Página 183

Resuelve

1. Busca información sobre siete grandes geómetras griegos. Escribe sus nombres ordenados cronológicamente.

Tales de Mileto (600 a. C.). Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico, como el teorema que lleva su nombre.

Pitágoras (572 a. C.). Fundó la escuela pitagórica, a la que se le atribuye la demostración del teorema de Pitágoras y, como consecuencia, el descubrimiento de los números irracionales que contradecían la doctrina básica de la escuela.

Pappus de Alejandría (300 a. C.). Hizo anotaciones al teorema de Pitágoras y demostró que el hexágono es la forma geométrica que almacena mayor cantidad de miel utilizando menor cantidad de cera.

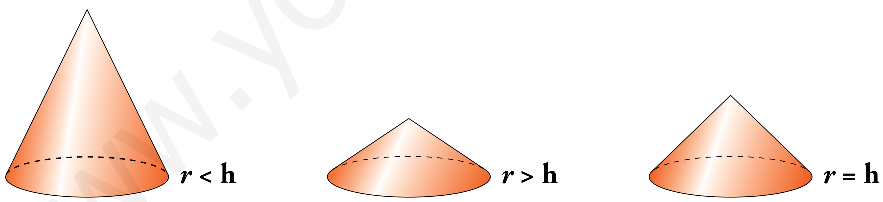
Euclides (300 a. C.). Se le conoce, sobre todo, por su obra *Elementos*, que durante más de 20 siglos fue la base de las matemáticas en todo el mundo.

Arquímedes de Siracusa (287 a. C.). Elaboró un método para calcular una aproximación del valor de π, la proporción entre el diámetro y la longitud de una circunferencia.

Erastótenes (276 a. C.). Fue el primero en medir la longitud de la Tierra, formulando dos hipótesis muy atrevidas para su época: la Tierra tiene forma esférica y los rayos del Sol son paralelos. También conocemos su criba para encontrar números primos.

Apolonio de Perga (262 a. C.). Estudió la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrió muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de la física; por ejemplo, en las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

2. Observa estos conos, similares a los de arriba, pero no ordenados de igual manera:



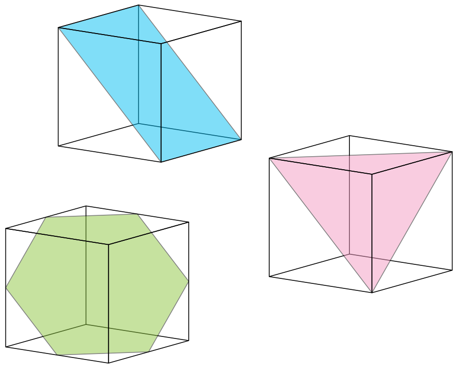
¿Qué cónica obtendrías en cada caso si los cortases con un plano perpendicular a la generatriz? Puedes experimentarlo construyendo conos de plastilina y cortándolos con un cuchillo o un cúter.

Con el primer cono, $r < h$, se obtendría una elipse.

Con el segundo cono, $r > h$, se obtendría una hipérbola.

Con el tercer cono, $r = h$, se obtendría una parábola.

3. **De las tres secciones del cubo que ves abajo, ¿cuál crees que tiene mayor perímetro? ¿Y mayor área? Cuando termines la unidad, sabrás contestar con seguridad a estas cuestiones.**



Tomamos como medida de la arista del cubo 1 m. Las diagonales de sus caras miden entonces $\sqrt{2}$ m.

Rectángulo. Su base coincide con la diagonal de las caras de los lados del cubo, $\sqrt{2}$ m, y su altura coincide con la arista, 1 m. Por tanto:

$P = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83$ m $\qquad$ $A = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m^2

Triángulo. Es equilátero y su lado coincide con la diagonal de las caras del cubo, $\sqrt{2}$ m.

$P = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m

Calculamos su altura para hallar el área: $h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ m

$$A = \frac{\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \text{ m}^2$$

Hexágono. Los vértices del hexágono coinciden con los puntos medios de las aristas del cubo.

Calculamos su lado: $l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m

Ahora el perímetro: $P = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m

Recordando que en los hexágonos regulares coinciden las medidas del radio y el lado, calculamos la apotema: $ap = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ m

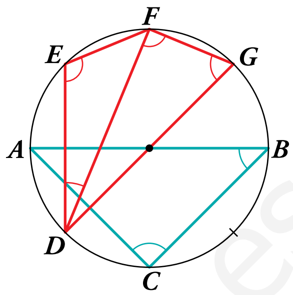
Por último, calculamos su área: $A = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{12}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$ m^2

Tras estos resultados, concluimos que el rectángulo es la sección con mayor perímetro y mayor área.

1 Relaciones angulares

Página 185

1. ¿Cuál es la medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia? Di el valor de los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{FDE}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{DFG}$, $\widehat{FGD}$.

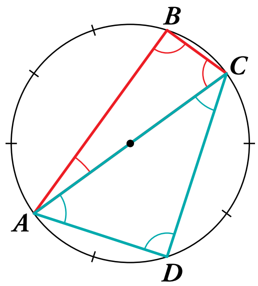


La medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

$\widehat{ABC} = \dfrac{2 \cdot 45°}{2} = 45°$ $\widehat{DFG} = \dfrac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$ $\widehat{ACB} = \dfrac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$

$\widehat{FDE} = \dfrac{45°}{2} = 22°\ 30'$ $\widehat{FGD} = \dfrac{3 \cdot 45°}{2} = 67°\ 30'$ $\widehat{DEF} = \dfrac{5 \cdot 45°}{2} = 112°\ 30'$

2. ¿Cuál es la medida angular de cada uno de los diez arcos iguales? Halla el valor de los ángulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACD}$.



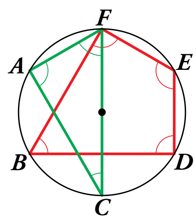
La medida angular de cada uno de los diez arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\dfrac{360°}{10} = 36°$.

$\widehat{CAB} = \dfrac{36°}{2} = 18°$ $\widehat{CAD} = \dfrac{3 \cdot 36°}{2} = 54°$ $\widehat{ABC} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

$\widehat{ADC} = \dfrac{180°}{2} = 90°$ $\widehat{BCA} = \dfrac{4 \cdot 36°}{2} = 72°$ $\widehat{ACD} = \dfrac{2 \cdot 36°}{2} = 36°$

3. Di, razonadamente, el valor de estos ángulos:

$$\widehat{FAC},\ \widehat{ACF},\ \widehat{AFC},\ \widehat{FBD},\ \widehat{BDE},\ \widehat{DEF},\ \widehat{BFE}.$$



La circunferencia está dividida en 6 arcos iguales.

La medida de cada uno de ellos es $\dfrac{360°}{6} = 60°$.

$\widehat{FAC} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{ACF} = \dfrac{60°}{2} = 30°$ $\widehat{AFC} = \dfrac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$

$\widehat{FBD} = \dfrac{2 \cdot 60°}{2} = 60°$ $\widehat{BDE} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$ $\widehat{DEF} = \dfrac{4 \cdot 60°}{2} = 120°$

$\widehat{BFE} = \dfrac{3 \cdot 60°}{2} = 90°$

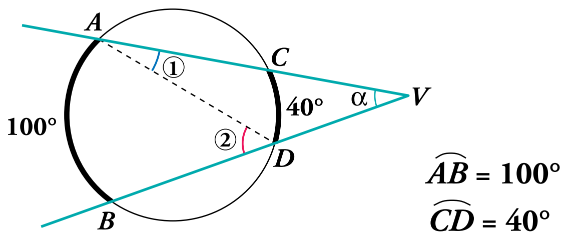
4. **Halla:**

a) $\widehat{CAD}$ = ①

b) $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{ADV}$

d) $\widehat{AVD}$ = α



a) $\widehat{CAD}$ = ① = $\frac{40°}{2}$ = 20°

b) $\widehat{ADB}$ = ② = $\frac{100°}{2}$ = 50°

c) $\widehat{ADV}$ = 180° – ② = 180° – 50° = 130°

d) $\widehat{AVD}$ = 180° – ① – 130° = 180° – 20° – 130° = 30°

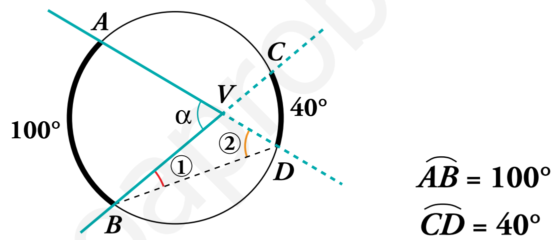
5. **Halla:**

a) $\widehat{CBD}$ = ①

b) $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{BVD}$

d) $\widehat{AVB}$ = α



a) $\widehat{CBD}$ = ① = $\frac{40°}{2}$ = 20°

b) $\widehat{ADB}$ = ② = $\frac{100°}{2}$ = 50°

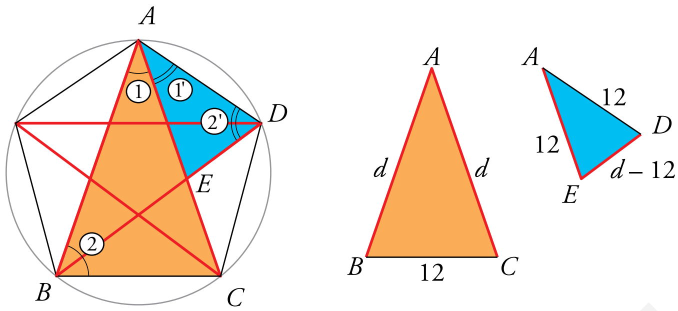
c) $\widehat{BVD}$ = 180° – ① – ② = 180° – 20° – 50° = 110°

d) $\widehat{AVB}$ = α = 180° – 110° = 70°

2 Semejanza de triángulos

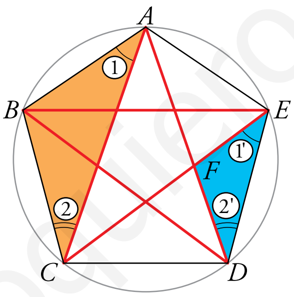
Página 187

1. Repite el razonamiento del ejercicio resuelto, pero suponiendo ahora que el lado del pentágono mide 12 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?



$$\frac{d}{12} = \frac{12}{d-12} \rightarrow d^2 - 12d = 144 \rightarrow d = 6 + 6\sqrt{5} = 19{,}4 \text{ cm}$$

2. Prueba que los triángulos *ABC* y *EFD* del pentágono de arriba son semejantes. A partir de esa semejanza, vuelve a obtener la relación entre *d* y *l*.

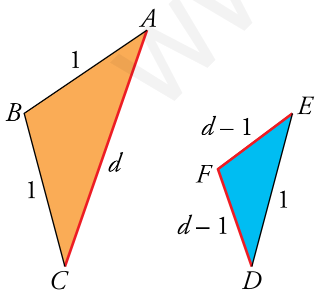


1 = 1' porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

2 = 2' por el mismo motivo.

Por tanto, los triángulos *ABC* y *EFD* son semejantes y sus lados son proporcionales.

Tomamos como unidad el lado del pentágono, $l = 1$. Además, $\overline{EF} = \overline{FD} = d - 1$.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos la solución positiva.

La relación pedida es: $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$

3 Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Página 188

1. En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm **b) 16 cm y 30 cm**

a = hipotenusa

a) $a = \sqrt{37^2 + 45^2} = \sqrt{3\,394} \approx 58{,}3$ cm

b) $a = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

2. En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm **b) 39 cm y 15 cm**

c = cateto que falta

a) $c = \sqrt{45^2 - 37^2} = \sqrt{656} \approx 25{,}6$ cm

b) $c = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1\,296} = 36$ cm

3. Averigua cómo son los triángulos de lados:

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm **b) 11 cm, 17 cm, 15 cm**

c) 34 m, 16 m, 30 m **d) 65 m, 72 m, 97 m**

e) 12 cm, 13 cm, 20 cm **f) 15 m, 36 m, 39 m**

a) $7^2 + 8^2 = 113$; $11^2 = 121$

Como $11^2 > 7^2 + 8^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

b) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289$

Como $17^2 < 11^2 + 15^2$, entonces el triángulo es acutángulo.

c) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156$

Como $34^2 = 16^2 + 30^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

d) $65^2 + 72^2 = 9\,409$; $97^2 = 9\,409$

Como $97^2 = 65^2 + 72^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

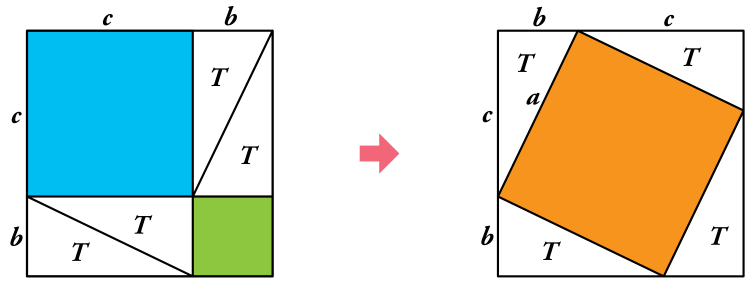
e) $12^2 + 13^2 = 313$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 12^2 + 13^3$, entonces el triángulo es obtusángulo.

f) $15^2 + 36^2 = 1\,521$; $39^2 = 1\,521$

Como $39^2 = 15^2 + 36^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

4. Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.



