 12 + 19 \cdot \dfrac{1}{2} = 20$

$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_20}{2} \cdot 20 = \dfrac{\frac{21}{2} + 20}{2} \cdot 20 = 305$

Problema 455 En una progresión aritmética sea $a_4 = \dfrac{3}{8}$ y $a_7 = 6$. Calcular la suma de los 20 primeros términos.

Solución:

$a_7 = a_4 + 3d \Longrightarrow 6 = \dfrac{3}{8} + 3d \Longrightarrow d = \dfrac{15}{8}$

$a_7 = a_1 + 6d \Longrightarrow 6 = a_1 + 6 \cdot \dfrac{15}{8} \Longrightarrow a_1 = -\dfrac{11}{4}$

www.musat.net

$a_{20} = a_7 + 13d = 6 + 13 \cdot \dfrac{15}{8} = \dfrac{243}{8}$

$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \dfrac{-\frac{11}{4} + \frac{243}{8}}{2} \cdot 20 = \dfrac{1105}{4}$

Problema 456 ¿Cuántos términos hay que sumar a la progresión 38, 35, 32,29,...para obtener como resultado 245.

Solución:

$d = -3,\ a_1 = 38,\ \ a_n = a_1 + (n-1)d = 38 + (n-1)(-3) = 41 - 3n$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Longrightarrow 245 = \dfrac{38 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{38 + 41 - 3n}{2} \cdot n \Longrightarrow 490 = 79n - 3n^2 \Longrightarrow 3n^2 - 79n + 490 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 10 \\ n = \frac{49}{3} \end{array} \right.$

Luego la solución válida es $n = 10$.

Problema 457 Dada la progresión $3, \dfrac{5}{2}, 2, \dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}, \cdots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_{20}, y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

Solución:

1. La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre $-\dfrac{1}{2}$, luego se trata de una progresión aritmética.
2. La diferencia es $d = -\dfrac{1}{2}$

   $a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{13}{2}$
3. $S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \dfrac{3 - \dfrac{13}{2}}{2} \cdot 20 = -35$

Problema 458 Dada la progresión $\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{5}{2}, 3, \cdots$

1. Calcular en término a_{10}, y d.
2. Calcular la suma de los diez primeros términos.

www.musat.net

Solución:

1. La diferencia es $d = 1 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \cdots = \frac{1}{2}$

   $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = \frac{1}{2} + 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 5$

2. $S_{20} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{\frac{1}{2} + 5}{2} \cdot 10 = \frac{55}{2}$

Problema 459 Dada la progresión $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \cdots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_{20}, y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

Solución:

1. La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre $-\frac{1}{2}$, luego se trata de una progresión aritmética.
2. La diferencia es $d = -\frac{1}{2}$

   $a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{2}$

3. $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 - \frac{13}{2}}{2} \cdot 20 = -35$

Problema 460 Dada la progresión $6, 12, 18, 24, 30, \cdots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_n, y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los diez primeros términos.

Solución:

1. La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre 6, luego se trata de una progresión aritmética.
2. La diferencia es $d = 6$

   $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 6 + (n-1) \cdot 6 = 6 + 6n - 6 = 6n$

www.musat.net

3. $a_{10} = a_1 + (10-1)\cdot d = 6 + 9\cdot 6 = 60$

   $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10 = \dfrac{6+60}{2}\cdot 10 = 330$

3.1.4. Progresiones geométricas

Problema 461 Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son geométricas

   a) 1, 4, 7, 11, 16, 22,...

   Solución:

   $\dfrac{4}{1}$, es distinto de $\dfrac{16}{11}$, por ejemplo, esto quiere decir que el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión no es constante y por tanto no es una progresión geométrica.

   b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001;...

   Solución:

   $\dfrac{0,1}{1} = \dfrac{0,01}{0,1} = \dfrac{0,001}{0,01} = ... = 0,1$, luego el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión es siempre el mismo y por tanto es una progresión geométrica de razón $r = 0,1$ cuyo primer término es $a_1 = 1$ y su término general será $a_n = 0,1^{n-1}$.

   c) 4^{-3}, 4^{-2}, 4^{-1}, 1, 4, 4^2,...

   Solución:

   $\dfrac{4^{-2}}{4^{-3}} = \dfrac{4^{-1}}{4^{-2}} = \dfrac{1}{4^{-1}} = \dfrac{4}{1} = \cdots = 4$

   Luego es una progresión geométrica de razón $r = 4$, cuyo primer término es $a_1 = 4^{-3}$ y su término general es $a_n = 4^{-3}\cdot 4^{n-1} = 4^{n-4}$

   d) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}, \cdots$

   Solución:

www.musat.net

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \neq \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, luego no es una progresión geométrica.

e) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 5^2, 5^3, \cdots$

Solución:

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{25}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{1} = \cdots = 5$ luego se trata de una progresión geométrica de razón $r = 5$ cuyo primer término es $a_1 = \frac{1}{25}$ y su término general es $a_n = \frac{1}{25} \cdot 5^{n-1} = 5^{n-3}$

2. En una progresión geométrica con $a_2 = \frac{1}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$, calcular a_1, a_n y a_{10}.

Solución:

$$a_2 = a_1 \cdot r \Longrightarrow a_1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$$
$$a_{10} = \frac{2^{10-2}}{3^{10-1}} = \frac{2^8}{3^9} = \frac{256}{19683}$$

Problema 462 Escribe los cinco primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = \sqrt{2}$. Halla el término general y el lugar que ocupa el término que vale 64.

Solución:

$$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = 2^{\frac{n+1}{2}}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 2\sqrt{2},\ a_3 = 4,\ a_4 = 4\sqrt{2},\ a_5 = 8$$

$$2^{\frac{n+1}{2}} = 64 = 2^6 \Longrightarrow \frac{n+1}{2} = 6 \Longrightarrow n = 11$$

Problema 463 Calcular el término a_1 y la razón de una progresión geométrica si $a_5 = -\frac{4}{3}$ y $a_8 = \frac{32}{3}$

Solución:

www.musat.net

$a_8 = a_5 \cdot r^{8-5} \Longrightarrow \dfrac{32}{3} = -\dfrac{4}{3} \cdot r^3 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{-\dfrac{32}{4}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$a_5 = a_1 \cdot (-2)^{5-1} \Longrightarrow a_1 = \dfrac{-\frac{4}{3}}{(-2)^{5-1}} = -\dfrac{1}{12}$

Problema 464 Calcular el término a_{12} de una progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros terminos es 16 y la razón vale 3.

Solución:

$a_1 + a_2 = 16 \Longrightarrow a_1 + a_1 \cdot r = a_1(1 + r) = 16 \Longrightarrow a_1(1 + 3) = 16 \Longrightarrow a_1 = \dfrac{16}{4} = 4$

$a_{12} = a_1 \cdot r^{12-1} = 4 \cdot 3^{11} = 708588$

Problema 465 Calcular el término a_9 de una progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de los tres primeros términos es 42 y que el segundo vale 12.

Solución:

$a_1 + a_2 + a_3 = 42 \Longrightarrow \dfrac{a_2}{r} + a_2 + a_2 \cdot r = 42 \Longrightarrow \dfrac{12}{r} + 12 + 12r = 42 \Longrightarrow$

$12 + 12r + 12r^2 = 42r \Longrightarrow 12r^2 - 30r + 12 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \\ r = 2 \end{cases}$

Cuando $r = \dfrac{1}{2}$ la progresión es decreciente, luego la razón válida será $r = 2$.

$a_9 = a_2 \cdot r^{9-2} = 12 \cdot 2^7 = 1536$

Problema 466 ¿Cuánto valen los ángulos interiores de un cuadrilátero si están en progresión geométrica y el ángulo mayor es ocho veces el ángulo menor?.

Solución:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 360^o \Longrightarrow a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 = 360^o$

$a_4 = 8a_1 \Longrightarrow 8a_1 = a_1 \cdot r^3 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$

$a_1 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_1 = 360^o \Longrightarrow a_1 = 24^o$

Los ángulos son: 24^o, 48^o, 96^o y 192^o.

www.musat.net

Problema 467 En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón vale -3. Calcular la suma de los diez primeros términos de ella.

Solución:

$a_{10} = 5 \cdot (-3)^9 = -98415$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{-98415 \cdot (-3) - 5}{-3-1} = -73810$

Problema 468 En una progresión geométrica de razón $-\dfrac{1}{2}$ el primer término es 8. Calcular el producto de los cinco primeros términos.

Solución:

$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 8 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2}$

$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{\left(8 \cdot \dfrac{1}{2}\right)^5} = 32$

Problema 469 El cuarto término de una progresión geométrica es 4 y el noveno es 128. Calcular:

1. La razón y el término general.

   Solución:

   $a_9 = a_4 \cdot r^5 \Longrightarrow r = \sqrt[5]{\dfrac{128}{4}} = 2$

   $a_n = 4 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-2}$

2. La suma y el producto de los seis primeros términos.

   Solución:

   $a_6 = a_4 \cdot 2^2 = 16; \quad a_4 = a_1 \cdot 2^3 \Longrightarrow a_1 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

   $S_6 = \dfrac{16 \cdot 2 - \frac{1}{2}}{2-1} = \dfrac{667}{2}$

   $P_6 = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2} \cdot 16\right)^6} = 512$

www.musat.net

Problema 470 El primer día entrenamos 7 minutos y cada día siguiente entrenamos el doble que el día anterior. ¿Cuánto tiempo hemos entrenado después de una semana?.

Solución:

$a_1 = 7, \ \ r = 2 \Longrightarrow a_n = 7 \cdot 2^{n-1} \Longrightarrow a_7 = 7 \cdot 2^6 = 448$

$S_7 = \dfrac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{448 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = 889$ minutos, es decir, 14 horas 49 minutos.

Problema 471 Hallar la suma de los términos de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas.

1. 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$,...

   Solución:

   $$a_1 = 16, \quad r = \frac{1}{4} \Longrightarrow S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{16}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{64}{3}$$

2. 0,4; 0,04; 0,004; 0,0004;...

   Solución:

   $$a_1 = 0,4, \quad r = \frac{1}{10} \Longrightarrow S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0,4}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$$

Problema 472 Si los términos de una progresión geométrica decreciente suman 12 y el primer término es 2, ¿cuál es la razón?. Escribir seis términos de esta progresión.

Solución:

$12 = \dfrac{2}{1 - r} \Longrightarrow r = \dfrac{2}{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_1 = 2, \quad a_2 = \dfrac{4}{3}, \quad a_3 = \dfrac{8}{9}$

www.musat.net

$a_4 = \dfrac{16}{27}, \quad a_5 = \dfrac{32}{81}, \quad a_6 = \dfrac{64}{243}$

Problema 473 Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el noveno es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

Solución:

1. $a_9 = a_3 \cdot r^{9-3} \Longrightarrow 1 = 9 \cdot r^6 \Longrightarrow r = \sqrt[6]{\dfrac{1}{9}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} = 0{,}6933612743$

   $$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Longrightarrow 9 = a_1 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 \Longrightarrow a_1 = 9 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{8}{3}} = 18{,}72075440$$

2. $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)^{n-1} = 3^{\frac{9-n}{3}}$

3. La sucesión es $3^{8/3}, 3^{7/3}, 3^2, 3^{5/3}, 3^{4/3}, 3, 3^{2/3}, \cdots$, que cumplen que: $3^{8/3} \geq 3^{7/3} \geq 3^2 \geq 3^{5/3} \geq 3^{4/3} \geq 3 \geq 3^{2/3} \geq \cdots$, luego la sucesión es decreciente.

4. $3^{8/3}$ es mayor que el resto de los términos, luego la sucesión está acotada superiormente.
   El 0 es menor que todos los términos de la sucesión, luego la sucesión está acotada inferiormente.
   En conclusión, la sucesión está acotada.

5. $P_9 = \sqrt{(a_1 \cdot a_9)^9} = \sqrt{\left(3^{8/3} \cdot 1\right)^9} = 3^{12} = 531441$

6. $S_9 = \dfrac{a_9 \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 1} = 58{,}79033411$

7. $S = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{3^{\frac{8}{3}}}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = 61{,}05150081$

www.musat.net

Problema 474 Dada la progresión $2, 6, 18, 54, \cdots$

1. Calcular r, a_6 y su témino general (a_n).
2. Calcular el producto de los seis primeros términos.
3. Calcular la suma de los seis primeros términos.

