Progresiones geométricas

Definición
Una sucesión es una **progresión geométrica** cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, llamado **razón** de la progresión. Por tanto, en una progresión geométrica, el cociente entre dos términos consecutivos siempre es igual a la razón. En consecuencia, una progresión geométrica queda determinada dando cualquier término y la razón.

Si el primer término de una progresión geométrica es a_1 y la razón es r, la progresión será:

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 r \qquad a_3 = a_2 r \qquad a_4 = a_3 r \qquad \ldots \qquad a_n = a_{n-1} r$$

$$a_2 = a_1 r \qquad a_3 = a_1 r^2 \qquad a_4 = a_1 r^3 \qquad \ldots \qquad a_n = a_1 r^{n-1}$$

- El **término general** de la progresión geométrica es: $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$

Ejemplo:
- La sucesión 1, 2, 4, 16, 32, ... es una progresión geométrica de razón r = 2.

Su término general será: $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Con esto, por ejemplo: $a_{10} = 2^9 = 512$; $a_{45} = 2^{44} = 17592186044416$.

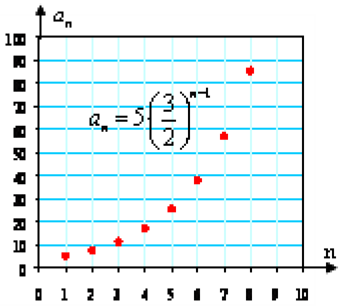
EJERCICIO DE APLICACIÓN

7. Comprueba que las siguientes sucesiones son progresiones geométricas, halla el término general y el valor del término duodécimo.

a) 5, $\frac{15}{2}$, $\frac{45}{4}$, $\frac{135}{8}$, ... b) +1, −1, +1, −1, ... c) −1, +1, −1, +1, ...

Solución:
Una sucesión es una progresión geométrica si el cociente entre dos términos consecutivos es siempre constante.

a) Para 5, $\frac{15}{2}$, $\frac{45}{4}$, $\frac{135}{8}$, ... se cumple que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{15/2}{5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, y lo mismo sucede para $\frac{a_3}{a_2} = \frac{45/4}{15/2} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$ y para $\frac{a_4}{a_3}$ (compruébalo)



Como $a_1 = 5$ y $r = \frac{3}{2}$, su término general será: $a_n = 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Por tanto, $a_{12} = 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{885735}{2048}$

b) Para +1, −1, +1, −1, ..., el cociente entre dos términos consecutivos es siempre −1; por tanto, r = −1.

Su término general es $a_n = 1\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$; luego $a_{12} = (-1)^{11} = -1$

c) Para −1, +1, −1, +1, ... que también tiene razón −1, su término general es $a_n = (-1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n$; siendo $a_{12} = 1$

Resuelve tú

7. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas, halla el término general y el valor del término noveno.

a) 2, 1, 1/2, 1/4, b) 1,02, $1,02^2$, $1,02^3$, ... c) 3, 3,3, 3,33, 3,333, …

[sol] a) $\frac{1}{2^{n-2}}$; $\frac{1}{2^7}$ b) $1,02^n$; $1,02^9$; c) No es pg; 3,33333333.

Suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica

Sea una progresión geométrica de primer término a_1 y razón r.

Para hallar el valor de la suma

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$$

puede procederse así:

1. Se expresan todos los términos en función de a_1 y de r:

$$S = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + ... + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad (1)$$

2. Se multiplican los dos miembros de la igualdad anterior por r:

$$rS = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + ... + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \qquad (2)$$

3. Se restan las igualdades anteriores, (1) – (2), obteniéndose:

$$S - rS = a_1 - a_1 r^n \Rightarrow S(1-r) = a_1(1-r^n)$$

4. Se despeja S:

$$\boxed{S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}$$

Ejemplo:

- La suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ... es $S = \frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = 1023$.

Suma de infinitos términos consecutivos cuando $|r| < 1$

Si la razón, r, es menor que 1 en valor absoluto (esto es, $|r| < 1$), podemos plantearnos la **suma de infinitos términos consecutivos**. Dicha suma vale:

$$\boxed{S = \frac{a_1(-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}},$$

pues en la fórmula general el valor de r^n se hace cada vez menor (tiende a 0), cuando n tiende a infinito. Por ejemplo, si r = 0,8, para n = 20 se tiene $r^{20} = 0,8^{20} \approx 0,01$; y si n = 60, $0,8^{60} \approx 0,0000015$, cantidad cada vez más insignificante.

Ejemplo:

- La suma 100 + 50 + 25 + 12,5 + ... (infinitos términos, con r = 1/2) vale: $S = \frac{100}{1-1/2} = 200$.

EJERCICIO DE APLICACIÓN

---

8. Halla las siguientes sumas:

a) $(1,01) + (1,01)^2 + (1,01)^3 + (1,01)^4 + (1,01)^5 + (1,01)^6$

b) 7 + 7/3 + 7/9 + 7/27 + … (infinitos términos)

Solución:

a) Es la suma de 6 términos consecutivos de una progresión geométrica con: a_1 = 1,01 y r = 1,01.

Por tanto:

$$S = (1,01) + (1,01)^2 + (1,01)^3 + (1,01)^4 + (1,01)^5 + (1,01)^6 = \frac{1,01\cdot(1,01^6-1)}{1,01-1} = 6,213535$$

b) Como r = 1/3, la suma de los infinitos términos será:

$$S = \frac{7}{1-1/3} = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

Resuelve tú

8. Halla las siguientes sumas:

a) 1 + 2 + 4 + 8 + …. (20 términos)

b) 10 – 5 + 2,5 – 1,25 + … (infinitos términos)

[sol] a) 1048576, b) 20/3

Producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica

Sea una progresión geométrica de primer término a_1 y razón r.

Para hallar el valor del producto

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

puede procederse así:

1. Se observa que $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \ldots$, pues:

$$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 r \cdot \frac{a_n}{r} = a_1 \cdot a_n\,; \quad a_3 \cdot a_{n-2} = a_2 r \cdot \frac{a_{-1n}}{r} = a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot a_n\,; \quad \ldots$$

2. Se halla $P^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \Rightarrow$

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1) \;\Rightarrow\; P^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

<u>Ejemplo</u>:

- El producto de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 36, .. es:

$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^9)^{10}} = \sqrt{3^{20} \cdot 2^{90}} = 3^{10} \cdot 2^{45}$ (Observa que $a_{10} = 3 \cdot 2^9$)

- El producto de los 18 primeros términos de la progresión geométrica 256, 128, 64, .. es:

$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_{16})^{16}} = \sqrt{(256 \cdot 256 \cdot 2^{-15})^{16}} = \sqrt{(2)^{14}} = 2^7$