Puesto que los cuatro triángulos blancos son rectángulos de catetos b y c, sus hipotenusas, que coinciden con el lado del cuadrado, miden a. Por tanto, la figura naranja es un cuadrado de lado a y área a^2.

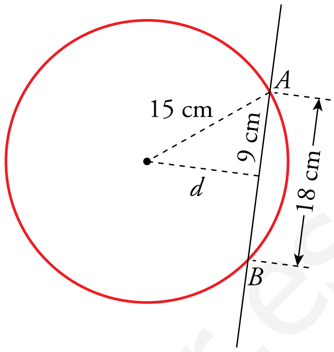
En el otro cuadrado vuelven a aparecer los mismos triángulos blancos, dejando ahora un cuadrado verde de lado b, cuya área será b^2, y otro azul de lado c y área c^2.

Por último, nos fijamos en los dos cuadrados completos de lado $b + c$. Si a dos cuadrados iguales les quitamos la misma parte (los cuatro triángulos blancos), la parte que queda también será igual. En este caso, en el primer cuadrado nos quedan dos cuadrados más pequeños, el verde y el azul, de áreas b^2 y c^2 y en el segundo cuadrado queda el cuadrado naranja de área a^2.

Por tanto, $b^2 + c^2 = a^2$.

Página 189

5. Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, r, corta a la circunferencia en dos puntos, A y B. La distancia entre A y B es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?



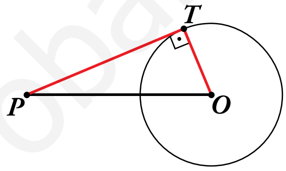
$d = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ cm

La distancia del centro de la circunferencia a la recta es 12 cm.

6. Halla el radio de la circunferencia sabiendo que:

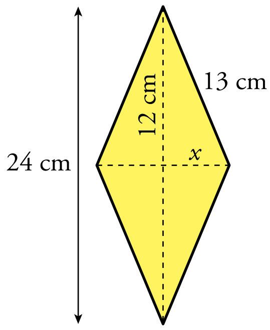
$\overline{OP} = 39$ **cm**

$\overline{PT} = 36$ **cm**



$r = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15$ cm

7. De un rombo conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal.

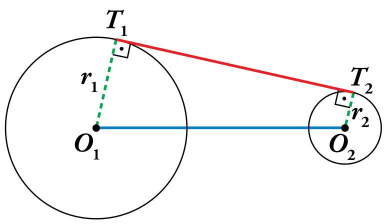


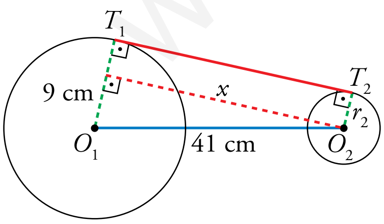
$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

La otra diagonal mide $2 \cdot 5 = 10$ cm.

8. $r_1 = 15$ **cm,** $r_2 = 6$ **cm,** $\overline{O_1O_2} = 41$ **cm.**

Halla la longitud del segmento T_1T_2**.**

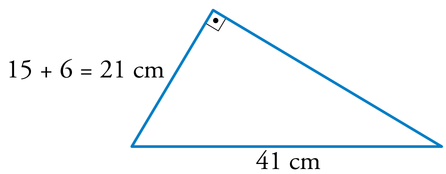




La longitud del segmento T_1T_2 es igual que x:

$x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$ cm

9. Halla la longitud del segmento tangente interior común a las dos circunferencias del ejercicio anterior.



$x = \sqrt{41^2 - 21^2} = \sqrt{1240} \approx 35{,}21$ cm

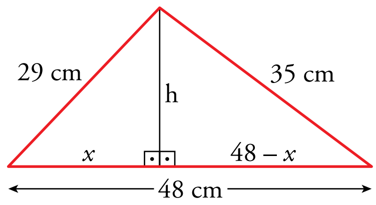
4 Aplicación algebraica del teorema de Pitágoras

Página 190

1. Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

$29^2 + 35^2 = 2066$; $48^2 = 2304$

Como $48^2 > 29^2 + 35^2$, el triángulo es obtusángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + h^2 &= 29^2 \\ (48 - x)^2 + h^2 &= 35^2 \end{aligned}\right\} \text{ Restando: } x^2 - (48 - x)^2 = 29^2 - 35^2$$

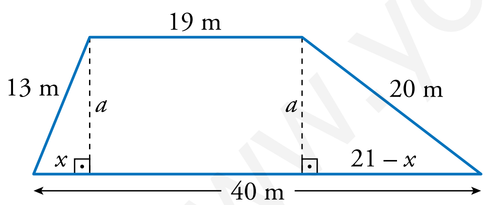
Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 20$ cm.

Calculamos h:

$20^2 + h^2 = 29^2 \ \rightarrow\ h = 21$ cm

La altura sobre el lado mayor mide 21 cm.

2. Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + x^2 &= 13^2 \\ a^2 + (21 - x)^2 &= 20^2 \end{aligned}\right\}$$

Restando: $x^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - 20^2$

Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 5$ m.

Ahora se obtiene el valor de a: $a^2 + 5^2 = 13^2 \ \rightarrow\ a = 12$ m

La altura del trapecio mide 12 m.

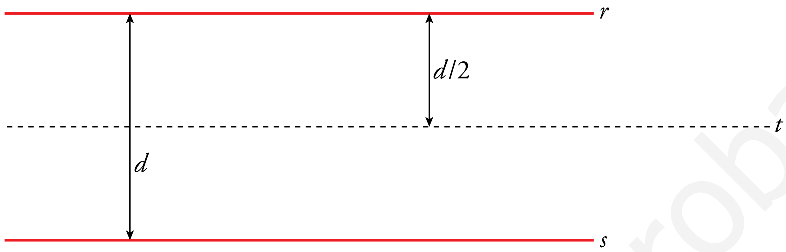
5 Lugares geométricos

Página 191

1. Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.

La circunferencia de centro C y radio 8 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a C es 8 cm: $\overline{CP} = 8$ cm.

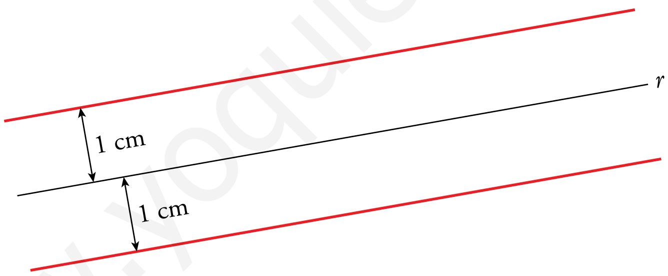
2. Dadas dos rectas paralelas, r y s, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo en tu cuaderno.



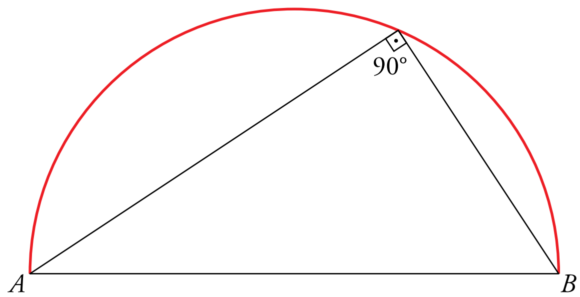
La recta t es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s.

A la recta t se la llama **paralela media** a r y s.

3. Dibuja en negro una recta r. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a r es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).



4. Dibuja una circunferencia de diámetro AB. Defínela como lugar geométrico (arco capaz de 90°).



La circunferencia de diámetro AB (el arco rojo) es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°. Se llama arco capaz de 90° para el segmento AB.

6 Las cónicas como lugares geométricos

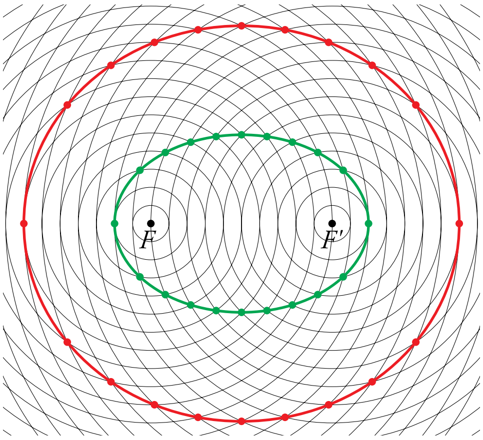
Página 193

1. Toma una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:

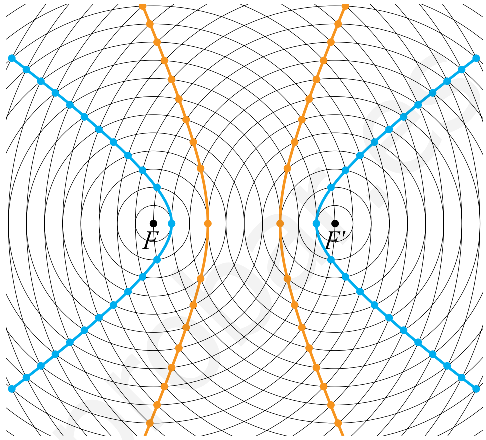
a) Dos elipses con $d = 14$ y $d = 24$.

b) Dos hipérbolas con $d = 8$ y $d = 4$.

a)



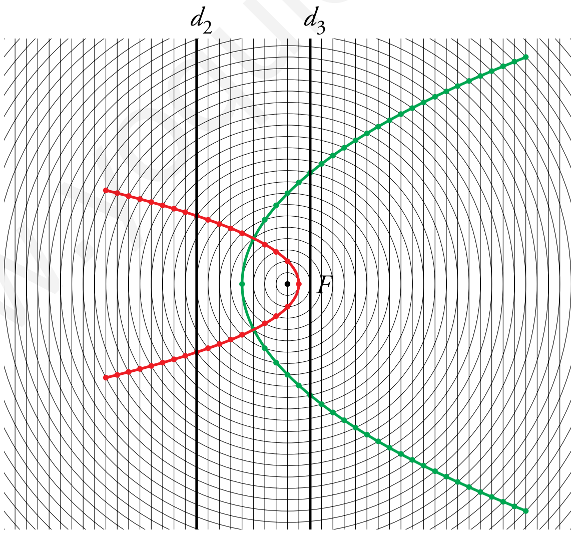
b)



2. Toma una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:

a) Una parábola de foco F y directriz d_2.

b) Una parábola de foco F y directriz d_3.



7 Áreas de los polígonos

Página 194

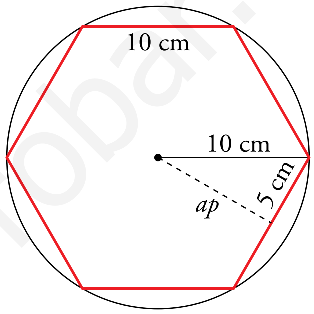
1. Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

Aplicamos la fórmula de Herón:

Perímetro = p = 10 + 17 + 21 = 48 m; $s = \dfrac{48}{2} = 24$ m

$A = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ m}^2$

2. Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

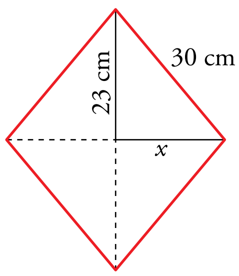


Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema.

$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

$A = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

3. Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.



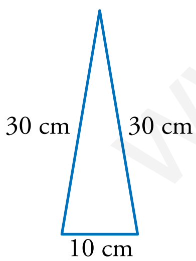
Lado = 3 dm = 30 cm

$x = \sqrt{30^2 - 23^2} = \sqrt{371} \approx 19{,}26$ cm

La otra diagonal mide 2 · 19,26 = 38,52 cm

$A = \dfrac{46 \cdot 38{,}52}{2} = 885{,}96 \text{ cm}^2$

4. Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.



Los lados iguales del triángulo isósceles miden 30 cm, y el otro lado, 10 cm.

No puede ser de otra forma, porque si los lados iguales miden 10 cm, el otro no podría medir 30 cm.