Solución:

1. $r = \dfrac{6}{2} = \dfrac{18}{6} = \cdots = 3$

   $a_6 = a_1 \cdot r^5 \Longrightarrow a_6 = 2 \cdot 3^5 \Longrightarrow a_6 = 486$

   $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$
2. $P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(2 \cdot 486)^6} = 918330048$
3. $S_6 = \dfrac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{486 \cdot 3 - 2}{3-1} = 728$

Problema 475 Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el quinto es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

Solución:

1. $a_5 = a_3 \cdot r^{5-3} \Longrightarrow 1 = 9 \cdot r^2 \Longrightarrow r = \dfrac{1}{3}$

   $a_5 = a_1 \cdot r^4 \Longrightarrow 1 = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 \Longrightarrow a_1 = 81$
2. $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{5-n}$
3. La sucesión es 81, 27, 9, 3, 1, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{9}$, $\cdots$, que cumplen que:

   $81 \geq 27 \geq 9 \geq 3 \geq 1 \geq \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{9}, \cdots$, luego la sucesión es decreciente.

4. $a_1 = 81$ es mayor que el resto de los términos, luego la sucesión está acotada superiormente.
   El 0 es menor que todos los términos de la sucesión, luego la sucesión está acotada inferiormente.
   En conclusión, la sucesión está acotada.

5. $a_9 = a_5 \cdot r^4 = \dfrac{1}{81}$

   $P_9 = \sqrt{(a_1 \cdot a_9)^9} = \sqrt{\left(81 \cdot \frac{1}{81}\right)^9} = 1$

6. $S_9 = \dfrac{a_9 \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{\frac{1}{81} \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{9841}{81}$

7. $S = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{81}{1-\frac{1}{3}} = 121{,}5$

Problema 476 De una progresión geométrica se conoce el tercer término $a_3 = 81$, y el sexto $a_6 = 3$.

1. Calcular r, a_1 y su témino general (a_n).
2. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
3. Estudiar si la sucesión está acotada
4. La suma y producto de los seis primeros términos
5. La suma total de la progresión

Solución:

1. $a_6 = a_3 \cdot r^{6-3} \Longrightarrow 3 = 81 \cdot r^3 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$

   $a_3 = a_1 \cdot r^2 \Longrightarrow 81 = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \Longrightarrow a_1 = 81 \cdot 3^2 = 729$

   $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3^6 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{7-n}$

2. La sucesión es 3^6, 3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, 1, $\cdots$, que cumplen que:
   $3^6 \geq 3^5 \geq 3^4 \geq 3^3 \geq 3^2 \geq 3 \geq 3^{-1} \geq \cdots$, luego la sucesión es decreciente.

3. 3^6 es mayor que el resto de los términos, luego la sucesión está acotada superiormente.
   El 0 es menor que todos los términos de la sucesión, luego la sucesión está acotada inferiormente.
   En conclusión, la sucesión está acotada.

www.musat.net

4. $P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(729 \cdot 3)^6} = 10460353203$

   $$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 3^6}{\frac{1}{3} - 1} = 1092$$

5. $S = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{729}{1 - \frac{1}{3}} = 1093{,}5$

3.2. Límites de sucesiones

3.2.1. Idea intuitiva

Problema 477 Utiliza la calculadora para comprobar que los términos de la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{3n^2 + 3}{n^2}\right)$ se aproximan a 3. Calcular para ello los valores de a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100} y a_{1000}

Solución:

$a_1 = 6$
$a_4 = 3{,}1875$
$a_{10} = 3{,}03$
$a_{40} = 3{,}001875$
$a_{100} = 3{,}0003$
$a_{1000} = 3{,}000003$
El límite será 3.

Problema 478 Utilizar la calculadora para calcular a que valor se aproximan las siguientes sucesiones. Calcular para ello los valores de a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100} y a_{1000}

1. $(a_n) = \left(\dfrac{n + 3}{n^2 + 1}\right)$

   Solución:

   $a_1 = 2$
   $a_4 = 0{,}4117647058$
   $a_{10} = 0{,}1287128712$
   $a_{40} = 0{,}02685821361$
   $a_{100} = 0{,}01029897010$
   $a_{1000} = 0{,}001002998997$
   El límite será 0,001.

www.musat.net

2. $(a_n) = \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)$

   Solución:

   $a_1 = 3{,}5$
   $a_4 = 1{,}454545454$
   $a_{10} = 1{,}172413793$
   $a_{40} = 1{,}042016806$
   $a_{100} = 1{,}016722408$
   $a_{1000} = 1{,}001667222$
   Luego el límite es 1.

3. $(a_n) = \left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{5}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{9}{11}, ...\right\}$

   Solución:

   Si nos fijamos un poco el numerador sigue una progresión aritmética y el denominador también. Calculamos el termino general de la sucesión del numerador y del denominador para obtener la del cociente:

   - Numerador, $a_1 = 3,\ \ d = 2 \Longrightarrow a_n = 3 + (n-1)2 = 1 + 2n$
   - Denominador, $b_1 = 2,\ \ d = 3 \Longrightarrow b_n = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$
   - El termino general de la sucesión que buscamos será

   $$a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$$

   $a_1 = 1{,}5$
   $a_4 = 0{,}8181818181$
   $a_{10} = 0{,}7241379310$
   $a_{40} = 0{,}6806722689$
   $a_{100} = 0{,}6722408026$
   $a_{1000} = 0{,}6672224074$
   Luego el límite será 0,666...

4. $(a_n) = \left(\sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}\right)$

   Solución:

   $a_1 = 1{,}870828693$
   $a_4 = 1{,}949358868$

www.musat.net

$a_{10} = 1{,}977142106$
$a_{40} = 1{,}993893115$
$a_{100} = 1{,}997523218$
$a_{1000} = 1{,}999750234$
Luego el límite será 2.

3.2.2. Definición

Problema 479 Averigua a partir de que término de la sucesión $a_n = \dfrac{4n-3}{3n}$ se cumple que $\left|a_n - \dfrac{4}{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

Solución:

$$\left|a_n - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{4n-3}{3n} - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1000 < n$$

Es decir, a partir del término a_{1000} se cumple que $\left|a_n - \dfrac{4}{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

Problema 480 La sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n+4}\right)$ tiene de límite 0. ¿A partir de que término de esta sucesión todos los siguientes se diferencian del límite menos de una milésima?

Solución
$$|a_n - 0| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n+4} - 0\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \frac{1}{n+4} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow n > 996$$
Es decir, a partir del término a_{996} se cumple que $\left|\dfrac{1}{n+4} - 0\right| < \dfrac{1}{1000}$.

Problema 481 Hallar un término de la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{1-3n}{2n+1}\right)$ a partir del cual todos los términos siguientes se diferencien del límite menos de una milésima.

Solución
Primero calculamos a que término se aproxima la sucesión $a_1 = -0{,}6666666666$
$a_4 = -1{,}222222222$
$a_{10} = -1{,}380952380$
$a_{40} = -1{,}469135802$
$a_{100} = -1{,}487562189$
$a_{1000} = -1{,}498750624$

$a_{1000000} = -1{,}49999875$
Luego el límite será -1,5.

$$\left|\frac{1-3n}{2n+1}+\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{5}{4n+2}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \frac{5}{4n+2} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow n > 1250$

A partir del término a_{1250} se cumple la diferencia pedida.

Problema 482 Dada la sucesión de término general $a_n = \dfrac{2n^3-4}{n^3-1}$ calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

Solución:

Lo primero que vemos es que $\lim \dfrac{2n^3-4}{n^3-1} = 2$
Tenemos que $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$ y a partir de un término a_n se tiene que cumplir:

$$\left|\frac{2n^3-4}{n^3-1}-2\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{-2}{n^3-1}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \frac{2}{n^3-1} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$

$$2000 < n^3-1 \Longrightarrow n > 12{,}59711028$$

El término buscado es a_{13}.

Problema 483 Dada la sucesión de término general $a_n = \dfrac{2n^3-4}{n^3-1}$ calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

Solución:

Lo primero que vemos es que $\lim \dfrac{2n^3-4}{n^3-1} = 2$
Tenemos que $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$ y a partir de un término a_n se tiene que cumplir:

$$\left|\frac{2n^3-4}{n^3-1}-2\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{-2}{n^3-1}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \frac{2}{n^3-1} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$

$$2000 < n^3-1 \Longrightarrow n > 12{,}59711028$$

El término buscado es a_{13}.

www.musat.net

3.2.3. Sucesiones que tienden a infinito

Problema 484 Utiliza la calculadora para averiguar que ocurre con los términos de las siguientes sucesiones al dar valores a n cada vez mayores.

1. $(a_n) = \left(4^{n-1}\right)$

   Solución:
   $a_1 = 1$
   $a_4 = 64$
   $a_{10} = 262144$
   $a_{40} = 302231454903657293676544$
   $a_{50} = 316912650057057350374175801344$
   $a_{60} = 332306998946228968225951765070086144$
   Luego el límite será $+\infty$.

2. $(b_n) = \left(\dfrac{1-n^3}{n}\right)$

   Solución:
   $a_1 = 0$
   $a_4 = -15{,}75$
   $a_{10} = -99{,}9$
   $a_{40} = -1599{,}975$
   $a_{100} = -9999{,}99$
   $a_{1000} = -9{,}99999999 \cdot 10^5$
   Luego el límite será $-\infty$.

3. $(c_n) = \left((-1)^n \cdot (n+3)^2\right)$

   Solución:

   $a_1 = -16$
   $a_4 = 49$
   $a_{10} = 169$
   $a_{41} = -1936$
   $a_{100} = 10609$
   $a_{999} = -1004004$
   Luego no existe límite, los numeros oscilan de positivos a negativos, haciéndose los positivos cada vez más grandes y los negativos cada vez más pequeños.

4. Dado $k = 121$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (4n-3)$ todos los siguientes son mayores que k. Compruébalo calculando algún termino posterior.

www.musat.net

Solución:

$4n - 3 > 121 \Longrightarrow n > 31$

A partir del término a_{31} todos los términos son mayores de 121. Calculamos $a_{32} = 125$, $a_{33} = 129$, etc.

5. Dado $k = -213$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (3 - 6n)$ todos los siguientes son menores que k. Compruébalo calculando algún termino posterior.

   Solución:

   $3 - 6n < -213 \Longrightarrow n > 36$

   A partir del término a_{36} todos los términos son menores de -213. Calculamos $a_{37} = -219$, $a_{38} = -225$, etc.

3.2.4. Cálculo de Límites de sucesiones

Problema 485 Dadas las sucesiones $(a_n) = \left(n^2 + 2\right)$ y $(b_n) = \left(1 - n^2\right)$, calcular los siguientes límites:

1. $\lim a_n$

   Solución

   $\lim a_n = \lim(n^2 + 2) = +\infty$

2. $\lim b_n$

   Solución

   $\lim b_n = \lim(1 - n^2) = -\infty$

3. $\lim(a_n - b_n)$

   Solución

   $\lim(a_n - b_n) = \lim(n^2 - 2 - 1 + n^2) = +\infty$

www.musat.net

4. $\lim(a_n + b_n)$

   Solución:

   $\lim(n^2 + 2 + 1 - n^2) = \lim 3 = 3$

5. $\lim(a_n \cdot b_n)$

   Solución:

   $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(n^2 + 2)(1 - n^2) = \lim(-n^4 - n^2 + 2) = -\infty$

6. $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$

   Solución:

   $$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 2}{1 - n^2} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Problema 486 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim \dfrac{2n + 1}{4n + 7}$

   Solución:

   $$\lim \frac{2n + 1}{4n + 7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{7}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim \dfrac{2n^2 + 1}{3n^3 + 2}$

   Solución:

   $$\lim \frac{2n^2 + 1}{3n^3 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{\frac{2n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2}{n^3}} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{2}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

3. $\lim \dfrac{n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 + 2}$

Solución:

$$\lim \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2}{n^3}} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{2}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

4. $\lim \dfrac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

Solución:

$$\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{2n + 2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

5. $\lim \dfrac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

Solución:

$$\lim \frac{(n-2)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{3 - 6n}{n^2 + n + 1} = \lim \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{6}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Problema 487 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim \sqrt{\dfrac{8n+1}{2n+5}}$

Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{8n+1}{2n+5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{\frac{8 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}}} = \sqrt{4} = 2$$

2. $\lim \sqrt{\dfrac{3n+1}{n^2-1}}$

Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{3n+1}{n^2-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{\frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0$$

3. $\lim \sqrt{\dfrac{3n^2+2n+1}{n^2-2}}$

   Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{3n^2+2n+1}{n^2-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}} = \sqrt{3}$$

3.2.5. Número e

Problema 488 Calcular los cinco primeros términos de la sucesión de término general $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n}$. Calcular también los términos a_{200} y a_{1000}. Relaccionar esta sucesión con el número e.

