

10 Sistemas de ecuaciones

Cuando aparecen varias incógnitas en un problema, resulta más sencillo resolverlo planteando más de una ecuación con más de una incógnita. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con más de una incógnita que se tienen que verificar simultáneamente.

Diofanto de Alejandría, matemático griego, considerado padre del álgebra, ya trabajó con ecuaciones con dos incógnitas. De la obra de Diofanto conservamos los seis primeros libros y un fragmento del séptimo de un tratado titulado Aritmética, compuesto originariamente por trece libros. Los libros conservados contienen un tratado sobre las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.



Laura acaba de comprar una cámara de fotos que le ha costado 150 €. La compra la ha abonado con billetes de 10 € y de 5 €. La dependienta ha contado 18 billetes.

a) ¿Ha pagado con diez billetes de 10 € y ocho de 5 €? ¿O con nueve billetes de cada clase?

b) Averigua cuántos billetes de cada tipo ha utilizado Laura, probando con distintas combinaciones. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y anota cada combinación:

Billetes 5 €	Billetes 10 €	Paga con billetes de 5 €	Paga con billetes de 10 €	Importe total
x	$y = 18 - x$	$5x$	$10y$	$5x + 10y$

Recuerda y resuelve

Cómo se opera con expresiones con más de una indeterminada.

Solo se pueden sumar y restar monomios con la misma parte literal. Por ejemplo:

$$6x + 3y - 2x - 5y = 4x - 2y$$

1 Opera y reduce las siguientes expresiones:

a) $x + 2y + 5x + 3y$

d) $4x - 3 \cdot (2x + y) + 5y$

b) $2x + y + 3y - 4 + x - 2$

e) $y - 2x - 2 \cdot (x - y)$

c) $3x + 2y - (2x - y)$

f) $3 \cdot (2x - y) + 2y - 2x^2$

Cuál es el valor numérico de una expresión algebraica.

El valor numérico de una expresión algebraica es el que se obtiene al sustituir sus letras por números y realizar las operaciones indicadas.

Así, el valor numérico de $4x - 3y$ para $x = 2$ e $y = -1$ es: $4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 8 + 3 = 11$

2 Calcula el valor numérico de cada expresión para los valores dados de las indeterminadas.

a) $2x + 4y$ para $x = -1$ e $y = 2$

b) $3a - 2b$ para $a = 4$ y $b = 1$

c) $4 \cdot (p + 1) - 2q$ para $p = \frac{1}{2}$ y $q = 0$

d) $5mn + \frac{n}{2}$ para $m = -2$ y $n = 2$

En qué consiste despejar una incógnita.

Despejar una incógnita de una ecuación consiste en dejarla sola en uno de los dos miembros de la ecuación, lo que se consigue transponiendo términos.

Así, por ejemplo, para despejar la x en la ecuación $2x + y = 3$:

$$2x + 3 = y \quad \blacktriangleright \quad 2x = y - 3 \quad \blacktriangleright$$

$$\blacktriangleright \quad x = \frac{y - 3}{2}$$

3 Despeja en cada igualdad la incógnita indicada:

a) La x en la ecuación $x - 3y = 4$

b) La m en la ecuación $2m - 3n = 0$

c) La y en la ecuación $2x + y = 1$

d) La p en la ecuación $3q - 2p = 1$

e) La x en la ecuación $3 - 2x = 4y$

4 Despeja la x en las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 3y = x - 2$

d) $y + 3 = 4x + 1$

b) $3 \cdot (x + y) = 2x$

e) $x - 2 \cdot (2x + y) = 3x$

c) $2x = 2 \cdot (3x - 2y) + 1$

f) $\frac{3x - y}{2} = 2x + 1$

Cómo se escribe algebraicamente un enunciado.

Cuando en un enunciado aparece más de una cantidad desconocida, empleamos una letra distinta para representar cada cantidad.

Por ejemplo, la suma de un número más el doble de otro lo expresamos así: $x + 2y$

5 Escribe algebraicamente cada enunciado empleando dos incógnitas:

a) La suma del doble de un número más el triple de otro.

b) El doble de la diferencia de un número menos el triple del otro.

c) El producto de un número por la suma del cuadrado de otro más 3.

d) El cubo de la suma de dos números.

e) El área de un rombo calculada con la medida de sus diagonales.

f) Lo que hay que pagar por la compra de 2 bolígrafos y 3 cuadernos.

1 Ecuaciones con dos incógnitas

1.1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Piensa y deduce

Dos amigos pagan 9 € por 1 bocadillo y 3 refrescos iguales.

- a) Con estos datos, ¿se puede saber con certeza el precio de un bocadillo y el de un refresco?
- b) Propón distintas soluciones a la siguiente pregunta: «¿Cuáles son los respectivos precios de un bocadillo y de un refresco?».