(10 + 10 = 20 < 30)

Aplicamos la fórmula de Herón:

$p = 30 \cdot 2 + 10 = 70$ cm

$s = 35$ cm

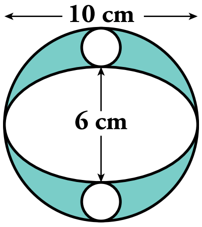
$A = \sqrt{35 \cdot (35-30)^2 \cdot (35-10)} \approx 147{,}9 \text{ cm}^2$

8 Áreas de figuras curvas

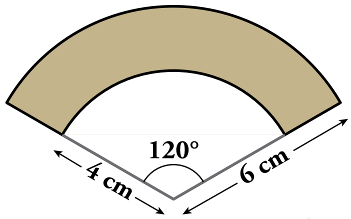
Página 195

1. Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

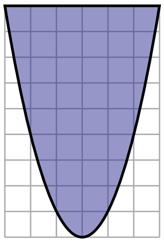
a)



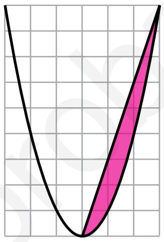
b)



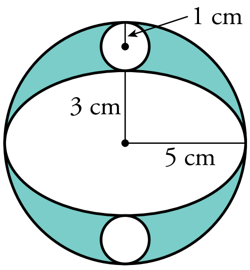
c)



d)



a)



$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 5^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 1^2 \approx 3,14 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 5 \cdot 3 \approx 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78,54 - 2 \cdot 3,14 - 47,12 = 25,14 \text{ cm}^2$

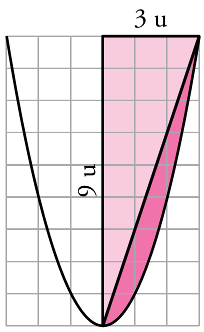
b) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} \approx 20,94 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36 \text{ u}^2$

d) $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 \text{ u}^2$

$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 36 \text{ u}^2$ (según el ejercicio anterior)

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}}}{2} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{36}{2} - 13,5 = 4,5 \text{ u}^2$



Ejercicios y problemas

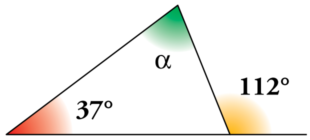
Página 198

Practica

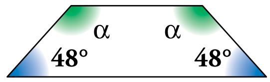
Ángulos

1. **Halla el valor del ángulo α en cada uno de estos casos:**

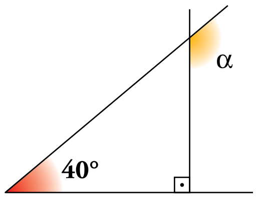
a)



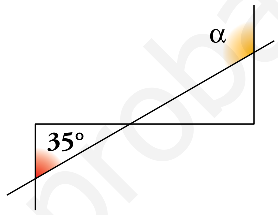
b)



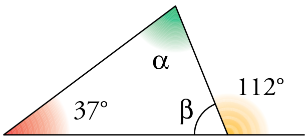
c)



d)



a)

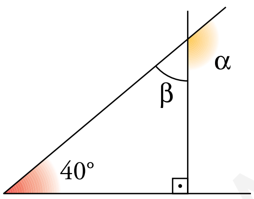


$\beta = 180° - 112° = 68°$

$\alpha = 180° - 37° - 68° = 75°$

b) $2\alpha = 360° - 48° \cdot 2 \rightarrow \alpha = 132°$

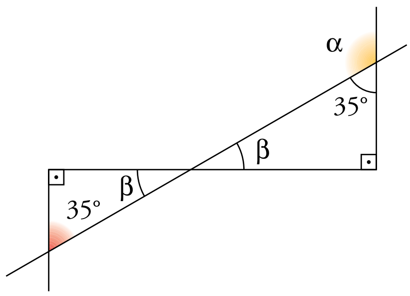
c)



$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$

$\alpha = 180° - 50° = 130°$

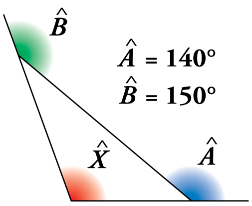
d)



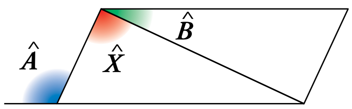
$\alpha = 180° - 35° = 145°$

2. **Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada caso:**

a)

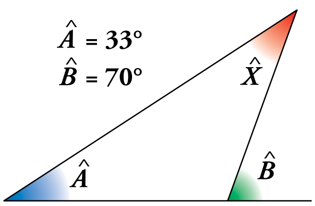


b)

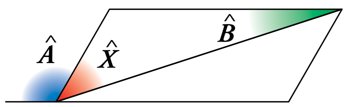


$\hat{A} = 115°$
$\hat{B} = 25°$

c)



d)

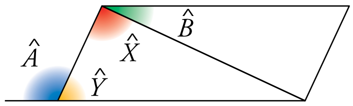


$\hat{A} = 120°$
$\hat{B} = 18°$

a) $\hat{A} = 140° \rightarrow 180° - 140° = 40°$; $\hat{B} = 150° \rightarrow 180° - 150° = 30°$;

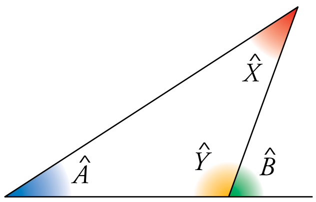
$\hat{X} = 180° - 40° - 30° = 110°$

b)



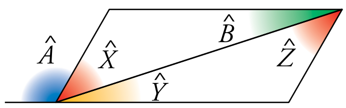
$\hat{Y} = 180° - 115° = 65°$; $\hat{Z} = 180° - 25° - 65° = 90°$; $\hat{X} = \hat{Z} = 90°$

c)



$\hat{Y} = 180° - 70° = 110°$; $\hat{X} = 180° - 110° - 33° = 37°$

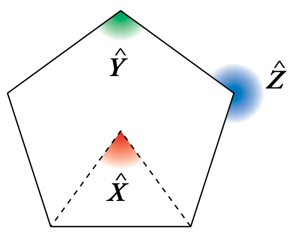
d)



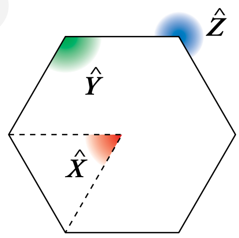
$\hat{X} + \hat{Y} = 180° - 120° = 60°$; $\hat{B} + \hat{Z} = 60° \rightarrow \hat{Z} = 60° - 18° = 42°$; $\hat{X} = \hat{Z} = 42°$

3. **Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

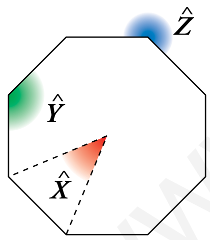
a)



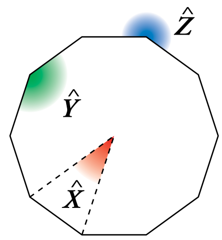
b)



c)

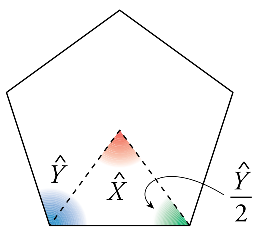


d)



a) $\hat{X}$ es un ángulo central del pentágono regular.

Por tanto, $\hat{X} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.



$$\frac{\widehat{Y}}{2} + \frac{\widehat{Y}}{2} + \hat{X} = 180°$$

$$\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 72° = 108°$$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 360° - 108° = 252°$

b) $\hat{X} = 360° : 6 = 60°$

$\hat{Y} = \dfrac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°$

$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

c) $\hat{X} = 360° : 8 = 45°$

$\hat{Y} = \dfrac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$

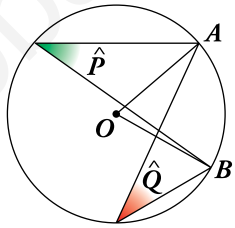
$\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

d) $\hat{X}$ es un ángulo central del decágono regular.

Por tanto, $\hat{X} = \dfrac{360°}{10} = 36°$.

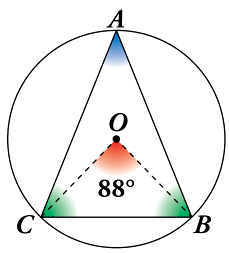
$\hat{Y} = \dfrac{180° \cdot (10-2)}{10} = 144°$; $\hat{Z} = 360° - 144° = 216°$

4. **Indica cuánto miden los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$, sabiendo que $\widehat{AOB} = 70°$.**



$\hat{P} = \hat{Q} = \dfrac{70°}{2} = 35°$

5. **El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es $\widehat{BOC} = 88°$.

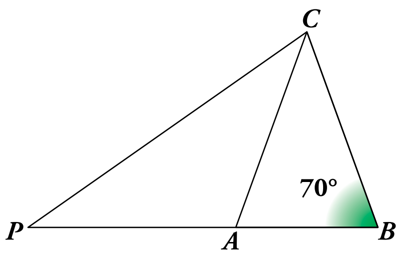
$\hat{A} = 88° : 2 = 44°$

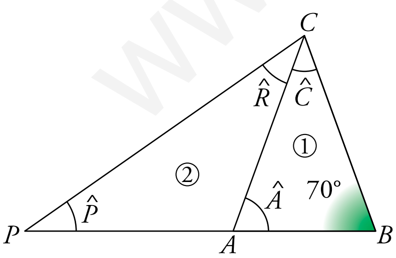
$\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ suman 180° y $\hat{B} = \hat{C}$.

$(180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$

$\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = \hat{C} = 68°$

6. **Sabiendo que $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{BC}$, $\hat{B} = 70°$, halla el ángulo $\widehat{PCB}$ en el siguiente triángulo:**





Si $\overline{AC} = \overline{BC}$, el triángulo ABC es isósceles, tiene dos ángulos iguales, $\hat{A} = \hat{B} = 70°$. El otro ángulo mide $\hat{C} = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.

Si $\overline{PA} = \overline{AC}$, el triángulo ACP es isósceles, tiene dos ángulos iguales, $\hat{P} = \hat{R}$. El otro ángulo mide $\hat{Q} = 180° - 70° = 110°$ y, por tanto, $\hat{R} = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$.

Por último, $\widehat{PCB} = \hat{C} + \hat{R} = 40° + 35° = 75°$.

Semejanza

7. **Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza 1,2.**

Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ sabiendo que:

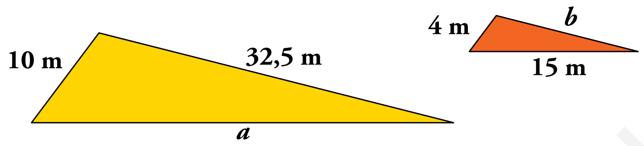
$\overline{AB}$ = 16 cm **$\overline{BC}$ = 25 cm** **$\overline{AC}$ = 39 cm**

$\overline{A'B'} = 1{,}2 \cdot 16 = 19{,}2$ cm

$\overline{B'C'} = 1{,}2 \cdot 25 = 30$ cm

$\overline{A'C'} = 1{,}2 \cdot 39 = 46{,}8$ cm

8. **Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:**



Como todos sus lados son paralelos, sus ángulos son iguales, por lo que los dos triángulos son semejantes. Así:

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} = \frac{32{,}5}{b}$$

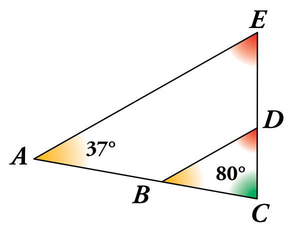
$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} \rightarrow 4a = 150 \rightarrow a = 37{,}5 \text{ m}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{32{,}5}{b} \rightarrow 10b = 130 \rightarrow b = 13 \text{ m}$$

9. **Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm, $\overline{BD}$ = 6,4 cm, $\overline{AE}$ = 18 cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, halla $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



Por semejanza de triángulos:

a) $\dfrac{18}{6{,}4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6{,}4}{18} \approx 3{,}9$ cm