Solución:

- $a_1 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = 2{,}370370370$
- $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)^6 = 2{,}521626371$
- $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{9}\right)^9 = 2{,}581174791$
- $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613035290$
- $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{15}\right)^{15} = 2{,}632878717$
- $a_{200} = \left(1+\dfrac{1}{600}\right)^{600} = 2{,}716020048$
- $a_{1000} = \left(1+\dfrac{1}{3000}\right)^{3000} = 2{,}718130828$

  El límite de esta sucesión es el número e.

Problema 489 Calcula los siguientes límites:

www.musat.net

1. $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{4n} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{4}$

   Donde $\lambda = \lim 4n\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right) = 4$

2. $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e$

   Donde $\lambda = \lim(n+5)\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right) = 1$

3. $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{\frac{1}{3}}$

   Donde $\lambda = \lim \dfrac{n}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right) = \dfrac{1}{3}$

4. $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{3}$

   Donde $\lambda = \lim(3n+2)\left(1+\dfrac{1}{n}-1\right) = 3$

www.musat.net

3.2.6. Varios

Problema 490 Calcular los siguientes límites

1. $\lim \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1}$

2. $\lim \dfrac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1}$

3. $\lim \sqrt{\dfrac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}}$

4. $\lim \left(\dfrac{n^3 + 1}{n^3 - 1}\right)^{2n^3}$

5. $\lim \left(\dfrac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1}\right)^{2n}$

Solución:

1. $\lim \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1} = 0$

2. $\lim \dfrac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1} = +\infty$

3. $\lim \sqrt{\dfrac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}} = \sqrt{4} = 2$

4. $\lim \left(\dfrac{n^3 + 1}{n^3 - 1}\right)^{2n^3} = (1^\infty) = e^\lambda = e^4$

   $\lambda = \lim 2n^3 \left(\dfrac{n^3 + 1}{n^3 - 1} - 1\right) = \lim \left(\dfrac{4n^3}{n^3 - 1}\right) = 4$

5. $\lim \left(\dfrac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1}\right)^{2n} = 2^\infty = \infty$

Problema 491 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 + 1}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{2x^2 - x}\right)^{x^2}$

www.musat.net

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-x-1}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3-x^2+1}=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+1}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{2x^2-x}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-x-1}\right)^{2x}=(1^{\infty})=e^{\lambda}=e^{1}$

   $\lambda=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}2x\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-x-1}-1\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}2x\left(\dfrac{2x^2-1-(2x^2-x-1)}{2x^2-x-1}\right)=$

   $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2}{2x^2-x-1}=1$

Problema 492 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\dfrac{2n^2-n+1}{3n^3+1}$

2. $\lim\dfrac{2n^4-n^2+1}{n^3-1}$

3. $\lim\sqrt{\dfrac{8n^2-n+1}{2n^2-1}}$

4. $\lim\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n^3}$

5. $\lim\left(\dfrac{2n^2+n-1}{n^2-1}\right)^{2n}$

Solución:

1. $\lim\dfrac{2n^2-n+1}{3n^3+1}=0$

2. $\lim\dfrac{2n^4-n^2+1}{n^3-1}=+\infty$

3. $\lim\sqrt{\dfrac{8n^2-n+1}{2n^2-1}}=\sqrt{4}=2$

www.musat.net

4. $\lim \left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n^3} = (1^{\infty}) = e^{\lambda} = e^4$

   $\lambda = \lim 2n^3 \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} - 1\right) = \lim \left(\frac{4n^3}{n^3-1}\right) = 4$

5. $\lim \left(\frac{2n^2+n-1}{n^2-1}\right)^{2n} = 2^{\infty} = \infty$

3.3. Funciones

3.3.1. Concepto de función, Dominio y Recorrido

Problema 493 Se pide:

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones

   a) $f(x) = 3x + 1$

   Solución:

   - **dominio** todo R
   - **recorrido** todo R

   b) $f(x) = x^2 + 4x$

   Solución:

   - **dominio** todo R
   - **recorrido** todo $(-4, +\infty)$

   c) $f(x) = \sqrt{x+9}$

   Solución:

   - **dominio** todo $[-9, +\infty)$
   - **recorrido** todo $[0, +\infty)$

   d) $f(x) = -x^2 + 2$

   Solución:

   - **dominio** todo R
   - **recorrido** todo $(-\infty, 2]$

   e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

   Solución:

   - **dominio** todo $R - \{-1\}$
   - **recorrido** todo $R - \{0\}$

www.musat.net

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

Solución:

- **dominio** todo $R - \{-1, 0\}$
- **recorrido** todo $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3 - x + 2$

Solución:

El dominio será todo R, ya que se trata de un polinomio.

b) $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$

Solución:

Cuando se anula el denominador la función no está definida, es decir, $2 + x = 0 \Longrightarrow x = -2$. El dominio es $R - \{-2\}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x - 4}$

Solución:

Cuando se anula el denominador la función no está definida, es decir, $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$. El dominio es $R - \{4\}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{3x + 6}$

Solución:

Cuando se anula el denominador la función no está definida, es decir, $3x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -2$. El dominio es $R - \{-2\}$

e) $f(x) = 2 + \sqrt{x + 5}$

Solución:

Cuando el radicando es negativo la función no está definida, es decir, $x + 5 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -5$. El dominio es $[-5, +\infty)$

3. En las funciones del ejercicio anterior, calcular las imagenes de $0,\ 4,\ -2,\ -5$.

Solución:

www.musat.net

a) $f(x) = x^3 - x + 2$

$f(0) = 2$; $f(4) = 62$; $f(-2) = -4$; $f(-5) = -118$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$

$f(0) = \dfrac{1}{2}$; $f(4) = \dfrac{1}{6}$; $f(-2)$ no está definida; $f(-5) = -\dfrac{1}{3}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$

$f(0) = 0$; $f(4)$ no está definida; $f(-2) = \dfrac{2}{3}$; $f(-5) = \dfrac{10}{9}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{3x+6}$

$f(0) = \dfrac{1}{3}$; $f(4) = \dfrac{1}{9}$; $f(-2)$ no está definida; $f(-5) = -\dfrac{2}{9}$

e) $f(x) = 2 + \sqrt{x+5}$

$f(0) = 2 + \sqrt{5}$; $f(4) = 5$; $f(-2) = 2 + \sqrt{3}$; $f(-5) = 2$

Problema 494 Hallar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{|x|}$
5. $f(x) = \frac{|x|}{x}$
6. $f(x) = \sqrt{1-x}$
7. $f(x) = 4 - x^2$
8. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
9. $f(x) = |x - 2|$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

www.musat.net

3.3.2. Funciones definidas a trozos

Problema 495 Se pide:

1. Representar la función
$$f(x) = \begin{cases} 2-3x & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

2. Representar la función $f(x) = |x+1|$ Tener en cuenta que por la definición de valor absoluto tenemos
$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1 \ge 0 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \ge -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

3.3.3. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Problema 496 Se pide:

1. Calcula la variación de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos que se indican

   a) En el $[-1, 5]$

   Solución:

   $f(-1) = -3,\ f(5) = 21 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 5]$ es $f(5) - f(-1) = 21 - (-3) = 24$.

   b) En el $[0, 5]$

   Solución:

   $f(0) = -4,\ f(5) = 21 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 5]$ es $f(5) - f(0) = 21 - (-4) = 25$.

   c) En el $[-6, -1]$

   Solución:

   $f(-6) = 32,\ f(-1) = -3 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[-6, -1]$ es $f(-1) - f(-6) = -3 - 32 = -35$.

www.musat.net

2. Calcula la variación de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ 9 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

En los siguientes intervalos.

a) En el $[-2, 1]$

Solución:

$f(-2) = 3$, $f(1) = 1 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(1) - f(-2) = 1 - 3 = -2$

b) En el $[1, 3]$

Solución:

$f(1) = 1$, $f(3) = 9 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$

c) En el $[4, 7]$

Solución:

$f(4) = 9$, $f(7) = 9 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(7) - f(4) = 9 - 9 = 0$

3. Estudia si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos que se indican utilizando la calculadora.

a) $f(x) = x^3$ en $x = 0$

Solución:

Cogemos valores próximos a cero y calculamos sus imágenes.
Sean $-0{,}1 < -0{,}01 < -0{,}001 < 0{,}001 < 0{,}01 < 0{,}1$ que tendrán las siguientes imágenes correspondientes:
$-0{,}001 < -10^{-6} < -10^{-9} < 10^{-9} < 10^{-6} < 0{,}001$

Luego la función es creciente en el punto $x = 0$

b) $f(x) = 3 - x^2$ en $x = 1$

www.musat.net

Solución:

Cogemos valores próximos a uno y calculamos sus imágenes. Sean $0{,}9 < 0{,}99 < 0{,}999 < 1{,}001 < 1{,}01 < 1{,}1$ que tendrán las siguientes imágenes correspondientes:
$2{,}19 > 2{,}0199 > 2{,}001999 > 1{,}997999 > 1{,}9799 > 1{,}79$

Luego la función es decreciente en el punto $x = 1$

4. Indica en que intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones y calcular, si los tienen, sus máximos y mínimos relativos.

   a) $f(x) = -x^3 + 1$

   Solución:

   - **creciente:** Nunca
   - **decreciente:** Siempre
   - **máximos:** No tiene
   - **mínimos:** No tiene

   b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

   Solución:

   - **creciente:** $(1, +\infty)$
   - **decreciente:** $(-\infty, 1)$
   - **máximos:** No tiene
   - **mínimos:** $(1, 0)$

   c) $f(x) = x^3 - 3x$

   Solución:

   - **creciente:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - **decreciente:** $(-1, 1)$
   - **máximos:** $(-1, 2)$
   - **mínimos:** $(1, -2)$

   d) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x}$

   Solución:

   - **creciente:** $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - **decreciente:** Nunca
   - **máximos:** No tiene
   - **mínimos:** No tiene

www.musat.net

e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Solución:

- **creciente:** Nunca
- **decreciente:** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- **máximos:** No tiene
- **mínimos:** No tiene

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x}$

Solución:

- **creciente:** $(-\infty, -1) \cup (-1, -1/2)$
- **decreciente:** $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$
- **máximos:** $(-1/2, -4)$
- **mínimos:** No tiene

3.3.4. Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes.

Problema 497 Se pide:

1. Explicar si las siguientes funciones están acotadas y porqué

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

   Solución:

   No está acotada, por no estarlo ni superior ni inferiormente.

   b) $f(x) = |x-1|$

   Solución:

   La función está acotada inferiormente, ya que todos los valores de $f(x)$ son siempre mayores de cero; pero no lo está superiormente, y por tanto, no está acotada.

   c) $f(x) = \cos x$

   Solución:

   Todos los valores de $f(x)$ están comprendidos entre $-1 \le f(x) \le 1$, es decir, está acotada superior e inferiormente, y por tanto, está acotada.

2. Estudiar la simetría de las siguientes funciones

www.musat.net

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

Solución:

$f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al eje de ordenadas (eje Y).

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^6 + 3} = \dfrac{x^2 - 1}{x^6 + 3} = f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al eje de ordenadas (eje Y).

c) $f(x) = \dfrac{|x| - 5}{x}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{|-x| - 5}{-x} = -\dfrac{|x| - 5}{x} = -f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al origen.

d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

Solución:

$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - 3(-x)^2 - 5} = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5} = f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al eje de ordenadas (eje Y).

3. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^3 - 8x$

Solución:

$2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \pm 2$ luego los puntos de corte serán $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

Solución:

$\dfrac{x^2 - 1}{x^6 + 3} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

$f(0) = -\dfrac{1}{3}$

www.musat.net

Luego los puntos de corte serán $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{|x| - 5}{x}$

Solución:

$\dfrac{|x| - 5}{x} = 0 \Longrightarrow x = 5$

No hay cortes con el eje Y. Luego el único punto de corte con los ejes es $(5, 0)$.

d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

Solución:

$\sqrt{x^4 - 3x^2 - 5} = 0 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow x = -2{,}047579645,\ \ x = 2{,}047579645$
$f(0) = \sqrt{-5}$, luego no hay corte con el eje Y.

Los puntos de corte serán $(-2{,}047579645, 0)$ y $(2{,}047579645, 0)$.

4. clasifica el tipo de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -\dfrac{1}{|x - 2|}$

Solución:

Tiene una discontinuidad inevitable en $x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

Solución:

Tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

Tiene una discontinuidad inevitable en $x = 0$, donde pega un salto.

d) $\begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} & x < -1 \\ 9 & \text{si} & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} & x > 0 \end{cases}$

www.musat.net

Solución:

Tiene una discontinuidad inevitable en $x = 0$, donde pega un salto.

5. Idear cuatro funciones definidas a trozos y calcular su dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías, continuidad y por último decir si están acotadas.