$\dfrac{18}{6{,}4} = \dfrac{15}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{15 \cdot 6{,}4}{18} \approx 5{,}33$ cm

b) $\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

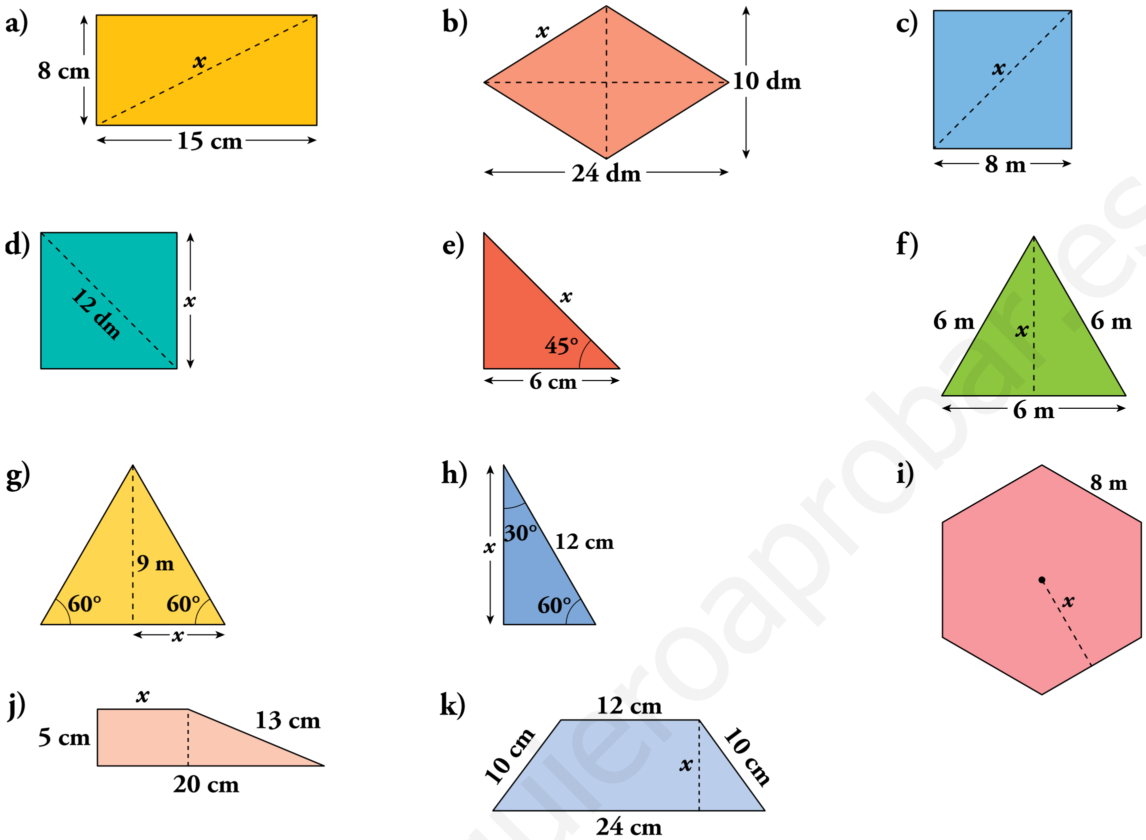
$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

Página 199

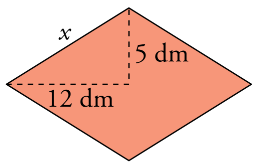
Teorema de Pitágoras

10. **Calcula el valor de x en cada caso:**



a) $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ cm

b)



$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ dm

c) $x = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}3$ m

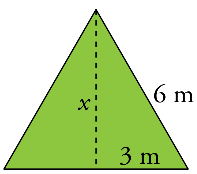
d) $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ dm

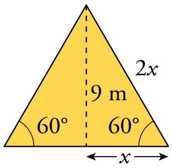
e) Como es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro tendrá que medir 45° también, por lo que sabemos que el triángulo es isósceles. Así:

$x = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ cm

f)



$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

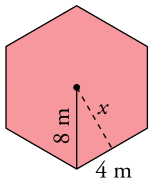
g) 

Como dos de sus ángulos miden 60°, el otro también medirá 60°. Como tiene los tres ángulos iguales, el triángulo es equilátero. Si medio lado mide x, el lado entero medirá $2x$.

$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow 3x^2 = 81 \rightarrow x = \sqrt{27} \approx 5,2$ m

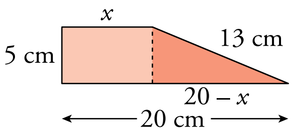
h) El triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado a), el lado que no mide ni 12 cm ni x, es la mitad de 12 cm, es decir, 6 cm. Por tanto:

$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,4$ cm

i) 

Como es un hexágono, el radio es igual que el lado. Por eso:

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9$ cm

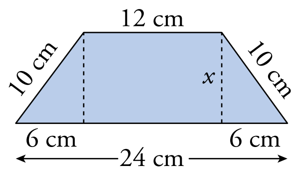
j) 

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo:

$13^2 = 5^2 + (20 - x)^2 \rightarrow x^2 - 40x + 256 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 32$ cm, $x = 8$ cm

La solución $x = 32$ cm no tiene sentido, ya que $x < 20$. Por tanto, $x = 8$ cm.

k) 

$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

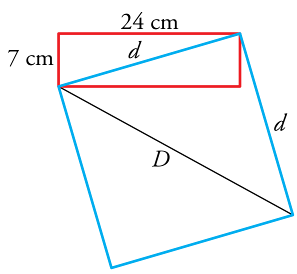
11. **La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro.**

$l \rightarrow$ lado de falta

$l = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1225} = 35$ cm

Perímetro $= 2 \cdot 35 + 2 \cdot 12 = 94$ cm

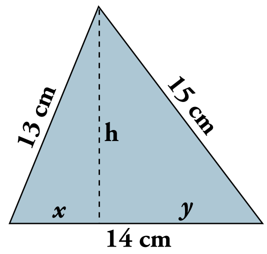
12. **La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.**



$d = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

$D = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} \approx 35,36$ cm

13. **Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de h, x e y.**



$y = 14 - x$

$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 13^2 \\ h^2 + (14 - x)^2 = 15^2 \end{array}\right\}$ Restando, $x^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - 15^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 196 + 28x - x^2 = -56 \rightarrow x = \dfrac{-56 + 196}{28} = 5$

Por tanto, $x = 5$ cm, $h = \sqrt{169 - 25} = 12$ cm, $y = 14 - 5 = 9$ cm.

14. **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 11 m, 13 m, 20 m. **b) 20 m, 21 m, 29 m.**

c) 25 m, 29 m, 36 m. **d) 7 m, 24 m, 25 m.**

a) $11^2 + 13^2 = 290$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 11^2 + 13^2$, el triángulo es obtusángulo.

b) $20^2 + 21^2 = 841$; $29^2 = 841$

Como $29^2 = 20^2 + 21^2$, el triángulo es rectángulo.

c) $25^2 + 29^2 = 1\,466$; $36^2 = 1\,296$

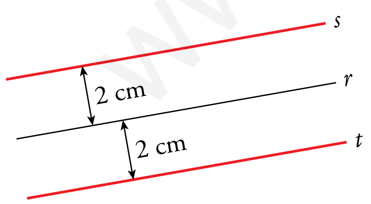
Como $36^2 < 25^2 + 29^2$, el triángulo es acutángulo.

d) $7^2 + 24^2 = 625$; $25^2 = 625$

Como $25^2 = 7^2 + 24^2$, el triángulo es rectángulo.

Lugares geométricos y cónicas

15. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.**

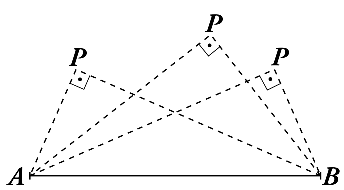


Las rectas s y t son el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta r es de 2 cm.

Las rectas s y t son paralelas a r, cada una a un lado de esta y a 2 cm de distancia de r.

16. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?**

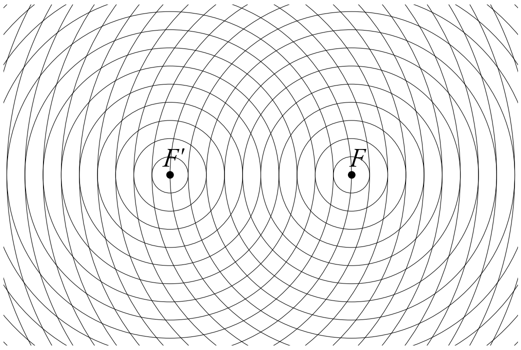
La circunferencia de centro el punto medio de $\overline{AB}$ (exceptuando los puntos A y B) es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto.

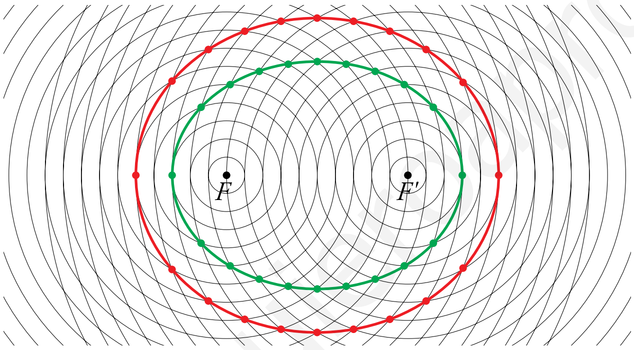


17. **Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.**

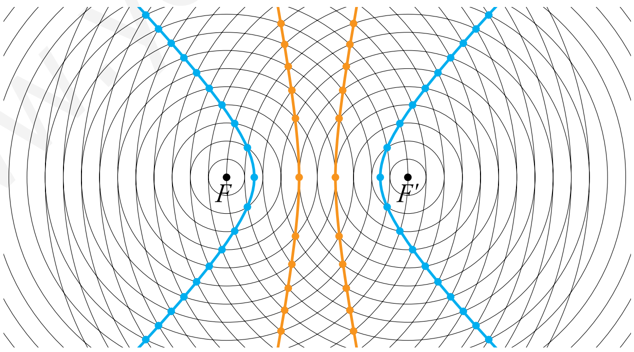
El circuncentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus vértices. El incentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

18. **Utiliza una trama como la siguiente para dibujar dos elipses de focos F y F' y constantes $d_1 = 16$ y $d_2 = 20$, (tomando como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).**

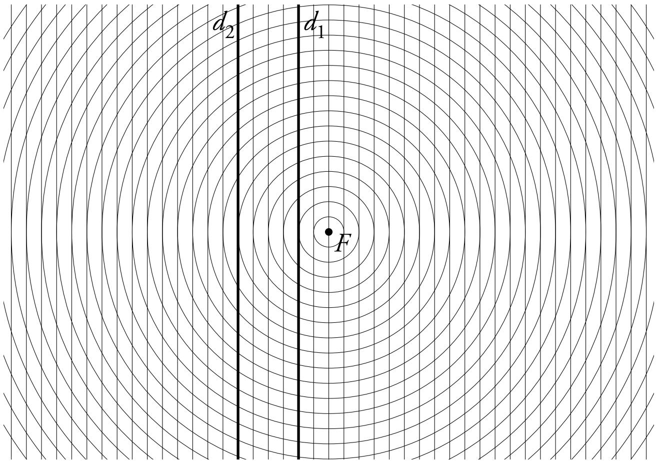


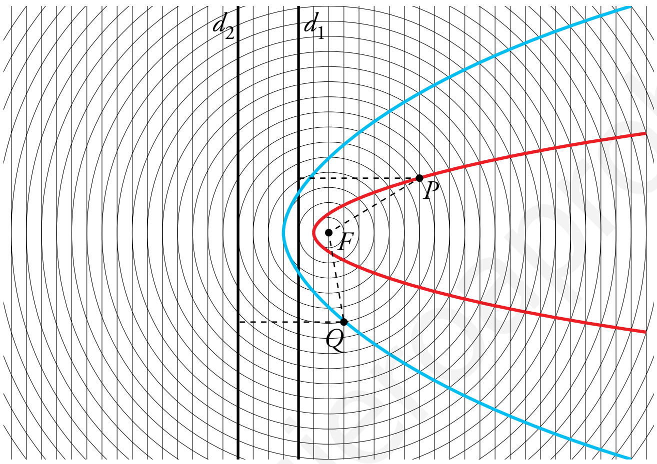


19. **En una trama como la del ejercicio anterior, dibuja dos hipérbolas de focos F y F' y constantes $d_1 = 2$ y $d_2 = 7$.**



20. **Utiliza esta trama para dibujar dos parábolas de foco F y de directrices d_1 y d_2.**



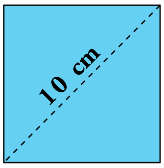


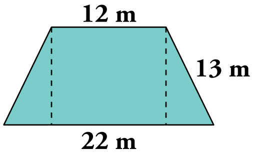
La parábola roja tiene como directriz d_1 y la azul tiene como directriz d_2.

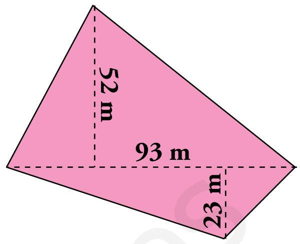
Página 200

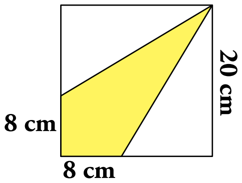
Áreas

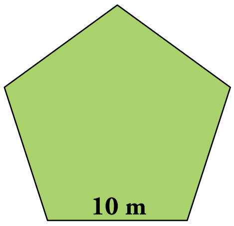
21. **Halla el área de la parte coloreada:**

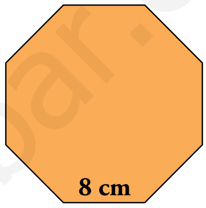
a) 

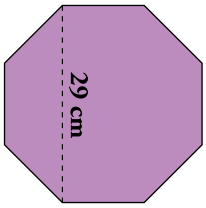
b) 

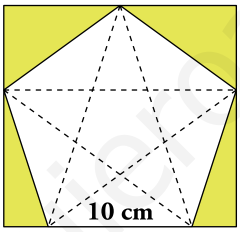
c) 

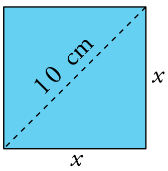
d) 

e) 

f) 

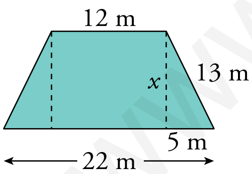
g) 

h) 

a) 

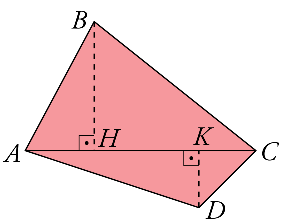
$x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm

$A = 7{,}1^2 = 50$ cm^2

b) 

$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

$A = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 12 = 192$ m^2

c) 

$A_{\text{TRIÁNGULO } ABC} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} = 2\,418$ m^2

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 1\,069{,}5$ m^2

$A_{\text{TOTAL}} = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5$ m^2

d) $A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400$ cm^2

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 20}{2} = 120$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 400 - 2 \cdot 120 = 160$ cm^2

e) $a = 0{,}6882 \cdot 10 = 6{,}882$ cm (ver ejercicio resuelto 1, apartado d), de la página 196).

Por tanto, el área del pentágono es $A = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}882}{2} = 172{,}05 \text{ cm}^2$.

f) $a = 1{,}2071 \cdot 8 = 9{,}6568$ cm (ver ejercicio resuelto 1, apartado e), de la página 197).

Por tanto, el área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot 9{,}6568}{2} \approx 309{,}02 \text{ cm}^2$.

g) Imaginemos que el octógono está inscrito en un cuadrado de 29 cm de lado, y llamaremos x a la medida del lado del octógono. Utilizando el resultado del ejercicio resuelto 2 de la página 197, $x = \dfrac{29}{\sqrt{2} + 2} \approx 8{,}49$ cm.

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior, $a = 1{,}2071 \cdot 8{,}49 \approx 10{,}2483$ cm.

Por tanto, el área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 8{,}49 \cdot 10{,}2483}{2} \approx 348{,}03 \text{ cm}^2$.

h) El pentágono es el mismo que el del apartado e), su área es $172{,}05 \text{ cm}^2$. Vamos a calcular el área del cuadrado exterior y las restaremos.

La diagonal del pentágono regular es igual a Φl. Por tanto, $d = \dfrac{(1 + \sqrt{5}) \cdot 10}{2} \approx 16{,}18$ cm.

Elegimos el triángulo isósceles que tiene como base la del pentágono y como lados iguales dos de las diagonales del pentágono, y calculamos su altura: $h = \sqrt{16{,}18^2 - 5^2} \approx 15{,}39$ cm.

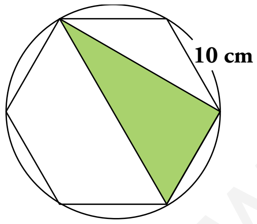
Esta altura coincide con el lado del cuadrado, cuya área será:

$A_{\text{CUADRADO}} = 15{,}39^2 = 236{,}85 \text{ cm}^2$

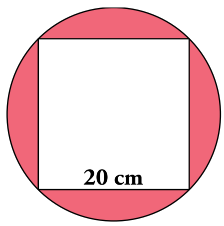
Por tanto, el área de la parte coloreada es $A = 236{,}85 - 172{,}05 = 64{,}8 \text{ cm}^2$.

22. **Halla las áreas de las siguientes figuras coloreadas:**

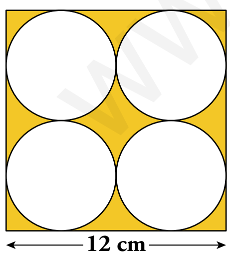
a)



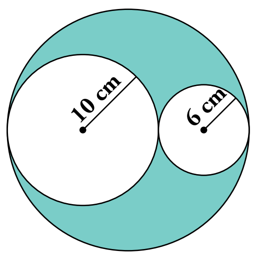
b)



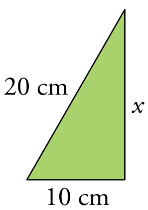
c)



d)



a) Como sabemos, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Por eso, del triángulo (que sabemos que es rectángulo) conocemos las siguientes medidas:



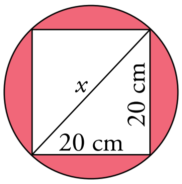
hipotenusa $= 2 \cdot 10 = 20$ cm

un cateto $= 10$ cm

$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}32$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{10 \cdot 17{,}32}{2} = 86{,}6 \text{ cm}^2$

b)



$x = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28{,}28$ cm

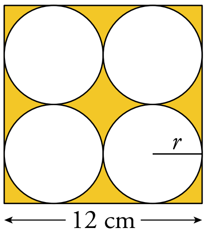
radio $= \dfrac{x}{2} = 14{,}14$ cm

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 14{,}14^2 \approx 628{,}13$ cm^2

$A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400$ cm^2

$A_{\text{TOTAL}} = 628{,}13 - 400 = 228{,}13$ cm^2

c)



$r = \dfrac{12}{4} = 3$ cm

$A_{\text{CUADRADO}} = 12 \cdot 12 = 144$ cm^2

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 3^2 \approx 28{,}27$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 28{,}27 = 30{,}92$ cm^2

d) El diámetro del círculo grande mide $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32$ cm.

Su radio medirá $\dfrac{32}{2} = 16$ cm.

$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 16^2 \approx 804{,}25$ cm^2

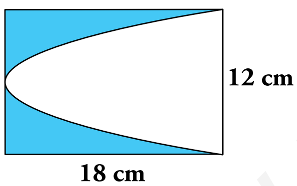
$A_{\text{CÍRCULO MEDIANO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16$ cm^2

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}1$ cm^2

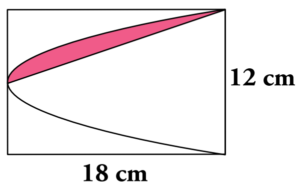
$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 804{,}25 - 314{,}16 - 113{,}1 \approx 377$ cm^2

23. **Halla el área de cada una de las siguientes figuras coloreadas:**

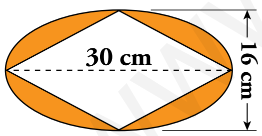
a)



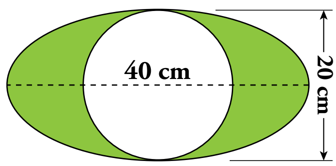
b)



c)



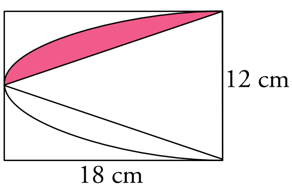
d)



a) Área del segmento de parábola: $A = \dfrac{2}{3} \cdot 18 \cdot 12 = 144$ cm^2

Área de la zona coloreada $= 18 \cdot 12 - 144 = 72$ cm^2

b) Área de la zona coloreada $= \dfrac{A_{\text{SEGMENTO DE PARÁBOLA}} - A_{\text{TRIÁNGULO}}}{2} =$



$= \dfrac{144 - 12 \cdot 18/2}{2} = 18$ cm^2

c) Área de la elipse = $\pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi \text{ cm}^2 \approx 377 \text{ cm}^2$

Área del rombo = $\dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$

Área total = $120\pi - 240 = 136{,}9 \text{ cm}^2$

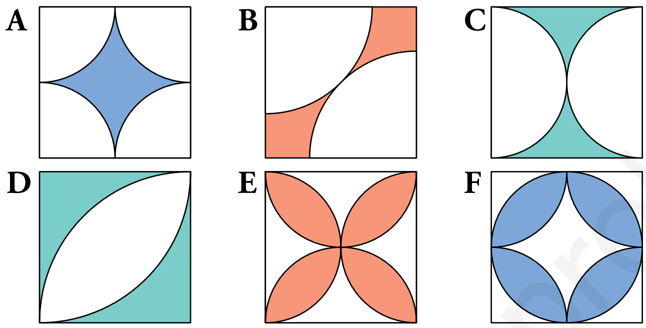
d) Calculamos el área de la elipse: $A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 628{,}32 \text{ cm}^2$

Calculamos el área del círculo: $A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$

Obtenemos el área de la figura coloreada restando las áreas anteriores:

$A = 628{,}32 - 314{,}16 = 368{,}16 \text{ cm}^2$

24. **Estos cuadrados tienen 1 m de lado. Calcula (en cm^2) el área de la parte coloreada:**



$A_{\text{CUADRADO}} = 100^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$

Figura A

$A_{\text{1/4 DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \dfrac{7\,854}{4} \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 4 \cdot \dfrac{7\,854}{4} = 2\,146 \text{ cm}^2$

Figura B

Calculamos la diagonal del cuadrado, $d = \sqrt{100^2 + 100^2} \approx 141{,}42 \text{ cm}$

El radio de las circunferencias es $\dfrac{141{,}42}{2} = 70{,}71$ cm.

$A_{\text{1/4 DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 70{,}71^2 \approx \dfrac{15\,707{,}66}{4} \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \dfrac{15\,707{,}66}{4} = 2\,146{,}17 \text{ cm}^2$

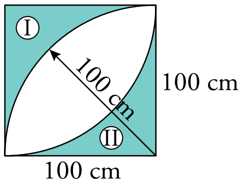
Figura C

El radio de las circunferencias es 50 cm.

$A_{\text{1/2 CÍRCULO}} = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \dfrac{7\,854}{2} \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \dfrac{7\,854}{2} = 2\,146 \text{ cm}^2$

Figura D



$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{1}{4}\ \pi \cdot 100^2 \approx 7\,854 \text{ cm}^2$

$A_{I} = A_{II} = 10\,000 - 7\,854 \approx 2\,146 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 2\,146 = 4\,292 \text{ cm}^2$

Figura E

El área de la parte coloreada de la figura C es la mitad del área de las partes blancas de esta figura. Por tanto, $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot 2\,146 = 5\,708 \text{ cm}^2$

Figura F

La parte coloreada de la figura A es la parte blanca del centro de esta figura.

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 50^2 \approx 7\,854 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 7\,854 - 2\,146 = 5\,708 \text{ cm}^2$

25. **Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:**

a) 90° **b) 120°** **c) 65°** **d) 140°**

a) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 90° \approx 176{,}71 \text{ cm}^2$

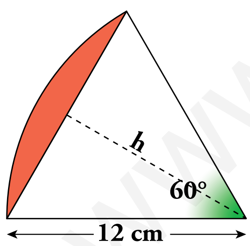
b) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 120° \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

c) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 65° \approx 127{,}63 \text{ cm}^2$

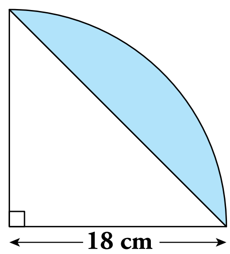
d) $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 140° \approx 274{,}89 \text{ cm}^2$

26. **Calcula el área de los siguientes segmentos circulares:**

a)



b)



a) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60°}{360°} = 75{,}4 \text{ cm}^2$

Altura del triángulo equilátero: $h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 75{,}4 - 62{,}4 = 13 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254{,}5 - 162 = 92{,}5 \text{ cm}^2$

27. **Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.**

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm.

b) 110 m, 264 m y 286 m.

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam.

d) 48 m, 140 m y 148 m.

a) $51^2 + 68^2 = 7\,225 = 85^2$

$$A = \frac{51 \cdot 68}{2} = 1\,734 \text{ cm}^2$$

$$A = \sqrt{102 \cdot 51 \cdot 34 \cdot 17} = 1\,734 \text{ cm}^2$$

b) $110^2 + 264^2 = 81\,796 = 286^2$

$$A = \frac{110 \cdot 264}{2} = 14\,520 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{330 \cdot 220 \cdot 66 \cdot 44} = 14\,520 \text{ m}^2$$

c) $72^2 + 135^2 = 23\,409 = 153^2$

$$A = \frac{72 \cdot 135}{2} = 4\,860 \text{ dam}^2$$

$$A = \sqrt{180 \cdot 108 \cdot 45 \cdot 27} = 4\,860 \text{ dam}^2$$

d) $48^2 + 140^2 = 21\,904 = 148^2$

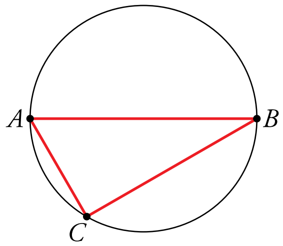
$$A = \frac{48 \cdot 140}{2} = 3\,360 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{168 \cdot 120 \cdot 28 \cdot 20} = 3\,360 \text{ m}^2$$

Página 201

Piensa y resuelve

28. **Dibuja un triángulo *ABC* inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices *A* y *B* sean extremos de un diámetro y el arco $\overset{\frown}{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$\overset{\frown}{AC} = 60° \to \hat{B} = 30°$

$\overset{\frown}{AB} = 180° \to \hat{C} = 90°$

$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 60°$

29. **Se llama triángulo heroniano al que tiene lados enteros y área entera. Triángulos rectángulos con lados y área enteros ya se conocían mucho antes de la época de Herón, pero a él se atribuye el descubrimiento del triángulo de lados 13, 14, 15 y área 84 (no es rectángulo, pero tiene lados y área enteros). El nombre de triángulos heronianos es un homenaje a Herón por este descubrimiento.**

Aplica la fórmula de Herón para hallar el área de cada uno de estos triángulos de los que conocemos sus lados:

a) 13 cm, 14 cm, 15 cm (comprueba que es 84 cm²).

b) 5 m, 5 m, 6 m.

c) 13 dm, 20 dm, 21 dm.

d) 25 cm, 34 cm, 39 cm.

Fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y s es la mitad de su perímetro.

a) $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ cm

$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ cm}^2$

b) $s = \dfrac{5+5+6}{2} = 8$ m

$A = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}^2$

c) $s = \dfrac{13+20+21}{2}$) 27 dm

$A = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{15\,876} = 126 \text{ dm}^2$

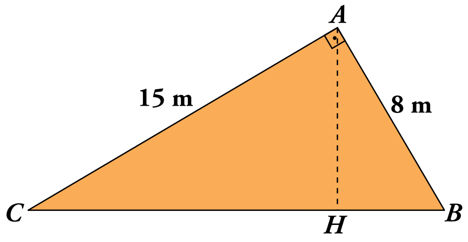
d) $s = \dfrac{25+34+39}{2} = 49$ cm

$A = \sqrt{49(49-25)(49-34)(49-39)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ cm}^2$

30. **El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, y AH es la altura sobre la hipotenusa.**

a) Demuestra que los triángulos ABH y AHC son semejantes.

b) Calcula las longitudes $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$.



a) Los triángulos ABC y ABH son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{B}$ en común y son rectángulos.

Los triángulos ABC y AHC son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{C}$ en común y son rectángulos.

Por tanto, los triángulos ABH y AHC también son semejantes.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

Por ser $\widehat{AHB}$ semejante a $\widehat{CAB}$:

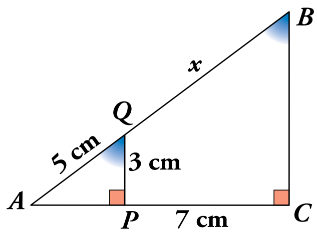
$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \to \overline{HB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CB}} = \frac{8^2}{17} = \frac{64}{17} \approx 3{,}76 \text{ cm}$$

Por ser $\widehat{AHC}$ semejante a $\widehat{BAC}$:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \to \overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} = \frac{15^2}{17} = \frac{225}{17} \approx 13{,}24 \text{ cm}$$

31. **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos *APQ* y *ACB*?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) Son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{A}$ en común y son los dos rectángulos. Como tienen dos ángulos iguales, el tercero también es igual.

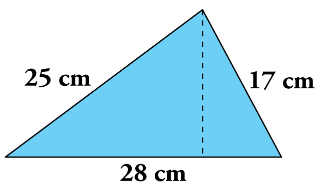
b) Calculamos $\overline{AP}$ por Pitágoras:

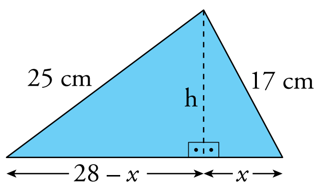
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \to \frac{7+4}{4} = \frac{5+x}{5} \to x = 8{,}75 \text{ cm}$$

32. **Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.**

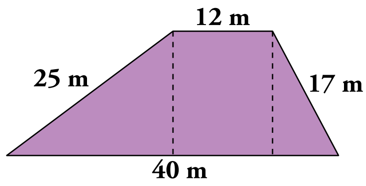


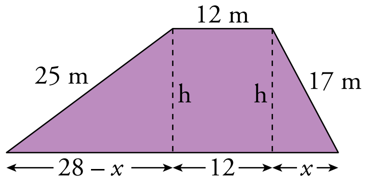


$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 17^2 \\ (28-x)^2 + h^2 = 25^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\}$$

$$A = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$$

33. **Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.**





$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ m} \\ h = 15 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{40 + 12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

34. **Halla el radio de un arco de 100,48 m de longitud y 72° de apertura (π = 3,14).**

Calculamos la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{360°} = \frac{100,48}{72°} \rightarrow l = 502,4 \text{ m}$$

Hallamos el radio: $2\pi r = 502,4$ m

Así, $r = \dfrac{502,4}{2\pi} = 79,96$ m

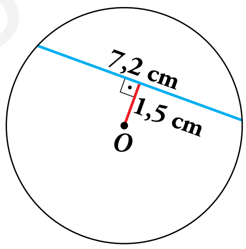
35. **Calcula la medida, en grados, de un arco que mide 31,4 cm correspondiente a una circunferencia de 471 cm de longitud (π = 3,14).**

$$l_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2\pi \cdot r = 471 \rightarrow r = \frac{471}{2\pi} = 75 \text{ cm}$$

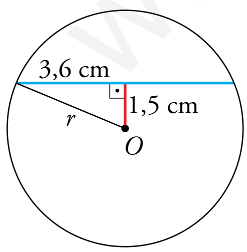
$$l_{\text{ARCO}} = \frac{2\pi \cdot 75}{360°} \cdot (\text{APERTURA}) = 3,14 \rightarrow \text{APERTURA} = 24°$$

36. **a) Calcula el radio de esta circunferencia.**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

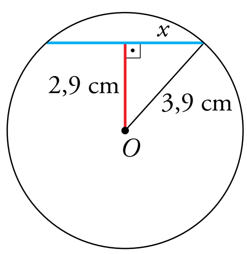


a)



$$r = \sqrt{3,6^2 + 1,5^2} = \sqrt{15,21} = 3,9 \text{ cm}$$

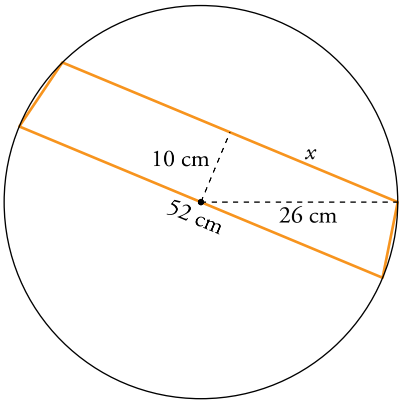
b)



$$x = \sqrt{3,9^2 - 2,9^2} = \sqrt{6,8} \approx 2,6 \text{ cm}$$

La longitud de la cuerda será 2 · 2,6 = 5,2 cm

37. **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



$26^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow 676 = 100 + x^2 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{576} \rightarrow x = 24$ cm

La base menor mide $24 \cdot 2 = 48$ cm

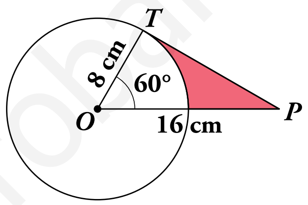
$$\text{Área} = \frac{48 + 52}{2} \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$$

Solución: El área del cuadrilátero es de 500 cm^2.

38. **Calcula:**

a) La longitud de ***PT.***

b) El área de la parte coloreada.



a) $\overline{PT} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} \approx 13,86$ cm

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{360°} \cdot 60° \approx 33,51 \text{ cm}^2$

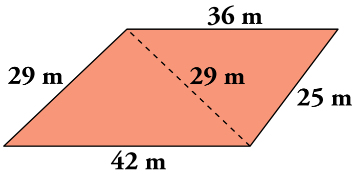
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{8 \cdot 13,86}{2} = 54,24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 54,24 - 33,51 = 20,73 \text{ cm}^2$

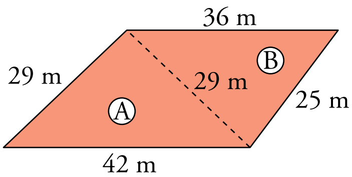
Página 202

Resuelve problemas

39. **Una finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**



Aplicamos la fórmula de Herón:



$$s_{Ⓐ} = \frac{29 + 29 + 42}{2} = 50 \text{ m}$$

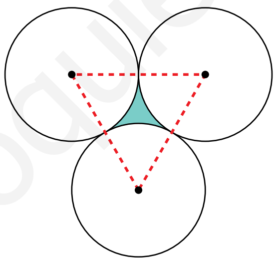
$$A_{Ⓐ} = \sqrt{50\,(50 - 29)^2\,(50 - 42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$$

$$s_{Ⓑ} = \frac{29 + 36 + 25}{2} = 45 \text{ m}$$

$$A_{Ⓑ} = \sqrt{45\,(45 - 29)\,(45 - 36)\,(45 - 25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$$

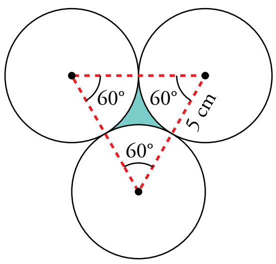
$$A_{\text{FINCA}} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} = 780 \text{ m}^2$$

40. **Calcula el área del recinto que tiene Sara para sembrar, es el que está entre los tres depósitos de agua cilíndricos de 5 m de radio que ha puesto su padre en el jardín.**



Como es un triángulo equilátero, sus ángulos son de 60°.

$$A_{\text{SECTOR } 60°} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 60° \approx 13{,}09 \text{ cm}^2$$

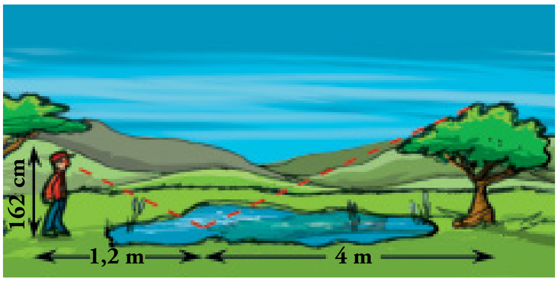


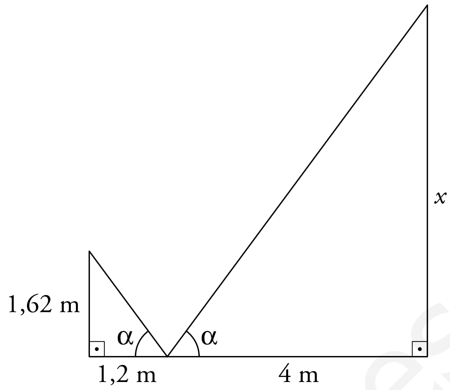
Aplicamos la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de lado 10 cm:

$$s = \frac{30}{2} = 15 \;\rightarrow\; A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{15 \cdot (5)^3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 43{,}3 - 3 \cdot 13{,}09 = 4{,}09 \text{ cm}^2$$

41. **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**

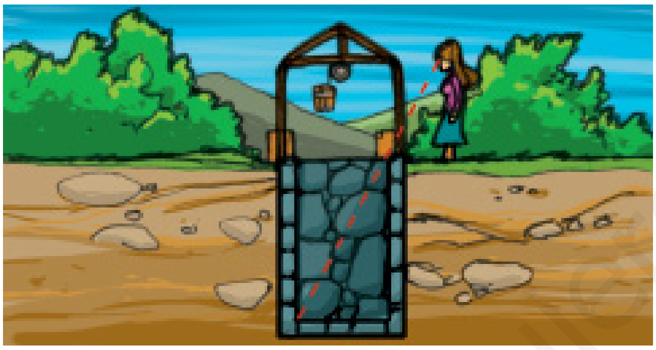


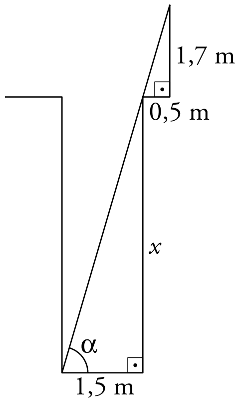


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{4}{1,2} = \frac{x}{1,62} \rightarrow x = 5,4 \text{ m}$$

42. **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, observas que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**



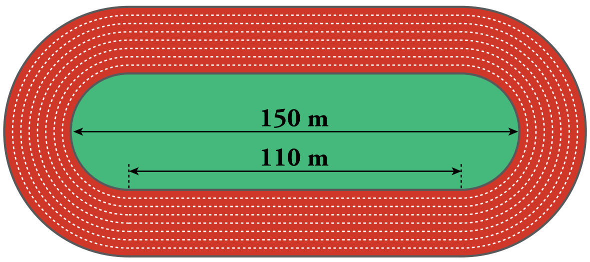


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{x}{1,7} \rightarrow x = 5,1 \text{ m}$$

43. **Se quiere renovar con material sintético, que cuesta 15 €/m², el piso de una pista de atletismo como la que ves en la figura, compuesta por 8 calles de 1 m de anchura.**

¿A cuánto ascenderá el presupuesto para la compra del material?



$A_{PISTA} = \pi \cdot 9^2 - \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot (110 \cdot 8) \approx 2\,011,33 \text{ m}^2$

PRESUPUESTO $= 2\,011,33 \cdot 15 \approx 30\,170$ €

44. **¿Cuál es el diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por el agujero cuya sección es un triángulo equilátero de 6 cm de lado?**

El diámetro de la tubería coincidirá con el de la circunferencia inscrita en el triángulo. Esta circunferencia tiene por radio la apotema del triángulo y sabemos que la apotema de un triángulo equilátero es 1/3 de su altura.