6. Representar gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos

$a)$ $$\begin{cases} -2x-5 & \text{si} \quad x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$b)$ $$\begin{cases} x-5 & \text{si} \quad x < -3 \\ 4 & \text{si} \quad -3 \le x \le 0 \\ x+4 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$c)$ $$\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$d)$ $$\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad -1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

3.3.5. Operaciones con funciones. Funciones recíprocas

Problema 498 Se pide:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$, calcuar si es posible

   $a)$ $(f+g)(4)$

   Solución:

   $(f+g)(4) = f(4) + g(4) = 62 + \sqrt{6}$

   $b)$ $(f+g)(-2)$

   Solución:

www.musat.net

$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = -10$

c) $(3 \cdot f)(-3)$

Solución:

$(3 \cdot f)(-3) = -87$

d) $(f \cdot g)(0)$

Solución:

$(f \cdot g)(0) = -2 + \sqrt{2}$

e) $(f \cdot g)(-3)$

Solución:

$(f \cdot g)(-3)$ no existe, ya que -3 no pertenece al dominio de $g(x)$.

f) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$

Solución:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(4) = \dfrac{f(4)}{g(4)} = 25{,}31139400$

2. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Dominio de f

Solución:

f estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$; luego $Dom(f) = R - \{5\}$.

b) Dominio de g

Solución:

f estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x = 0$; luego $Dom(g) = R - \{0\}$.

c) Calcular la función $(2 \cdot f)$ y su dominio.

www.musat.net

Solución:

$(2 \cdot f)(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \dfrac{2}{x-5} = \dfrac{4}{x-5}$

$(2 \cdot f)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$; luego $Dom(2 \cdot f) = R - \{5\}$.

d) Calcular la función $(f + g)$ y su dominio.

Solución:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{2}{x-5} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x-5}{x(x-5)}$

$(f + g)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x(x - 5) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 5$; luego $Dom(f + g) = R - \{0, 5\}$.

e) Calcular $(f \cdot g)$ y su dominio.

Solución:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{2}{x-5} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-5)}$

$(f \cdot g)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x(x - 5) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 5$; luego $Dom(f \cdot g) = R - \{0, 5\}$.

f) Calcular $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ y su dominio.

Solución:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{2}{x-5}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{2x}{x-5}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$; luego $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = R - \{5\}$

3. Siendo las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x$, calcular las funciones compuestas

   a) $(g \circ g)$

   Solución:

www.musat.net

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x) = 2 \cdot (2x) = 4x$$

b) $(f \circ g)$

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1$$

c) $(g \circ f)$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = 2(x^3 + 1) = 2x^3 + 2$$

4. Siendo las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular las funciones compuestas

a) $(g \circ g)$

Solución:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

b) $(f \circ g)$

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right) - 2} = \frac{x}{1 - 2x}$$

c) $(g \circ f)$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x-2}\right)} = x - 2$$

5. Calcula la función recíproca de

a) $f(x) = 5x$

Solución:

Despejamos x de la ecuación $y = 5x \Longrightarrow x = \dfrac{y}{5}$

www.musat.net

Intercambiamos las variables x e $y \Longrightarrow y = \dfrac{x}{5}$

La función recíproca es $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{5}$

b) $f(x) = 3x + 1$

Solución:

Despejamos x de la ecuación $y = 3x + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y-1}{3}$

Intercambiamos las variables x e $y \Longrightarrow y = \dfrac{x-1}{3}$

La función recíproca es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{y} \\ y = \sqrt{x} \Longrightarrow x = y^2 \end{cases}$$

Luego la función recíproca será $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

3.3.6. Puntos de Corte

Problema 499 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(3, 0)$

Problema 500 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 2}$$

www.musat.net

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 15 \Longrightarrow (0, 15)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Longrightarrow (-6, 0)$ y $(5, 0)$

Problema 501 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^3 + 2}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -10 \Longrightarrow (0, -10)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 20 \Longrightarrow (-5, 0)$ y $(4, 0)$

Problema 502 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 4}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-2, 0)$

Problema 503 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2 \Longrightarrow (0, -2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(-3, 0)$

Problema 504 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 5}$$

www.musat.net

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3 \Longrightarrow (0, -3)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Longrightarrow (-3, 0)$ y $(5, 0)$

3.3.7. Simetría

Problema 505 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^4 - 1}$
2. $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 2}{(-x)^4 - 1} = f(x) \Longrightarrow$ par
2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2} \Longrightarrow$ ni par ni impar

Problema 506 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$
2. $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = -f(x) \Longrightarrow$ impar
2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2} \Longrightarrow$ ni par ni impar

Problema 507 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 - x^2 + 1}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^3}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4}$

www.musat.net

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = -f(x) \Longrightarrow$ impar

2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^2 - (-x) - 1}{(-x)^3} = -\dfrac{x^2 + x - 1}{x^3} \Longrightarrow$ ni par ni impar

3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4} = h(x) \Longrightarrow$ par

Problema 508 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$

3. $h(x) = \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^4 - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 + (-x)^2 - 1}{(-x)^3} = -f(x) \Longrightarrow$ impar

2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^2 + (-x) - 1}{(-x)^3 - 1} = -\dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 + 1} \Longrightarrow$ ni par ni impar

3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^4 + (-x)^2 - 1}{(-x)^4 - 1} = h(x) \Longrightarrow$ par

Problema 509 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 1}$

3. $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = -f(x) \Longrightarrow$ impar

2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^2 + (-x) - 1}{(-x)^3 - (-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + 1} \Longrightarrow$ ni par ni impar

www.musat.net

3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2 - 1} = h(x) \Longrightarrow$ par

Problema 510 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^4 - 3}{x^3}$
2. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^4}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 3}{(-x)^3} = -f(x) \Longrightarrow$ impar
2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^3 + 1}{(-x)^4} = \dfrac{-x^3 + 1}{x^4} \Longrightarrow$ ni par ni impar

Problema 511 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x}$
2. $g(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2 + 1}{3(-x)} = -f(x) \Longrightarrow$ impar
2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^3 + 2}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 + 2}{x^2} \Longrightarrow$ ni par ni impar

Problema 512 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4 + 2}$
2. $g(x) = \dfrac{4x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = \dfrac{2x^5}{x^2 - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2 - 1}{(-x)^4 + 2} = -f(x) \Longrightarrow$ par
2. $g(-x) = \dfrac{4(-x)^3 + (-x) + 1}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-4x^3 - x + 1}{x^2 + 1} \Longrightarrow$ ni par ni impar

www.musat.net

3. $h(-x) = \dfrac{2(-x)^5}{(-x)^2 - 1} = -h(x) \Longrightarrow$ impar

Problema 513 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$
2. $g(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$
3. $h(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = f(x) \Longrightarrow$PAR
2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3(-x)^2 + 1} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR
3. $h(-x) = \dfrac{2(-x) - 1}{(-x)^2 + 2} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 514 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^6 - x^2 - 1}{x^4 + 2}$
2. $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{3x^3}$
3. $h(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^6 - (-x)^2 - 1}{(-x)^4 + 2} = f(x) \Longrightarrow$PAR
2. $g(-x) = \dfrac{2(-x)^2 - 1}{3(-x)^3} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR
3. $h(-x) = \dfrac{3(-x) + 2}{(-x) + 1} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 515 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^6 + x^2 - 1}$

www.musat.net

2. $g(x) = \dfrac{3x^5}{x^2+4}$

3. $h(x) = \dfrac{2x^2+x}{x-1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-3}{(-x)^6+(-x)^2-1} = f(x) \Longrightarrow$PAR

2. $g(-x) = \dfrac{3(-x)^5}{(-x)^2+4} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR

3. $h(-x) = \dfrac{2(-x)^2+(-x)}{(-x)-1} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 516 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{3x^6-2}{x^4-1}$

2. $g(x) = \dfrac{-2x^3}{x^2+1}$

3. $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{3(-x)^6-2}{(-x)^4-1} = f(x) \Longrightarrow$PAR

2. $g(-x) = \dfrac{-2(-x)^3}{(-x)^2+1} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR

3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)-1} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 517 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{4x^4+1}{x^2-2}$

2. $g(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$

3. $h(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+3}$

Solución:

www.musat.net

1. $f(-x) = \dfrac{4(-x)^4+1}{(-x)^2-2} = f(x) \Longrightarrow$PAR

2. $g(-x) = \dfrac{3(-x)^4+1}{(-x)^3} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR

3. $h(-x) = \dfrac{2(-x)^2+1}{(-x)+3} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 518 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^6+1}$

2. $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$

3. $h(x) = \dfrac{x^5-1}{x^3}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+2}{(-x)^6+1} = f(x) \Longrightarrow$PAR

2. $g(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+4} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR

3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^5-1}{(-x)^3} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 519 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{3x}$

2. $g(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2+1}{3(-x)} = -f(x) \Longrightarrow$ impar

2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^3+2}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3+2}{x^2} \Longrightarrow$ ni par ni impar

www.musat.net

3.3.8. Composición de Funciones

Problema 520 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x - 1}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 1}{2} = \frac{x-2}{2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{x^2-1}{2}\right) - 1} = \sqrt{\frac{x^2-3}{2}}$$

Problema 521 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2-1}) = \frac{(\sqrt{x^2-1}) - 1}{2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{2}$$

Problema 522 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \frac{2(\sqrt{x-1}) - 1}{2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3+4x-4x^2}}{2}$$

Problema 523 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$$

www.musat.net

Problema 524 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}, \quad g(x) = x - 1$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \frac{2(x-1)}{(x-1)-1} = \frac{2(x-1)}{x-2}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2\frac{2x}{x-1}}{(\frac{2x}{x-1}-1)-1} = \frac{4x}{x+1}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-1) = (x-1) - 1 = x - 2$

Problema 525 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x-1}{2x}, \quad g(x) = x + 2$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{2x}\right) = \frac{(x-1)}{2x} + 2 = \frac{5x-1}{2x}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \frac{(x+2)-1}{2(x+2)} = \frac{x+1}{2(x+2)}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{2x}\right) = \frac{\frac{x-1}{2x}-1}{2\frac{x-1}{2x}} = \frac{x+1}{2(1-x)}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+2) = (x+2) + 2 = x + 4$

Problema 526 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = x + 1$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x-1)}{x+1} + 1 = \frac{2x}{x+1}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \frac{(x+1)-1}{(x+1)+1} = \frac{x}{x+2}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = -\frac{1}{x}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1)+1 = x+2$

Problema 527 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x}, \quad g(x) = x+3$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x+1}{2x}\right) = \frac{2x+1}{2x} + 3 = \frac{8x-1}{2x}$
2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+3) = \frac{2(x+3)-1}{2(x+3)} = \frac{2x+5}{2x+6}$
3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2x+1}{2x}\right) = \frac{2\frac{2x+1}{2x}+1}{\frac{2x+1}{2x}} = \frac{x-1}{2x-1}$
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+3) = (x+3)+3 = x+6$

Problema 528 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x+2}{x}, \quad g(x) = x-2$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{x+2}{x} - 2 = \frac{2-x}{x}$
2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \frac{x-2+2}{x-2} = \frac{x}{x-2}$
3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{\frac{x+2}{x}+2}{\frac{x+2}{x}} = \frac{3x+2}{x+2}$
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-2) = (x-2)-2 = x-4$

Problema 529 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x+3}{2x}, \quad g(x) = x-4$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{2x}\right) = \frac{x+3}{2x} - 4 = \frac{3-7x}{2x}$
2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \frac{x-4+3}{2(x-4)} = \frac{x-1}{2(x-4)}$
3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+3}{2x}\right) = \frac{\frac{x+3}{2x}+3}{2\frac{x+3}{2x}} = \frac{7x+3}{2x+6}$
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-4) = (x-4)-4 = x-8$

www.musat.net

3.3.9. Función Inversa

Problema 530 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$
Solución:

$$y = \frac{2x-1}{x+2}; \quad yx+2y = 2x-1; \quad yx-2x = -2y-1; \quad (y-2)x = -(2y+1) \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-2}$$

Problema 531 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$
Solución:

$$y = \frac{3x+2}{x+1}; \quad yx+y = 3x+2; \quad yx-3x = -y+2; \quad (y-3)x = -y+2 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-y+2}{y-3} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x-3}$$

Problema 532 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x+2}{3x+2}$
Solución:

$$y = \frac{2x+2}{3x+2}; \quad 3yx+2y = 2x+2; \quad 3yx-2x = -2y+2; \quad (3y-2)x = -2y+2 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-2y+2}{3y-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2-2x}{3x-2}$$

Problema 533 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$
Solución:

$$y = \frac{2x-3}{x+1}; \quad yx+y = 2x-3; \quad yx-2x = -y-3; \quad (y-2)x = -(y+3) \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{y+3}{y-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{x+3}{x-2}$$

Problema 534 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$
Solución:

$$y = \frac{2x-1}{x+3}; \quad yx+3y = 2x-1; \quad yx-2x = -3y-1; \quad (y-2)x = -(3y+1) \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{3y+1}{y-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3x+1}{x-2}$$

www.musat.net

Problema 535 Calcular la función inversa de $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
Solución:

$$y=\frac{x+1}{x-1};\quad yx-y=x+1;\quad yx-x=y+1;\quad (y-1)x=y+1\Longrightarrow$$

$$x=\frac{y+1}{y-1}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

Problema 536 Calcular la función inversa de $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$

Solución:

$$y=\frac{3x-1}{2x+1}\Longrightarrow 2yx+y=3x-1\Longrightarrow 2yx-3x=-(y+1)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x=-\frac{y+1}{2y-3}\Longrightarrow f^{-1}(x)=-\frac{x+1}{2x-3}$$

Problema 537 Calcular la función inversa de $f(x)=\dfrac{x+3}{3x-1}$

Solución:

$$y=\frac{x+3}{3x-1}\Longrightarrow 3yx-y=x+3\Longrightarrow 3yx-x=3+y\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x=\frac{3+y}{3y-1}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+3}{3x-1}$$

Problema 538 Calcular la función inversa de $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

Solución:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}\Longrightarrow yx-y=2x+3\Longrightarrow yx-2x=3+y\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x=\frac{y+3}{y-2}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

Problema 539 Calcular la función inversa de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

Solución:

$$y=\frac{2x+1}{x-2}\Longrightarrow yx-2y=2x+1\Longrightarrow yx-2x=1+2y\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2y+1}{y-2}\Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

www.musat.net

Problema 540 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$

Solución:

$$y = \frac{x+3}{2-x} \Longrightarrow 2y - xy = x + 3 \Longrightarrow -yx - x = 3 - 2y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3-2y}{-y-1} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Problema 541 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$

Solución:

$$y = \frac{2x-1}{2-x} \Longrightarrow 2y - xy = 2x - 1 \Longrightarrow -yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1+2y}{y+2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

Problema 542 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

Solución:

$$y = \frac{x-1}{x+3}; \quad yx + 3y = x - 1; \quad yx - x = -3y - 1; \quad (y-1)x = -(3y+1) \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{3y+1}{y-1} \Longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3x+1}{x-1}$$

3.3.10. Monotonía

Problema 543 Comprobar si la función $f(x) = 10^{-x}$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Solución:

$$1,9 < 1,99 < 2 < 2,09 < 2,1$$

$$0,0126 > 0,0102 > 0,01 > 0,008 > 0,0079$$

Luego la función es decreciente en $x = 2$.

Problema 544 Comprobar si la función $f(x) = 3^x$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Solución:

$$1,9 < 1,99 < 2 < 2,09 < 2,1$$

$$8,0636 < 8,9016 < 9 < 9,935 < 10,045$$

Luego la función es creciente en $x = 2$.

www.musat.net

Problema 545 Comprobar si la función $f(x) = x^x$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Solución:

$$1,9 < 1,99 < 2 < 2,09 < 2,1$$

$$3,385570343 < 3,932942726 < 4 < 4,667730120 < 4,749638091$$

Luego la función es creciente en $x = 2$.

3.4. Límites de funciones

3.4.1. Límite de una función en un punto

Problema 546 Se pide:

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} 1 = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (1 + x^2) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} f(x)$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (2x + 2) = 6 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 2} f(x) \text{ No existe}$$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} f(x)$

Solución:

$$\lim\limits_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} (1 + x^2) = 2$$

www.musat.net

Observar que $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = 2$

2. Utilizar la calculadora para calcular a que valores se acercan las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ en $x = 3$

   Solución:

   $f(2,9) = 5{,}9 \quad f(2,99) = 5{,}99 \quad f(2,999) = 5{,}999 \Longrightarrow$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6$

   $f(3{,}1) = 6{,}1 \quad f(3{,}01) = 6{,}01 \quad f(3{,}001) = 6{,}001 \Longrightarrow$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 6$

   Podemos concluir con que $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} f(x) = 6$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$ en $x = -3$

   Solución:

   $f(-2,9) = -3{,}9 \quad f(-2,99) = -3{,}99 \quad f(-2,999) = -3{,}999 \Longrightarrow$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = -4$

   $f(-3{,}1) = -4{,}1 \quad f(-3{,}01) = -4{,}01 \quad f(-3{,}001) = -4{,}001 \Longrightarrow$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = -4$

   Podemos concluir con que $\lim\limits_{x \longrightarrow -3} f(x) = -4$

Problema 547 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

   Solución:

www.musat.net

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x+1}{x-1} = 3$$

3.4.2. Límite de una función en el infinito

Problema 548 Se pide:

1. Para las siguientes funciones, calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

   a) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3}$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2-2}{x^3} = 0 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2-2}{x^3} = 0 \end{array}\right.$$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+5}$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2-2}{x^2+5} = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2-2}{x^2+5} = 1 \end{array}\right.$$

   c) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$

   Solución:

www.musat.net

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = -\infty \end{cases}$$

d) $f(x) = 3^x$

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 3^x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} 3^x = 0 \end{cases}$$

2. Calcular los límites de las siguientes funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1) = +\infty$$

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x^3 - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^3 - 1) = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (x^3 - 1)$

Solución:

www.musat.net

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}(x^3-1)=-\infty$$

e) $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(-x^5-7)$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(-x^5-7)=-\infty$$

f) $\lim_{x\longrightarrow-\infty}(-x^5-7)$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}(-x^5-7)=+\infty$$

3.4.3. Cálculo de límites de funciones racionales

Problema 549 Se pide:

1. Calcular los siguientes límites y, en caso de que no existan, calcular los laterales.

   a) $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x+5}{x-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x+5}{x-1}=7$$

   b) $\lim_{x\longrightarrow -2}\dfrac{x^2-2}{x+3}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x^2-2}{x+3}=2$$

   c) $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{x-1}{x-3}$

www.musat.net

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x-1}{x-3}=\left[\frac{2}{0}\right]\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{x-1}{x-3}=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x-1}{x-3}=+\infty$$

d) $\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x-1}{x+2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x-1}{x+2}=\left[\frac{-3}{0}\right]\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{x-1}{x+2}=+\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{x-1}{x+2}=-\infty$$

e) $\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{1-x}{x-3}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{1-x}{x-3}=\left[\frac{-2}{0}\right]\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{1-x}{x-3}=+\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{1-x}{x-3}=-\infty$$

2. Calcular los siguientes límites simplificando fracciones:

a) $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}(x+1)=2$$

b) $\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x+2}{x^2-4}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x+2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{4}$$

www.musat.net

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x^3}{3x^4-x^3}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3}{3x^4-x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3}{x^3(3x-1)}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{3x-1}=-1$$

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow\sqrt{3}}\dfrac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}}\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}}\frac{x-\sqrt{3}}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}}\frac{1}{x+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow -7}\dfrac{x^2+14x+49}{x^2-49}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -7}\frac{x^2+14x+49}{x^2-49}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow -7}\frac{(x+7)^2}{(x-7)(x+7)}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow -7}\frac{x+7}{x-7}=\frac{0}{-14}=0$$

3. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-3}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2-3x+4}{x^2-3}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}=1$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{x^4-2x-2}{3x^4+1}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^4-2x-2}{3x^4+1}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{1-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{3+\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{3}$$

www.musat.net

c) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^3+5x-1}{x^2+2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^3+5x-1}{x^2+2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} = +\infty$$

3.5. Continuidad

3.5.1. Continuidad en un punto y en un intervalo

Problema 550 1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{x}{2}+3 & \text{si} \quad -2 \le x \le 0 \\ 5 & \text{si} \quad x = 0 \\ x+3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x=-2, \text{ y en } x=0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x=-2$

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow-2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-2} 2 = 2 \\ \lim_{x\longrightarrow-2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-2} \left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow-2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x=-2$.

Ahora estudiamos en $x=0$

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow0} \left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 3 \\ \lim_{x\longrightarrow0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow0} (x+3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow0^+} f(x) \ne f(0)$$

www.musat.net

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x & \text{si} \quad -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} (-2) = -2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} x = -2 \\ f(-2) \text{ no definida} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) \neq f(-2)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Luego la función es continua en el punto $x = 0$.

c)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 2$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} |x| = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego la función es continua en el punto $x = -1$.

Ahora estudiamos en $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} x^2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 2$.

d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si} & x < -2 \\ x^2 & \text{si} & -2 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} & x = 1 \\ x & \text{si} & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} (2x+8) = 4 \\ f(-2) = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 4$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} x = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} x^2 = 1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Ahora estudiamos en $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} x = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

www.musat.net

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

2. Estudia si la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad -8 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $(-8, 5]$.

Solución:

La función es continua en los intervalos $(-8, 2)$ y en el $(2, 5]$. Sólo nos falta por comprobar la continuidad en el punto $x = 2$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 4 = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (x+2) = 4 \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = f(2) \\ \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

Luego la función es continua en el punto $x = 2$ y, por tanto, la función es continua en el intervalo $(-8, 5]$.

3. Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ kx - 2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3$$

Solución:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3} x^2 - 2 = 7 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3} kx - 2 = 3k - 2 \end{cases}\right. \Longrightarrow 3k - 2 = 7 \Longrightarrow k = 3$$

Cuando $k = 3$ la función $f(x)$ es continua en $x = 3$.

4. Calcular cuánto deben valer a y b para que la función siguiente sea continua en todo su dominio.

$$\begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x < 2 \\ ax + b & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

www.musat.net

Solución: Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}(x^2+a) = 4+a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}(ax+b) = 2a+b \end{array}\right. \Longrightarrow 4+a = 2a+b \Longrightarrow a+b = 4$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}(ax+b) = 3a+b \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 4 = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow 3a+b = 4$$

$$\left\{\begin{array}{r} 3a+b=4 \\ a+b=4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=4 \end{array}\right.$$

La función es continua en todo su dominio si $a = 0$ y $b = 4$

3.5.2. Tipos de discontinuidad

Problema 551 Se pide:

1. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica de que tipo son:

   a)

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x+3 & \text{si} & x \le 1 \\ x^2+2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2x+3) = 5 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x^2+2) = 3 \end{array}\right.$$

   La discontinuidad en el punto $x = 1$ es inevitable, en dicho punto hay un salto. El valor del salto de la función en dicho punto será:

$$\left|\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) - \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)\right| = |3-5| = |-2| = 2$$

   b)

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccr} 2 & \text{si} & -8 < x < -2 \\ x^2-1 & \text{si} & -2 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} & 1 < x < 6 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Solución:

En $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} (x^2 - 1) = 3 \end{cases}$$

Los límites laterales son distintos y por tanto la función pega un salto en ese punto, la discontinuidad es inevitable. El valor del salto es

$$\left| \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) - \lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) \right| = |3 - 2| = 1$$

En $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x^2 - 1) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} 0 = 0 \\ \\ f(1) \text{ no definida} \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales, basta definir $f(1) = 0$ para que la función sea continua en $x = 1$, luego la discontinuidad es evitable.

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} & x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} & 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

En $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} (x^2 - 2) = -1 \\ \\ f(-1) \text{ no definida} \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales, basta definir $f(-1) = -1$ para que la función sea continua en $x = -1$, luego la discontinuidad es evitable.

www.musat.net

En $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x^2-2) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales y el valor coincide con el valor de la función en $x = 1$, luego la función es continua en este punto.

En $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 2 = 2 \end{cases}$$

Los límites laterales son distintos y por tanto la función pega un salto en ese punto, la discontinuidad es inevitable. El valor del salto es

$$\left|\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)\right| = \left|2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$$

2. Calcular el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a)

$$\begin{cases} x^3 - 2 & \text{si} \quad 2 > x \\ 3x & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}(x^3-2) = 6 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 3x = 6 \end{cases}$$

El verdadero valor es $f(2) = 6$.

b)

$$f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+2} \quad \text{en } x = -2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(x+5)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2}(x+5) = 3$$

Luego el verdadero valor es $f(-2) = 3$.

www.musat.net

3.5.3. Continuidad y Operaciones:

Problema 552 Se pide:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 - 9$, estudia la continuidad de las funciones siguientes:

   a) $f + g$:

   Solución:

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + x^2 - 9 = 2x^2 + 3x - 9$$

   Función continua en todo R por ser un polinomio.

   b) $f \cdot g$: **Solución:**

   $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 3x)(x^2 - 9) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 27x$$

   Función continua en todo R por ser un polinomio.

   c) $\dfrac{f}{g}$: **Solución:**

   $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$$

   La función será discontinua en aquellos puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $g(x) = x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = -3$. Luego la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en $R - \{-3, 3\}$

   En $x = 3$:

   $$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{0}$$

   Indeterminación de signo que evaluamos mediante los límites laterales:

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} \dfrac{x}{x-3} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} \dfrac{x}{x-3} = -\infty \end{cases}$$

   Luego en el punto $x = 3$ no existe el límite de la función, en este punto hay un salto entre $-\infty$ y $+\infty$. La discontinuidad en $x = 3$ es inevitable.