$h = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}20$ cm

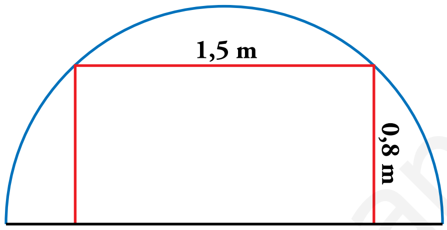
$ap = \frac{1}{3}5{,}20 \approx 1{,}73$ cm

$d = 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$ cm

El diámetro de la tubería es 3,46 cm.

45. **Se va a perforar un túnel semicircular por el que circulará una vagoneta de 1,5 m de ancho por 0,8 m de alto.**

¿Qué diámetro, como mínimo, debe tener la sección del túnel?



Si dibujamos el círculo completo, tendremos un rectángulo de base 1,5 m y altura 2 · 0,8 = = 1,6 m inscrito en él. La diagonal de este rectángulo coincide con el diámetro del círculo.

$d = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}6^2} \approx 2{,}19$ m

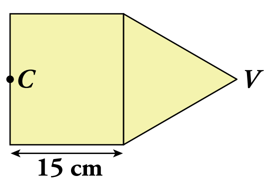
La sección del túnel debe tener, como mínimo, 2,19 m.

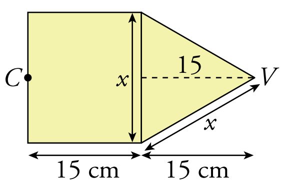
46. **Una antena de telecomunicaciones está sujeta por 4 tirantes de cable. El extremo superior de cada tirante se sujeta a la antena a una altura de 40 m. El extremo inferior está amarrado al suelo a una distancia de 30 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros de cable se han utilizado?**

Cada tirante forma con la antena y el suelo un triángulo rectángulo de catetos, 30 m y 40 m, por lo que la medida de cada uno será: $l = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ m.

Se han utilizado 200 m de cable.

47. **Calcula la superficie que ocupa, cerrado, el sobre que ves en la figura, sabiendo que la solapa es un triángulo equilátero y que si lo cierras, el vértice *V* coincide exactamente con el centro, *C*, del lado opuesto.**





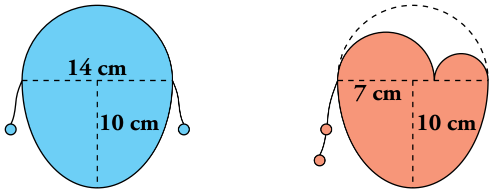
$15^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \rightarrow 225 = \frac{3}{4}x^2 \rightarrow x = \sqrt{300} \approx 17{,}32$

$S_{\text{SOBRE CERRADO}} \approx 17{,}32 \cdot 15 = 259{,}8 \text{ cm}^2$

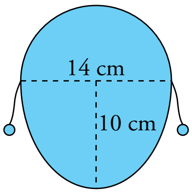
Página 203

Problemas "+"

48. **Halla los radios, x e y, de los dos semicírculos de la figura naranja para que su superficie total sea el 80 % de la superficie de la azul (con los dos circulitos de 1 cm de diámetro incluidos en las dos figuras).**



$A_{1^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$



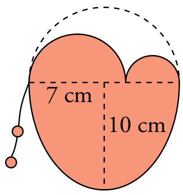
$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} = \dfrac{\pi \cdot 10 \cdot 7}{2} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \dfrac{\pi \cdot 7^2}{2} \approx 76{,}97 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}79 \text{ cm}^2$

$A_{1^a \text{ FIGURA}} = 109{,}96 + 76{,}97 + 2 \cdot 0{,}79 = 188{,}51 \text{ cm}^2$

$A_{2^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$



$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} = \dfrac{\pi \cdot y^2}{2}$

$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \dfrac{\pi \cdot x^2}{2}$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = 0{,}79 \text{ cm}^2$

$A_{2^a \text{ FIGURA}} = 0{,}8 \cdot 188{,}51 \approx 150{,}81 \text{ cm}^2$

Por tanto, sabemos que:

$$150{,}81 = 109{,}96 + \frac{\pi \cdot x^2}{2} + \frac{\pi \cdot y^2}{2} + 2 \cdot 0{,}79$$

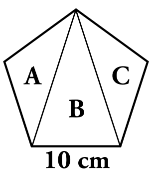
y además sabemos que:

$$2x + 2y = 14$$

Resolvemos el sistema y nos queda $x = 3$, $y = 4$ o $x = 4$, $y = 3$.

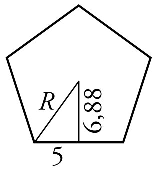
Solución: los radios de los dos semicírculos miden 3 cm y 4 cm.

49. **Calcula el área de cada uno de los tres triángulos en que se ha dividido un pentágono regular de 10 cm de lado por las dos diagonales que salen de un vértice.**



La apotema del pentágono es 0,688 · 10 = 6,88 cm.

Radio del pentágono, $R = \sqrt{5^2 + 6,88^2} \approx 8,5$ cm

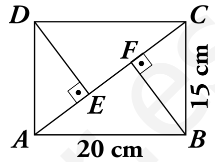


$$A_{\text{PENTÁGONO}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{B}} \approx \frac{10 \cdot (6,88 + 8,5)}{2} = 76,9 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{A}} = A_{\text{C}} \approx \frac{172 - 76,9}{2} = 47,55 \text{ cm}^2$$

50. Observando esta figura, halla:



a) El área del triángulo *ABC*.

b) La longitud del segmento *BF* (altura sobre la hipotenusa del triángulo *ABC*).

c) La longitud del segmento *EF*.

Calculamos primero la diagonal *AC* del rectángulo: $\overline{AC} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm.

a) Aplicamos la fórmula de Herón: $s = \dfrac{20 + 15 + 25}{2} = 30$

$A = \sqrt{30 \cdot (30 - 20) \cdot (30 - 15) \cdot (30 - 25)} = 150 \text{ cm}^2$

b) Despejamos la medida de la altura, $\overline{BF}$, de la fórmula del área del triángulo *ABC*:

$150 = \dfrac{25 \cdot \text{h}}{2} \rightarrow \text{h} = 12$ cm

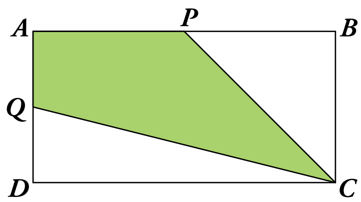
c) Los triángulos *ABC* y *ADC* son iguales, y también lo son sus alturas $\overline{BF}$ y $\overline{DE}$. Sabiendo esto vamos a calcular:

La base del triángulo *DEC* $\rightarrow \overline{EC} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm

La base del triángulo *BFC* $\rightarrow \overline{FC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

Por último, $\overline{EF} = \overline{EC} - \overline{FC} = 16 - 9 = 7$ cm

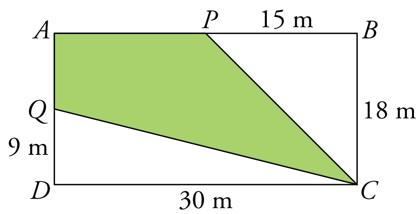
51. El perímetro de este rectángulo es 96 m, y la base mide 12 m más que la altura.



Halla el área de la parte coloreada. (*P* y *Q* son los puntos medios de los lados *AB* y *AD*, respectivamente).

Primero hallamos las medidas de la base y la altura del rectángulo. Llamamos x a la altura y $x + 12$ a la base, entonces:

$96 = 2x + 2(x + 12) \rightarrow x = 18 \text{ m} \rightarrow$ La base mide 30 m, y la altura, 18 m.

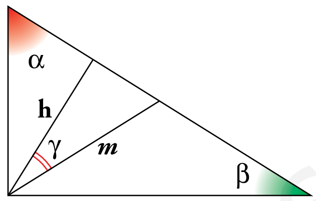


Para averiguar el área de la parte coloreada, calculamos el área de los triángulos rectángulos *PBC* y *QDC* y se las restamos al área del rectángulo:

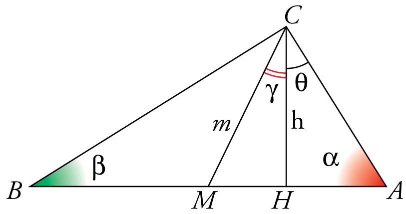
$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ m}^2; \; A_{PBC} = \frac{15 \cdot 18}{2} = 135 \text{ m}^2; \; A_{QDC} = \frac{9 \cdot 30}{2} = 135 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 540 - 2 \cdot 135 = 270 \text{ m}^2$$

52. **Calcula, en este triángulo rectángulo, el ángulo γ que forman la altura, h, y la mediana, *m*, en función de α y β.**



Girando el triángulo hasta hacer coincidir la base con la hipotenusa y añadiendo algunos nombres obtenemos el siguiente dibujo:



El primer resultado que debemos tener en cuenta es que la longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la mitad de la hipotenusa; por tanto, los segmentos *MC* y *MA* son iguales, lo que supone que el triángulo *AMC* es isósceles y los ángulos $\gamma + \theta$ y α son iguales.

$$\gamma + \theta = \alpha$$

Por otro lado, en un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes entre sí; por tanto, los triángulos *ACH* y *CBH* son semejantes, lo que supone que los ángulos θ y β son iguales.

$$\theta = \beta$$

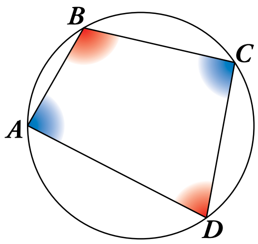
Con estos dos resultados obtenemos lo que nos piden: $\left.\begin{array}{l} \gamma + \theta = \alpha \\ \theta = \beta \end{array}\right\} \to \gamma + \beta = \alpha \to \gamma = \alpha - \beta$

El ángulo γ es la diferencia entre los ángulos α y β.

53. **El cuadrilátero *ABCD* está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:**

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}, \; \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

$$\hat{C} + \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$



Comprueba de igual forma que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

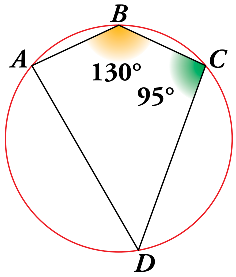
Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}, \; \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} \to \hat{B} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sumen 180°.

54. **Calcula los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$.**

(Ten en cuenta el problema anterior).



Teniendo en cuenta el problema anterior, sabemos que los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ deben sumar 180°, luego $\hat{A}$ = 180° – 95° = 85°.

Haciendo el mismo razonamiento para $\hat{B}$ y $\hat{D}$, $\hat{D}$ = 180° – 130° = 50°.

Reflexiona sobre la teoría

55. **¿Qué puedes afirmar de un triángulo si uno de los lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita?**

Se puede asegurar que es un triángulo rectángulo, puesto que, el ángulo opuesto al diámetro va a ser siempre recto.

56. **Define como lugar geométrico una circunferencia de centro *O* y radio 5 cm.**

La circunferencia de centro O y radio 5 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es 5 cm: $\overline{OP}$ = 5 cm.

57. **¿Cómo se llama el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento *AB* bajo un ángulo de 60°?**

El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento AB bajo un ángulo de 60° se llama arco capaz para AB de 60°.

58. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 26 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos es 26 cm es una elipse. Los dos puntos fijos se llaman focos.

59. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm es una hipérbola. Los dos puntos fijos se llaman focos.

60. **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada? ¿Cómo se llaman el punto fijo y la recta?**

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada es una parábola. El punto fijo se llama foco, y la recta, directriz.

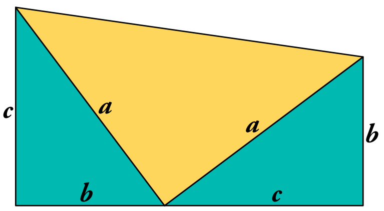
Página 204

Lee y comprende

Una curiosa demostración del teorema de Pitágoras

James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente de Estados Unidos, fue profesor de Lenguas Clásicas, militar y político y, además, aficionado a las matemáticas, como puedes comprobar con esta demostración que publicó en el *New England Journal of Education:*

Se toma un triángulo rectángulo cualquiera apoyado sobre un cateto (b). Se repite el mismo triángulo apoyado sobre el otro cateto (c) y se construye un trapecio, como indica la figura.