   En $x = -3$:

   $$\lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{2}$$

www.musat.net

Bastaría definir $f(-3) = \dfrac{1}{2}$, para que la función sea continua. Luego la discontinuidad es evitable en $x = -3$.

d) $\dfrac{g}{f-g}$: **Solución:**

$$\left(\frac{g}{f-g}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)-g(x)} = \frac{x^2-9}{3x+9}$$

La función será discontinua en aquellos puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $3x+9=0 \Longrightarrow x=-3$. Luego la función $\dfrac{g}{f-g}$ es continua en $R-\{-3\}$

Pero en $x=-3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3}\frac{x^2-9}{3x+9} = \lim_{x\longrightarrow -3}\frac{(x-3)(x+3)}{3(x+3)} = \lim_{x\longrightarrow -3}\frac{x-3}{3} = -2$$

Bastaría definir $f(-3) = -2$, para que la función sea continua. Luego la discontinuidad es evitable en $x=-3$.

2. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2+9x+14}{x+2}$ y, si es posible, complétala para que sea continua en todo R.

Solución:

La función será discontinua en aquellos puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$. Luego la función $f(x)$ es continua en $R-\{-2\}$

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x^2+9x+14}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(x+7)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2}(x+7) = 5$$

Bastaría definir $f(-2)=5$, para que la función sea continua. Luego la discontinuidad es evitable en $x=-3$. Escribimos

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+9x+14}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ \\ 5 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$$

Diremos que $F(x)$ es la extensión por continuidad de $f(x)$.

www.musat.net

3.5.4. Problemas de Continuidad

Problema 553 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - k & si \quad x < 1 \\ kx & si \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (3x^2 - k) = 3 - k$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} kx = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$3 - k = k \Longrightarrow 2k = 3 \Longrightarrow k = \dfrac{3}{2}$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < & -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} & -2 \leq x < & 0 \\ x + 3 & \text{si} & x > & 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3 \right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(x+3) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

La función no está definida en $x = 0$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(0) = 3$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccrl} 2 & \text{si} & x < & -2 \\ \dfrac{x}{2}+3 & \text{si} & -2 \le x < & 0 \\ 3 & \text{si} & x = & 0 \\ x+3 & \text{si} & x > & 0 \end{array}\right.$$

Problema 554 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$f(x) = \left\{\begin{array}{rcl} 3x^2 - k & si & x < 1 \\ kx & si & x \ge 1 \end{array}\right.$ es continua en todo R

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(3x^2 - k) = 3 - k$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} kx = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$3 - k = k \Longrightarrow 2k = 3 \Longrightarrow k = \dfrac{3}{2}$

www.musat.net

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3 \right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2} + 3 \right) = 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (x + 3) = 3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

La función no está definida en $x = 0$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(0) = 3$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad x = 0 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

www.musat.net

Problema 555 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ 8 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero estudiamos en $x = 3$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3}(x^2-1) = 8 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3} 8 = 8 \\ f(3) = 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

Luego la función es continua en el punto $x = 3$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x^2-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

La función no está definida en $x = 1$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(1) = 0$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ 8 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Problema 556 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3kx^2-2k & si \quad x < 2 \\ kx-1 & si \quad x \ge 2 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

www.musat.net

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(3kx^2 - 2k) = 10k$$
$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(kx - 1) = 2k - 1$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 2, mejor dicho, en el 2 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$10k = 2k - 1 \implies 8k = -1 \implies k = -\dfrac{1}{8}$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + 3 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ \dfrac{x^2+1}{3} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero voy a estudiar en $x = 3$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3}\left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = \dfrac{10}{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3}\left(\dfrac{x^2+1}{3}\right) = \dfrac{10}{3} \\ f(3) = \left(\dfrac{x^2+1}{3}\right) = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = f(3) = \frac{10}{3}$$

Luego la función es continua en el punto $x = 3$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

www.musat.net

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

La función no está definida en $x = 1$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(1) = 4$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{1}{x} + 3 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ \dfrac{x^2+1}{3} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Problema 557 Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 3kx + 1 & si \quad x < 1 \\ kx^2 - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} (kx^2 - 3kx + 1) = -2k + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} (kx^2 - 1) = k - 1$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$-2k + 1 = k - 1 \Longrightarrow 3k = 2 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{3}$

Problema 558 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1 < x < 5 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 5$$

www.musat.net

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero voy a estudiar en $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego la función es continua en el punto $x = -1$.

Ahora estudiamos en $x = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 5} \left(\dfrac{x^2+1}{2}\right) = 13 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 5$, y es no evitable; En este punto la función pega un salto.

No tiene extensión por continuidad.

Problema 559 Se pide:

1. Encuentra los valores de k para los que la función

   $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} kx^2+3 & si & x<3 \\ (k+1)x & si & x\geq 3 \end{array}\right.$ es continua en todo R

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

   $$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3}(kx^2+3) = 9k+3$$
   $$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3}(k+1)x = 3(k+1)$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 3, mejor dicho, en el 3 es donde tenemos el problema; para que la función sea

continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$9k + 3 = 3(k + 1) \implies 6k = 0 \implies k = 0$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 6 \\ x - 4 & \text{si} \quad x > 6 \end{cases} \quad \text{en } x = 0, \text{ y en } x = 6$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Solución:

Primero estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x-2}{2} \right) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$$

Luego la función es continua en el punto $x = 0$.

Ahora estudiamos en $x = 6$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 6} \left(\dfrac{x-2}{2} \right) = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 6} (x - 4) = 2 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x \longrightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 6^+} f(x) \neq f(6)$$

La función no está definida en $x = 6$

Luego la función no es continua en el punto $x = 6$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(6) = 2$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

www.musat.net

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si} \quad 0 \le x < 6 \\ 2 & \text{si} \quad x = 6 \\ x-4 & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

Problema 560 Encuentra los valores de k para los que la función

$f(x) = \begin{cases} 2kx - 1 & si \quad x < 3 \\ x + 2k & si \quad x \ge 3 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (2kx - 1) = 6k - 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (x + 2k) = 3 + 2k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 2, mejor dicho, en el 2 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$6k - 1 = 3 + 2k \implies 4k = 4 \implies k = 1$

Problema 561 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ x + 1 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Se dan valores y a continuación se dibuja.
2. En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, mientras que en $x = 3$ la discontinuidad es inevitable, hay un salto.

Problema 562 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ x - 1 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.

2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Se dan valores y a continuación se dibuja.

2. En $x = 1$ es continua, mientras que en $x = 3$ la discontinuidad es inevitable, hay un salto.

Problema 563 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ x + 5 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.

2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Se dan valores y a continuación se dibuja.

2. En $x = 1$ es continua, mientras que en $x = 3$ la discontinuidad es inevitable, hay un salto.

Problema 564 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x + 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- En $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^-} (5x) = -5 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^+} (3x + 1) = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinua inevitable}$$

www.musat.net

- En $x=0$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(3x+1)=1\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(x+1)=1\\ f(0)\ \text{no definida}\end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua evitable}$$

- En $x=1$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x+1)=2\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(2x)=2\\ f(1)=2\end{array}\right. \Longrightarrow \text{continua}$$

Problema 565 Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc}2ax^2+3ax-2 & \text{si} & x<1\\ a^2x-2 & \text{si} & x\geq 1\end{array}\right.$$

calcular a para que esta función sea continua en $x=1$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x=1$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(2ax^2+3ax-2)=5a-2\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(a^2x-2)=a^2-2\end{array}\right. \Longrightarrow 5a-2=a^2-2\Longrightarrow a=0,\ a=5$$

Problema 566 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccr}-3x & \text{si} & x<-1\\ x+4 & \text{si} & -1\leq x<0\\ x^2+4 & \text{si} & 0<x\leq 1\\ 3x+8 & \text{si} & x>1\end{array}\right.$$

en $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.

Solución:

- En $x=-1$

www.musat.net

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}(-3x) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(x+4) = 3 \\ f(-1) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{continua}$$

- En $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x+4) = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(x^2+4) = 4 \\ f(0) \ \text{ no definida} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua evitable}$$

- En $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x^2+4) = 5 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(3x+8) = 11 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua inevitable}$$

Problema 567 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} ax^2 + a^2x + 3 & \text{si} & x < 1 \\ 2a^2x + 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

calcular a para que esta función sea continua en $x = 1$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(ax^2 + a^2x + 3) = a + a^2 + 3 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(2a^2x + 1) = a^2 + 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a+a^2+3 = a^2+1 \Longrightarrow a = 2, \ a = -1$$

Problema 568 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccr} 2x & \text{si} & x < -1 \\ 3x+1 & \text{si} & -1 \leq x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} & 0 < x \leq 1 \\ 5x+6 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- En $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}(2x) = -2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(3x+1) = -2 \\ f(-1) = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{ continua}$$

- En $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(3x+1) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(x^2+1) = 1 \\ f(0) = \text{ no definida} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{ discontinua evitable}$$

- En $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x^2+1) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(5x+6) = 11 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{ discontinua inevitable}$$

Problema 569 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} a^2x^2 - 2ax + 1 & \text{si} & x < 1 \\ 2a^2x - 2 & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

calcular a y b para que esta función sea continua en $x = 1$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(a^2x^2 - 2ax + 11) = a^2 - 2a + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(2a^2x - 2) = 2a^2 - 2 \end{array}\right. \Longrightarrow a^2 - 2a + 1 = 2a^2 - 2 \Longrightarrow a = 1,\ a = -3$$

Problema 570 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 4x+1 & \text{si} & x \leq 0 \\ x & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 3x-2 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} & x \geq 2 \end{array}\right.$$

en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(4x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Discontinua inevitable}$$

En $x = 1$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} x = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(3x- = 1 \\ f(1) \text{ no definida} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Discontinua evitable}$$

En $x = 2$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 2x = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Continua}$$

Problema 571 Estudiar la continuidad de la función
$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 4x+1 & \text{si} & x \le 0 \\ x & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 3x-2 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} & x \ge 2 \end{array}\right.$$
en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(4x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Discontinua inevitable}$$

En $x = 1$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} x = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(3x- = 1 \\ f(1) \text{ no definida} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Discontinua evitable}$$

En $x = 2$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 2x = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Continua}$$

www.musat.net

3.6. Asíntotas de una función

Problema 572 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{2x^2 - 1}{x + 1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x + 1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x+1}}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x} = 2$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x - 1}{x + 1} = -2$$

La asíntota oblicua es $y = 2x - 2$

Problema 573 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

www.musat.net

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{2x^2-1}{x+1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x+1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x+1}}{x} = \frac{2x^2-1}{x^2+x} = 2$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - a\cdot x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-2x-1}{x+1} = -2$$

La asíntota oblicua es $y = 2x - 2$

Problema 574 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3-2x+1}{x^2-1}$$

Solución:

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{2x^3-2x+1}{x^2-1} = \pm\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{2x^3-2x+1}{x^2-1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^3-2x+1}{x^2-1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

www.musat.net

3. **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3-2x+1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^3 - x} = 2$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = 2x$

Problema 575 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:** Vemos los puntos en los que se anula el denominador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = 3$$

Luego la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

3. **Asíntotas oblicuas:**

Como hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.

www.musat.net

Problema 576 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:** Vemos los puntos en los que se anula el denominador, $x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ (doble)

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \pm\infty$$

   Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \infty$$

   Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**

   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3+x-1}{x^2-2x+1}}{x} = \frac{3x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 3$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} = 6$$

   La asíntota oblicua es $y = 3x + 6$

Problema 577 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3-2x^2+1}{x^2-1}}{x} = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 + x} = 3$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} - 3x \right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es $y = 3x - 2$

3.7. Problemas de Límites

Problema 578 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (3x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (-2x^3 + x - 1)$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x - 1}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^4 + 2x - 1}{x^2 + 3x}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

www.musat.net

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(3x^2-2x+1)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-2x^3+x-1)=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x-1}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{x^2+3x}=+\infty$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+1}=3$

Problema 579 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-1}\right)^{2x}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+x}\right)^{x+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{x^2-1}\right)^{2x^2-1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}=e^{-2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+x-1}\right)^{2x}=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+x}\right)^{x+1}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-2}=e^4$

www.musat.net

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{x^2-1}\right)^{2x^2-1}=+\infty$

Problema 580 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(5x^2-x+1)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-3x^3+x+1)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{5x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-x^3+3x-1}{x^2+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^3+2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(5x^2-x+1)=\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-3x^3+x+1)=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{5x^2+1}=\dfrac{3}{5}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-x^3+3x-1}{x^2+2x-1}=-\infty$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^3+2}=0$

Problema 581 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{2x^2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3-1}{x^3+2x^2-1}\right)^{2x}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2+x-1}\right)^{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{4x-1}$

www.musat.net

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^5+2x+1}{x^5-1}\right)^{x^2-1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{2x^2}=e^{-6}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3-1}{x^3+2x^2-1}\right)^{2x}=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2+x-1}\right)^{x^2+1}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{4x-1}=e^{-8}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^5+2x+1}{x^5-1}\right)^{x^2-1}=+\infty$

Problema 582 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(3x^2-5x+3)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-x^3+5x+2)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{6x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-2x^3+2x+3}{3x^2-2x-4}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^5+2x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(3x^2-5x+3)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-x^3+5x+2)=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{6x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}=\dfrac{6}{5}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-2x^3+2x+3}{3x^2-2x-4}=-\infty$

www.musat.net

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x^3+2x-1}{x^5+2x} = 0$

Problema 583 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^4-x^3-1}{2x^4-1}\right)^{3x-1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{5x^5+2x^2-1}{x^5-2x+1}\right)^{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^4+1}{5x^4+3x^3-1}\right)^{2x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^3-x-1}{3x^3+2}\right)^{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^7+x^4-x+1}{3x^7-x^2+1}\right)^{7x-1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^4-x^3-1}{2x^4-1}\right)^{3x-1} = e^{-3/2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{5x^5+2x^2-1}{x^5-2x+1}\right)^{x^3-1} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^4+1}{5x^4+3x^3-1}\right)^{2x^3+1} = 0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^3-x-1}{3x^3+2}\right)^{x^2-1} = e^{-1/3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^7+x^4-x+1}{3x^7-x^2+1}\right)^{7x-1} = 0$

Problema 584 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (5x^2-3x-3)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (-x^4+3x-2)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^3-3x+1}{5x^3+3x-1}$

www.musat.net

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-2x^4-2x+3}{5x^2-2x-4}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{x^5-x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2-3x-3)=\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(-x^4+3x-2)=-\infty$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^3-3x+1}{5x^3+3x-1}=\dfrac{3}{5}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-2x^4-2x+3}{5x^2-2x-4}=-\infty$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{x^5-x}=0$

Problema 585 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{2x^2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^4+x+1}\right)^{2x^3-1}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^6+x^3-1}{3x^6-x^3-1}\right)^{2x+1}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^3-x+1}{x^3+2}\right)^{x^2-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{5x^4+x^3-x^2+1}{3x^4-x^2+1}\right)^{7x-1}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{2x^2}=e^{-2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^4+x+1}\right)^{2x^3-1}=+\infty$

www.musat.net

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^6+x^3-1}{3x^6-x^3-1}\right)^{2x+1}=0$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{x^3+2}\right)^{x^2-1}=e^{-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{5x^4+x^3-x^2+1}{3x^4-x^2+1}\right)^{7x-1}=+\infty$

Problema 586 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^3+2x^2-10x+7}{x^3-2x^2+2x-1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{4-\sqrt{x+14}}{x-2}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^3+2x^2-10x+7}{x^3-2x^2+2x-1}=-3$

2. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{4-\sqrt{x+14}}{x-2}=-\dfrac{1}{8}$

Problema 587 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(3x^3-2x+1)$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(-2x^4+x-2)$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{5x^3+2x-1}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-2x^3+2x^2+3}{5x^2+2x-4}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{2x^5-x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(3x^3-2x+1)=\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(-2x^4+x-2)=-\infty$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{5x^3+2x-1}=\dfrac{2}{5}$

www.musat.net

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-2x^3+2x^2+3}{5x^2+2x-4} = -\infty$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2-2x-1}{2x^5-x} = 0$

Problema 588 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^3-3}{3x^3}\right)^{2x^3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^5+x^3-1}{x^5-x+1}\right)^{x^3+1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^7-x^3-1}{5x^7+2x^3-1}\right)^{x+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^3-x+1}{x^3+2}\right)^{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{5x^4+x^3-x^2+1}{3x^4-x^2+1}\right)^{7x-1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^3-3}{3x^3}\right)^{2x^3} = e^{-2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^5+x^3-1}{x^5-x+1}\right)^{x^3+1} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^7-x^3-1}{5x^7+2x^3-1}\right)^{x+1} = 0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-3}{x^2-x}\right)^{x-1} = e$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^5+x^2-x^2+1}{2x^5+x^2+1}\right)^{7x-1} = +\infty$

Problema 589 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3-2x^2-2x-3}$

www.musat.net

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{5-\sqrt{x+20}}{x-5}$

Solución:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3-2x^2-2x-3}=\frac{30}{13}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{5-\sqrt{x+20}}{x-5}=-\frac{1}{10}$

Problema 590 Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{5x^2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2+x-1}$

3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{4x-1}$

4. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^5+2x+1}{x^5-1}\right)^{x^2-1}$

Solución:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{5x^2}=e^{-15}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2+x-1}=\frac{1}{3}$

3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4-x^3-x^2+2x-1}{2x^3-x^2-2x+1}=\frac{1}{2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}=-\frac{1}{4}$

Problema 591 Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+1}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^3+2x^2-13x+10}{x^3-x^2+3x-3}$

Solución:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+1}=\frac{3}{2}$

www.musat.net

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^3+2x^2-13x+10}{x^3-x^2+3x-3} - \dfrac{3}{2}$

Problema 592 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$
   $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = 3$$

Problema 593 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (x^4-3x+1)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (-x^3+2x-1)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x}{x^2+2x-1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^4-x^3-3}{x^3+1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^2-2x-1}{3x^2-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (x^4-3x+1) = \infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (-x^3+2x-1) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x}{x^2+2x-1} = 0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^4-x^3-3}{x^3+1} = \infty$

www.musat.net

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^2-2x-1}{3x^2-2} = \dfrac{4}{3}$

Problema 594 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x-2}{x}\right)^{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-1}\right)^{3x^2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2/2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-2}\right)^{x^2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x-2}{x}\right)^{x^2} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-1}\right)^{3x^2} = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2/2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-1/2}$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}-1\right) = -\frac{1}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-2}\right)^{x^2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{3/2}$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} x^2\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-2}-1\right) = \frac{3}{2}$$

Problema 595 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (6x^5-3x^2-1)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (-3x^3+2x+1)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^2}{x^3+3}$

www.musat.net

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^5+3x^2-2}{x^4+2x-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{6x^5-2x^3+3}{5x^5+3}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(6x^5-3x^2-1)=\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(-3x^3+2x+1)=-\infty$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^2}{x^3+3}=0$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^5+3x^2-2}{x^4+2x-1}=\infty$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{6x^5-2x^3+3}{5x^5+3}=\dfrac{6}{5}$

Problema 596 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^3-x-1}{2x^2+1}\right)^{x+1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2-x-1}\right)^{2x^2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2/2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x+3}{3x-1}\right)^{x/2}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^3-x-1}{2x^2+1}\right)^{x+1}=\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2-x-1}\right)^{2x^2}=0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2/2}=[1^\infty]=e^\lambda=e$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)=1$$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x-1}\right)^{x/2}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{2/3}$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{3x+3}{3x-1}-1\right)=\frac{2}{3}$$

Problema 597 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(3x^3+2x-1)$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-2x^2+x-1)$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^2}{x^3+x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^6-3x+2}{x^5-x^4+1}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+x-1}{2x^3+1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(3x^3+2x-1)=\infty$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(-2x^2+x-1)=-\infty$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^2}{x^3+x^2+1}=0$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^6-3x+2}{x^5-x^4+1}=\infty$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+x-1}{2x^3+1}=\dfrac{3}{2}$

Problema 598 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^3+2x^2-1}{2x^3+3}\right)^{3x^2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^5-3x-1}{3x^5+1}\right)^{x^3/2}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2}{2x^2+5}\right)^{x^2/2}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{3x}$

www.musat.net

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^3+2x^2-1}{2x^3+3}\right)^{3x^2}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^5-3x-1}{3x^5+1}\right)^{x^3/2}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2}{2x^2+5}\right)^{x^2/2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-5/4}$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2}{2}\left(\frac{2x^2}{2x^2+5}-1\right)=-\frac{5}{4}$$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{3x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-3}$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x\left(\frac{2x-3}{2x-1}-1\right)=-3$$

Problema 599 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+3}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2}\right)^{5x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow-1}\dfrac{3x^4-2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+5x+3}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^3+2}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+3}=2$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2}\right)^{5x^2-1}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^2$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(2x^2)\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)=2$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{3x^4-2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+5x+3}=-3$$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\dfrac{3}{4}$

Problema 600 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{x^2+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{4x^3+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{5x^2+2x-1}{3x^2+1}\right)^{(x^2+1)/2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x/2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^4-3x^2+2x-8}{x^3-3x^2+x+2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{x^2+2}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{4x^3+2}=\dfrac{3}{4}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{5x^2+2x-1}{3x^2+1}\right)^{(x^2+1)/2}=\infty$

www.musat.net

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x/2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{1/2}$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^4-3x^2+2x-8}{x^3-3x^2+x+2}=22$$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}=\dfrac{1}{2}$

Problema 601 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3+x+1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^3+2x+1}{3x^3+2x^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{5x^2-1}\right)^{(3x^2+1)/2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{x/2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{-5x^4+3x^3+2x^2-x+1}{2x^3+3x^2-4x-1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4}\dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{x-4}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3+x+1}=0$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^3+2x+1}{3x^3+2x^2+1}=\dfrac{5}{3}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{5x^2-1}\right)^{(3x^2+1)/2}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{x/2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^2$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2x+3}{2x-5}-1\right)=\frac{8}{4}=2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{-5x^4+3x^3+2x^2-x+1}{2x^3+3x^2-4x-1}=-1$$

www.musat.net

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4} \dfrac{\sqrt{5x-2}-4}{x-4} = \dfrac{5}{8}$

Problema 602 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{2x}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+2x-8}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4} \dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{x-4}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{2x} = e^{2/5}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+2x-8} = \dfrac{5}{6}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4} \dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{x-4} = \dfrac{5}{8}$

Problema 603 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

www.musat.net

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)}{x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x-1}{x\sec x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x\tan x}{x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to \pi} x\sec x$

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

23. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$. (Ayuda: $(\frac{\operatorname{sen} t}{t})^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$)

24. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 3t}{t} = 3(\frac{\operatorname{sen} 3t}{3t})$)

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\operatorname{sen} 3t}$)

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

www.musat.net

27. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1-\cos h)^2}{h}$

Problema 604 Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+1}{10x^3-3x^2+7}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{10}-11}{10x^11-3}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2}{x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x^2+3x+1}{x^2-3x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} (2x - \dfrac{1}{x^2})$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+3)^{-2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{3x}{x+1})$
10. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x^2}{x-1} + \dfrac{3x}{x+1})$
11. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+\sqrt{x^2+3})$
12. $\lim\limits_{x\to\infty} (2x-\sqrt{4x^2+1})$
13. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2+x})$
14. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+\sqrt{9x^2-x})$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}$
16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}}$

www.musat.net

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x+1}{\sqrt{x^2+x}}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^4+1x}}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x+\operatorname{sen} x}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} x \tan\dfrac{1}{x}$

Problema 605 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x} = [1^\infty] = e^\lambda$$
$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 3x\left(1+\frac{1}{5x}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

Luego:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x} = e^{\frac{3}{5}}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$
$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(3x^2)\left(\frac{x^2+2}{x^2}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{6x^2}{x^2} = 6$$

www.musat.net

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=e^6$$

Problema 606 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=e^{\frac{7}{3}}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1}=10$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=e^{10}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right]=0$$

Problema 607 Calcular:

www.musat.net

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

Problema 608 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

www.musat.net

4.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}8x\left(1+\frac{1}{6x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

Problema 609 Calcular
$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\frac{5}{4}$$

Problema 610 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$$

Luego:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=e^{\frac{7}{3}}$$

www.musat.net

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1}=10$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=e^{10}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right]=0$$

Problema 611 Calcular los siguientes límites:

Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow-5}\frac{4-\sqrt{x^2-9}}{x+5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow-5}\frac{4-\sqrt{x^2-9}}{x+5}=\lim_{x\longrightarrow-5}\frac{16-(x^2-9)}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow-5}\frac{25-x^2}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})}=\lim_{x\longrightarrow-5}\frac{(5-x)(5+x)}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow-5}\frac{5-x}{4+\sqrt{x^2-9}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

Calcular

$$\lim_{x\longrightarrow5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$

www.musat.net

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\frac{5}{4}$$

Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

Calcular:

1. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

   Solución:
   $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

   Solución:
   $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

www.musat.net

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}8x\left(1+\frac{1}{6x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

5.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^3}=[4^\infty]=\infty$$

6.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{3x^3+2}\right)^{5x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{3x^3+2}\right)^{5x}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

7.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2}$$

www.musat.net

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-3}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x^2\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-6x^2}{2x^2+1}=-3$$

8.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{5}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}5x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

Problema 612 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{1-(\sqrt{x-1})^2}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{-1}{1+\sqrt{x-1}}=-\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{3}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{2x}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{2x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-4}$$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}2x\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^2-2x}{x^2+1}=-4$$

www.musat.net

Problema 613 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^3-3x+1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-x-1}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^3-3x+1}=0$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^3-2x}{x^2-1}=\infty$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-x-1}\right)^{2x}=(1^\infty)=e^\lambda=e^1$

   $\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-x-1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x\left(\dfrac{2x^2+1-(2x^2-x-1)}{2x^2-x-1}\right)=$

   $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2x^2+4x}{2x^2-x-1}=1$

Problema 614 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

   Solución:

   $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=$

   $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{(\sqrt{x-1})^2-1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=$

   $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-18}$

   Solución:

   $\lim_{x\longrightarrow -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-18}=\lim_{x\longrightarrow -3}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-6)(x+3)}=\lim_{x\longrightarrow -3}\dfrac{x-2}{x-6}=\dfrac{5}{9}$

www.musat.net

Problema 615 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^2+5x-6}{x^2-x}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-x} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x-1)(x+6)}{x(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x+6}{x} = 7$$

Problema 616 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3^2-(\sqrt{x^2+5})^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4} \dfrac{x^2+2x-24}{x^2-9x+20}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2+2x-24}{x^2-9x+20} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(x-4)(x+6)}{(x-4)(x-5)} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x+6}{x-5} = -10$$

Problema 617 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3}$

www.musat.net

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4} \dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3} = 2$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4} \dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \dfrac{4}{3}$

Problema 618 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2/2} = e^{1/2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^5+3x-1}{5x^5+1}\right)^{2x+1} = 0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x} = e^{-3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^3+3x^2-6x-16}{x^4+2x^3+x^2+x-2} = \dfrac{6}{11}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{3x^4+x^3-2x^2+x-3}{3x^3+2x^2-4x-1} = \dfrac{4}{3}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{3x^4+2x^3-2x^2}{x^3+x^2+x} = 0$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^5-1}{2x^4-2} = \dfrac{5}{8}$

9. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3} = \dfrac{9}{4}$

10. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2} = -\dfrac{2}{3}$

11. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$

12. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-e^{2x}}{\sin x} = -2$

www.musat.net

13. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)} = -1$

14. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x} = 1$

15. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

16. $\lim_{x\longrightarrow \infty} xe^x = \infty, \quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^x = 0$

3.8. Problemas Varios

3.8.1. Problemas de Dominio

Problema 619 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x-4}$$

Solución:

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \geq 0$:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
x^2-x-6	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -2] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$$

Problema 620 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x-6}$$

Solución:

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) \geq 0$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
x^2-4x-5	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -1] \cup [5, 6) \cup (6, +\infty)$$

www.musat.net

Problema 621 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x - 8}$$

Solución:

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3) \geq 0$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 5$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + 2x - 15$	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -5] \cup [3, 8) \cup (8, +\infty)$$

Problema 622 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{x - 7}$$

Solución:

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) \geq 0$:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 3$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2x - 15$	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -3] \cup [5, 7) \cup (7, +\infty)$$

Problema 623 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 14}}{x - 5}$$

Solución:

www.musat.net

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 5x - 14 = (x-2)(x+7) \geq 0$:

	$(-\infty,-7)$	$(-7,2)$	$(2,+\infty)$
$x+7$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x^2+5x-14$	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -7] \cup [2, 5) \cup (5, +\infty)$$

Problema 624 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x - 3}$$

Solución:

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4) \geq 0$:

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,+\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
x^2+2x-8	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -4] \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Problema 625 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}}$$

Solución:

$$[-3, 1) \cup [2, \infty)$$

Problema 626 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}}$$

Solución:

$$[-3, -1) \cup [1, \infty)$$

www.musat.net

Problema 627 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}}$$

Solución:

$$(1, 2] \cup [3, \infty)$$

Problema 628 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}}$$

Solución:

$$(-\infty, -3] \cup (-2, 1) \cup [2, \infty)$$

Problema 629 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 2}}$$

Solución:

$$(-\infty, -3] \cup [-2, -1] \cup (2, \infty)$$

Problema 630 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 15}}$$

Solución:

$$(-\infty, -3) \cup [-1, 2] \cup (5, \infty)$$

Problema 631 Calcular el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}}$

Solución:

$$(-\infty, -3] \cup (-1, 2] \cup (3, \infty)$$

3.8.2. Varios

Problema 632 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x + 2)\sqrt{x - 1}}$$

Solución:

www.musat.net

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x + 2 = 0 \implies x = -2$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x - 1 = 0 \implies x = 1$, luego eliminando el valor $x = 1$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(1, +\infty)$

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2x$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{(2x)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 - 1}$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = 2\sqrt{x^2 - 1}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el dominio $R - \{1\}$, calcular $f^{-1}(x)$

   Solución:

   $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1} \Longrightarrow (x-1)y = x + 1 \Longrightarrow$

   $xy - y = x + 1 \Longrightarrow xy - x = y + 1 \Longrightarrow x(y-1) = y + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$
   En conclusión:

   $$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{2x^2 - 1}$

   Solución:

   $f(-x) = \dfrac{3(-x)^3}{2(-x)^2 - 1} = \dfrac{-3x^3}{2x^2 - 1} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al origen.

Problema 633 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

   $$f(x) = \frac{x-3}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

   Solución:
   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una

raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+1 \geq 0 \implies x \geq -1$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+2=0 \implies x=-2$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+1=0 \implies x=-1$, luego eliminando el valor $x=-1$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-1,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^3-3$ y $g(x)=|x|$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(|x|)=|x|^3-3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^3-3))=|x^3-3|$

3. Sea $f(x)=\frac{x}{x+1}$ en el dominio $D=(-1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x)=\frac{x}{x+1} \implies (x+1)f(x)=x \implies xf(x)+f(x)=x \implies xf(x)-x=-f(x) \implies x(f(x)-1)=-f(x) \implies x=\frac{-f(x)}{f(x)-1}$ En conclusión:
$$f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

Problema 634 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x)=\frac{x-4}{(x+3)\sqrt{x+2}}$$
Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=|x|$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(|x|)=|x|^2-2=x^2-2$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2))=|x^2-2|$

3. Sea $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ en el dominio $D=(-1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x)=\frac{2x}{x+1} \implies (x+1)f(x)=2x \implies xf(x)+f(x)=2x \implies$

www.musat.net

$xf(x) - 2x = -f(x) \implies x(f(x)-2) = -f(x) \implies x = \frac{-f(x)}{f(x)-2}$
En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$$

Problema 635 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{x+3}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
Solución:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-2)) = \sqrt{x^2-2}$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x) = \frac{x}{2x+1} \implies (2x+1)f(x) = x \implies 2xf(x) + f(x) = x \implies 2xf(x) - x = -f(x) \implies x(2f(x)-1) = -f(x) \implies x = \frac{-f(x)}{2f(x)-1}$
En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-2x}$$

Problema 636 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{x+3}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.

Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=\sqrt{x}$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
   Solución:
   $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-2=x-2$
   $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2))=\sqrt{x^2-2}$

3. Sea $f(x)=\frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D=(-1/2,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x)=\frac{x}{2x+1} \implies (2x+1)f(x)=x \implies 2xf(x)+f(x)=x \implies 2xf(x)-x=-f(x) \implies x(2f(x)-1)=-f(x) \implies x=\frac{-f(x)}{2f(x)-1}$
   En conclusión:
   $$f^{-1}(x)=\frac{x}{1-2x}$$

Problema 637 Resolver:

1. Encuentra el dominio de la función
   $$f(x)=\frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2}$$
   Solución:
   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x-2\geq 0 \implies x\geq 2$.
   Por otra parte el único valor que anula el denominador es $x-2=0 \implies x=2$, podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2,+\infty)$

2. Si $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
   Solución:
   $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-1})=(\sqrt{x-1})^2+1=x-1+1=x$
   $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1))=\sqrt{x^2+1-1}=x$

3. Sea $f(x)=\frac{3x}{x-1}$ en el dominio $D=(1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x)=\frac{3x}{x-1} \implies (x-1)f(x)=3x \implies xf(x)-f(x)=3x \implies xf(x)-3x=f(x) \implies x(f(x)-3)=f(x) \implies x=\frac{f(x)}{f(x)-3}$ En conclusión:
   $$f^{-1}(x)=\frac{x}{x-3}$$

www.musat.net

Problema 638 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x+8)\sqrt{x-2}}{(x-2)}$$

   Solución:

   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
   Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x - 2 = 0 \implies x = 2$, valor no eliminado en el razonamiento anterior, eliminamos el valor $x = 2$, y podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x - 2$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{x^2 - 1} - 2$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$ en el dominio $R^+ - \{3\}$, calcular $f^{-1}(x)$

   Solución:

   $f(x) = \dfrac{3x}{x-3} \implies y = \dfrac{3x}{x-3} \implies (x-3)y = 3x \implies$

   $xy - 3y = 3x \implies xy - 3x = 3y \implies x(y-3) = 3y \implies x = \dfrac{3y}{y-3}$
   En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-3}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^4 + 1}$

   Solución:

   $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - 1}{(-x)^4 + 1} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^4 + 1} = f(x) \implies$ la función es simétrica respecto al eje OY.

www.musat.net

Problema 639 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)\sqrt{x}}$$

   Solución:

   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x \geq 0$.
   Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+1=0 \implies x=-1$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x=0$ valor que no eliminamos en el razonamiento anterior; eliminamos el valor $x=0$, y podemos concluir con que el dominio de la función será: $(0, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 - 3 = x - 4$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-3) = \sqrt{(x^2-3)-1} = \sqrt{x^2-4}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+1}$ en el dominio $R^+ - \{-1\}$, calcular $f^{-1}(x)$

   Solución:

   $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+1} \Longrightarrow y = \dfrac{5x-2}{x+1} \Longrightarrow (x+1)y = 5x-2 \Longrightarrow$

   $xy + y = 5x - 2 \Longrightarrow xy - 5x = -y - 2 \Longrightarrow x(y-5) = -(y+2) \Longrightarrow$
   $x = -\dfrac{y+2}{y-5}$ En conclusión:
$$f^{-1}(x) = -\frac{x+2}{x-5}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2+8}$

   Solución:

   $f(-x) = \dfrac{3(-x)^3}{(-x)^2+8} = \dfrac{-x^3}{x^2+8} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al origen O.

www.musat.net

Problema 640 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x) = \frac{x-6}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

   Solución:

   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x-2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
   Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x-2=0 \implies x=2$, luego eliminando el valor $x=2$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2,+\infty)$

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ y $g(x) = x-1$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

   Solución:

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{(x-1)^2-3}$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2-3}) = \sqrt{x^2-3}-1$

3. Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ en el dominio $R - \{1/2\}$, calcular $f^{-1}(x)$

   Solución:

   $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} \Longrightarrow y = \dfrac{2x+1}{2x-1} \Longrightarrow (2x-1)y = 2x+1 \Longrightarrow$

   $2xy-2y = 2x+1 \Longrightarrow 2xy-2x = 2y+1 \Longrightarrow 2x(y-1) = 2y+1 \Longrightarrow$
   $x = \dfrac{2y+1}{2(y-1)}$ En conclusión:
$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2(x-1)}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{x^4-x^2+1}{2x^2+5}$

   Solución:

   $f(-x) = \dfrac{(-x)^4-(-x)^2+1}{2(-x)^2+5} = \dfrac{x^4-x^2+1}{2x^2+5} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje OY.

www.musat.net

Problema 641 1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x) = \frac{x-5}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

Solución:

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x + 3 = 0 \implies x = -3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x - 2 = 0 \implies x = 2$, luego eliminando el valor $x = 2$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x^2 - 2)) = \sqrt{x^2 - 2}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x}$ en el dominio $D = (0, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Solución:

$f(x) = \dfrac{2x-1}{3x} \Longrightarrow y = \dfrac{2x-1}{3x} \Longrightarrow (3x)y = 2x - 1 \Longrightarrow$

$3xy - 2x = -1 \Longrightarrow x(3y-2) = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{-1}{3y-2}$ En conclusión:
$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3x-2}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^4 - 1}{2x}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^4 - 1}{2(-x)} = \dfrac{3x^4 - 1}{-2x} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al origen.

www.musat.net