Área del trapecio $\rightarrow$ $A = \dfrac{b+c}{2} \cdot (b+c)$

Área del trapecio $\rightarrow$ $A = \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{a \cdot a}{2}$

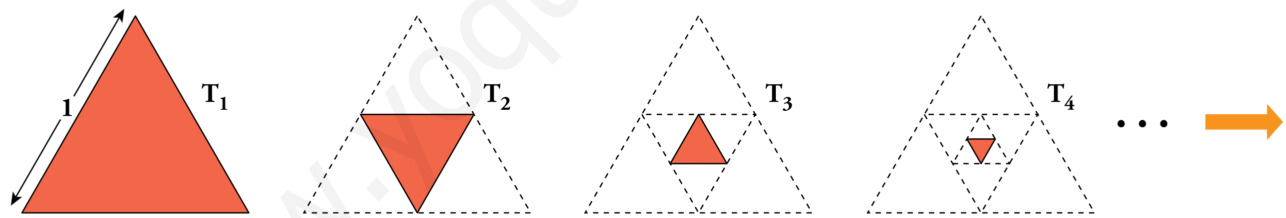
- **Igualando ambas expresiones del área del trapecio se obtiene, simplificando, la expresión del teorema de Pitágoras. Intenta hacerlo tú.**

$$\frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2cb + a^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 + 2cb = 2cb + a^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Generaliza

Observa la siguiente serie de triángulos equiláteros:



- **¿Cuál es la razón de semejanza entre dos triángulos consecutivos? ¿Y la razón de sus áreas?**

Completa la tabla, resolviendo los primeros casos particulares y, después, generalizando:

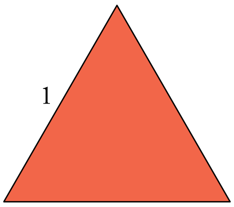
	T_1	T_2	T_3	T_4	…	T_{10}	…	T_n
LADO $\rightarrow l$	1	1/2	1/4	?	…	?	…	?
ÁREA $\rightarrow A$	$\sqrt{3}/4$	?	?	?	…	?	…	?

Para estudiar la sucesión de triángulos, usaremos la fórmula de Herón para calcular el área:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro y a, b y c los lados del triángulo. Así:

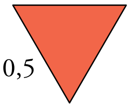
T_1:



$$l_1 = 1 \text{ cm}$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_2:



$$l_2 = 0{,}5 \text{ cm}$$

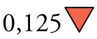
$$A_2 = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-0{,}5\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_3:

$$l_3 = 0{,}25 \text{ cm}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{3}{8}\left(\frac{3}{8}-0{,}25\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^3} \text{ cm}^2$$

T_4:



$$l_4 = 0{,}125 \text{ cm}$$

$$A_4 = \sqrt{\frac{3}{16}\left(\frac{3}{16}-0{,}125\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^3} \text{ cm}^2$$

Generalizando, tenemos que:

$$l_n = 2^{1-n} \text{ cm} \;\text{ y }\; A_n = \sqrt{3} \cdot 2^{-2n} \text{ cm}^2$$

	T_1	T_2	T_3	T_4	…	T_{10}	…	T_n
LADO $\rightarrow l$	**1**	**1/2**	**1/4**	1/8	…	1/512	…	2^{1-n}
ÁREA $\rightarrow A$	$\sqrt{3}/2^2$	$\sqrt{3}/2^4$	$\sqrt{3}/2^6$	$\sqrt{3}/2^8$	…	$\sqrt{3}/2^{20}$	…	$\sqrt{3}/2^{2n}$

Página 205

Entrénate resolviendo problemas

- **Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 km. Sin embargo, una rebaja en el precio del gasóleo le supone un ahorro de 0,14 € por kilómetro, lo que le permite realizar un recorrido de 750 km con el mismo gasto.**

¿Cuál fue la cantidad presupuestada para carburante?

En 600 km ahora $0{,}14 \cdot 600 = 84$ €.

Ahora hace 750 km; es decir, $750 - 600 = 150$ km más.

Con 84 € hace 150 km. Ahora, cada kilómetro le cuesta $84 : 150 = 0{,}56$ €.

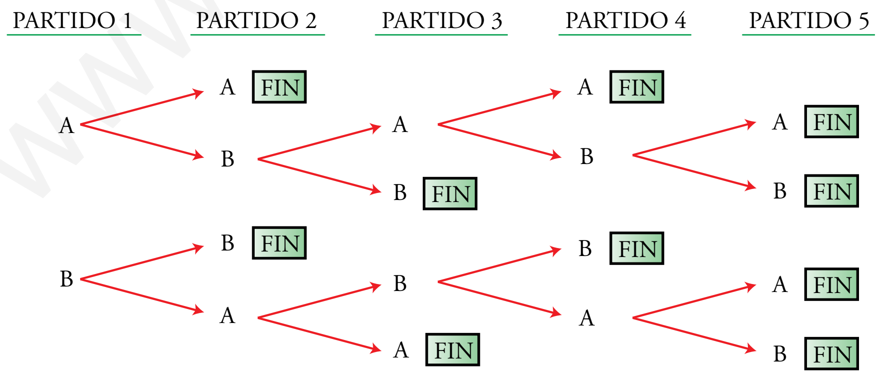
La cantidad presupuestada es de $750 \cdot 0{,}56 = 420$ €.

- **Ana y Begoña son las finalistas de un torneo de tenis. Gana el torneo quien venza en dos partidos consecutivos o en tres alternos.**

Averigua todas las posibilidades que pueden darse.

¿Cuántos partidos, como máximo, tendrán que disputar para acabar el torneo?

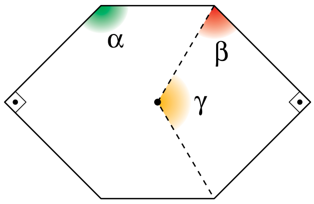
En el siguiente diagrama, A significa "gana Ana" y B significa "gana Begoña".

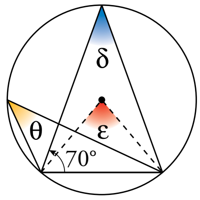


Tiene que disputar, como máximo, 5 partidos.

Autoevaluación

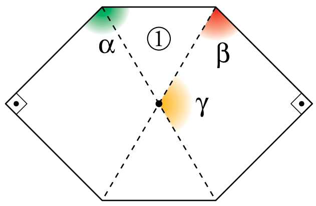
1. Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:





Primera figura

La suma de los ángulos de un hexágono suman 720°. Este que nos ocupa tiene dos ángulos rectos, y los otro cuatro, son iguales. Por tanto: $\alpha = \dfrac{720° - 2 \cdot 90°}{4} = 135°$.

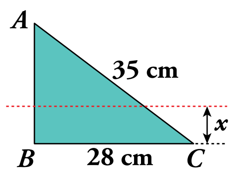


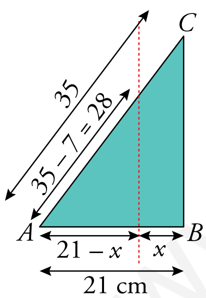
Además, observamos que el triángulo ① es equilátero y, por tanto, sus tres ángulos miden 60°. Con esto tenemos que $\gamma = 180° - 60° = 120°$ y $\beta = 135° - 60° = 75°$.

Segunda figura

Observamos que los tres ángulos pedidos abarcan el mismo arco y que el triángulo del que es ángulo δ, es isósceles. Así: $\delta = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$, $\theta = 40°$ y $\varepsilon = 2 \cdot 40° = 80°$

2. ¿A qué altura, *x*, hay que cortar el triángulo *ABC* para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?





Calculamos el lado desconocido, $\overline{AB} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$ cm.

Si giramos la figura, observamos dos triángulos en posición de Tales, son semejantes:

$$\frac{35}{21} = \frac{28}{21 - x} \to 735 - 35x = 588 \to x = \frac{588 - 735}{-35} = 4{,}2$$

Debemos cortar el triángulo a una altura de 4,2 cm.

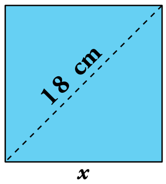
3. Si vas en avión a 10 000 m de altura y ves un punto en el horizonte, ¿a qué distancia de ti se encuentra el punto? (Radio de la Tierra: 6 371 km).

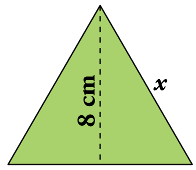
Llamamos x a la distancia pedida y transformamos todas las unidades de medida a kilómetros.

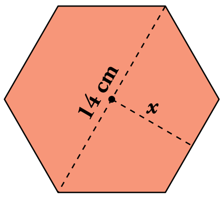
$$x = \sqrt{6\,731^2 - 10^2} \approx 6\,731$$

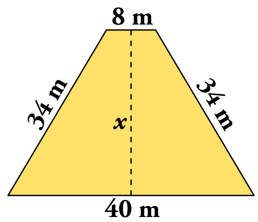
El punto estará a 6 731 km de distancia.

4. Calcula el valor de x en cada caso:

a)


b)


c)


d)


Utilizamos los resultados del ejercicio resuelto 1 de la página 196.

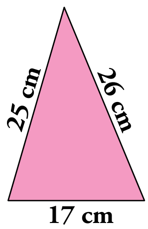
a) $l = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot d \;\rightarrow\; x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 18 \approx 12{,}73$ cm

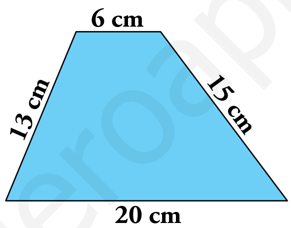
b) $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \;\rightarrow\; x = \dfrac{8 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 9{,}24$ cm

c) $ap = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \;\rightarrow\; x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \approx 6{,}06$ cm

d) $x = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$ m

5. Calcula las alturas del triángulo y del trapecio:





Triángulo

Utilizamos la fórmula de Herón y la del área del triángulo.

$$s = \frac{25 + 26 + 17}{2} = 34 \text{ cm}$$

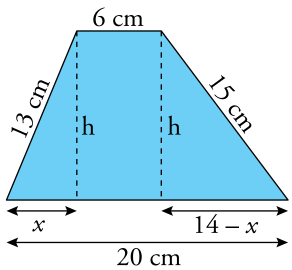
$$A = \sqrt{34 \cdot (34 - 25) \cdot (34 - 26) \cdot (34 - 17)} = 204 \text{ cm}^2$$

$$204 = \frac{17 \cdot h}{2} \;\rightarrow\; h = \frac{204 \cdot 2}{17} = 24 \text{ cm}$$

La altura del triángulo mide 24 cm

Trapecio

Observando la figura planteamos el siguiente sistema y lo resolvemos por igualación:



$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \\ h^2 = 13^2 - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2 \;\rightarrow\; x = 5$$

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

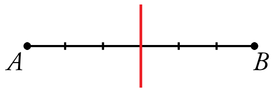
La altura del trapecio mide 12 cm.

6. **Dibuja dos puntos, A y B, a 6 cm de distancia.**

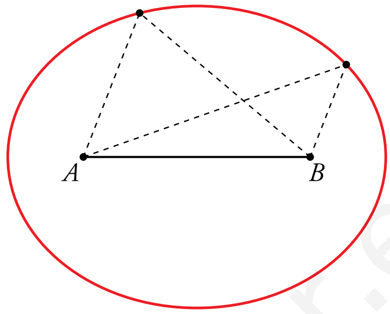
a) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B? Dibújalo.

b) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a A y B es 10 cm? Dibújalo aproximadamente.

a) Es la mediatriz del segmento.

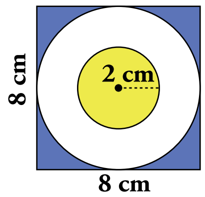


b) Es la elipse de focos A y B.

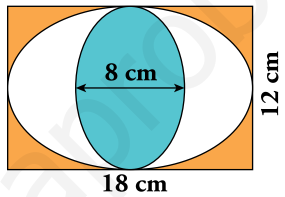


7. **Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:**

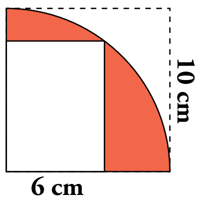
a)



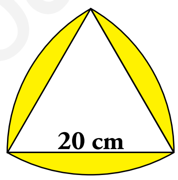
b)



c)



d)



a) $A = 8^2 - \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 = 64 - 12\pi \approx 26{,}30 \text{ cm}^2$

b) $A = 12 \cdot 18 - \pi \cdot 9 \cdot 6 + \pi \cdot 4 \cdot 6 = 216 - 30\pi \approx 121{,}75 \text{ cm}^2$

c) Para hallar el área de la parte coloreada calculamos la del cuarto de círculo y le restamos la del rectángulo blanco. Observamos que tanto el radio de la circunferencia como la diagonal del rectángulo miden 10 cm.

$$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$$

$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm} \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78{,}54 - 48 = 30{,}54 \text{ cm}^2$$

d) El triángulo blanco es equilátero, por lo que todos sus ángulos miden 60°. Calculamos el área del sector ciruclar de 60° y el área del triángulo:

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 60° \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{360°} \approx 209{,}44 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{30 \cdot (30 - 20)^3} \approx 173{,}21 \text{ cm}^2$$

Restamos ambas áreas para obtener una de las partes amarillas de la figura:

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 3 \cdot (209{,}44 - 173{,}21) = 108{,}69 \text{ cm}^2$$