Si traducimos al lenguaje algebraico el enunciado «un bocadillo y tres refrescos cuestan 9 €», tenemos una ecuación en la que aparecen dos incógnitas: b , el precio de un bocadillo, y r , el precio de un refresco:

$$b + 3r = 9$$

La ecuación anterior tiene infinitas soluciones; basta con dar un valor a r o a b y resolver la ecuación resultante para averiguar el valor de la otra incógnita. Así, por ejemplo, para $r = 1$:

$$b + 3 \cdot 1 = 9 \xrightarrow{\text{Despejando } b} b = 9 - 3 = 6$$

Tenemos, por tanto, que el par de valores $r = 1$ y $b = 6$ es una solución de la ecuación $b + 3r = 9$.

Lógicamente, para cada valor que demos a r , por el mismo procedimiento, podemos obtener el valor de b , y viceversa.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Su expresión general es:

$$ax + by = c$$

Donde a , b y c son cantidades conocidas y $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Este tipo de ecuaciones tiene infinitas soluciones, ya que para cada valor que se le dé a x , se obtiene el correspondiente de y , y viceversa.

1.2. Sistemas de ecuaciones

Si al enunciado «un bocadillo y tres refrescos cuestan 9 €», añadimos que «la diferencia entre el precio de un bocadillo y el de un refresco es 1 €», tenemos que el precio del bocadillo, b , y el de un refresco, r , tienen que cumplir dos ecuaciones simultáneamente:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ bocadillo y } 3 \text{ refrescos cuestan } 9 \text{ €} \\ \text{La diferencia entre el precio de 1 bocadillo} \\ \text{y el de 1 refresco es 1 €}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \blacktriangleright b + 3r = 9 \\ \blacktriangleright b - r = 1 \end{array}$$

Un **sistema de dos ecuaciones de primer grado** con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se tienen que verificar para los mismos valores de las incógnitas. Es de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{array} \right\}$$

Resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en averiguar qué par de valores, uno de cada incógnita, es solución común a las dos ecuaciones que forman el sistema.

Así, por ejemplo, en el caso del sistema de ecuaciones planteado en la página anterior:

$$\left. \begin{array}{l} b + 3r = 9 \\ b - r = 1 \end{array} \right\}$$

El par de valores $b = 6$ y $r = 1$ verifica la primera ecuación del sistema planteado, pero no la segunda:

$$\left. \begin{array}{l} 6 + 3 \cdot 1 = 9 \\ 6 - 1 \neq 1 \end{array} \right\} \quad b = 6, r = 1 \text{ no es la solución del sistema}$$

Sin embargo, el par de valores $b = 3$ y $r = 2$ sí verifica las dos ecuaciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 3 \cdot 2 = 9 \\ 3 - 2 = 1 \end{array} \right\} \quad b = 3, r = 2 \text{ es la solución del sistema}$$

La solución del sistema de ecuaciones anterior es $b = 3$ y $r = 2$, que significa que 1 bocadillo cuesta 3 € y un refresco, 2 €.

Soluciones de un sistema de ecuaciones

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener:

■ **Infinitas soluciones** (si las dos ecuaciones son equivalentes):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{array} \right\}$$

■ **Ninguna solución** (si las dos ecuaciones no se pueden verificar nunca a la vez):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\}$$

■ **Una única solución** (en los demás casos).

Actividades

1 ● Busca cinco soluciones distintas para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x + y = 20$ c) $2x + y = 6$
 b) $x - y = 9$ d) $-x + 4y = 0$

2 ● Indica si estos pares de valores son solución de la ecuación $4x - 3y = 27$:

a) $x = 0, y = 9$ c) $x = 3, y = -5$
 b) $x = 0, y = -9$ d) $x = -3, y = -13$

3 ● Dada la ecuación $4x + 5y = 6$:

a) ¿Qué valor tiene que tener la y para $x = -1$?
 b) ¿Qué valor tiene que tener la x para $y = -1$?

4 ● Expresa en la forma general las siguientes ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a) $2x + 1 = y$ c) $2y - 3 = x$
 b) $3 + 2 \cdot (x - 2y) = 0$ d) $x = 2 \cdot (1 - y)$

5 ● Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con distintas soluciones de la ecuación $x - 2y = 6$:

x	0		-1		4	
y		0		-2		4

6 ● Indica si $x = 2$ e $y = -1$ son la solución del sistema:

a) $\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3x + 4y = 1 \end{array} \right\}$ b) $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{array} \right\}$

7 ● Rosa ha obtenido 21 puntos en un cuestionario que constaba de 15 preguntas. Por cada acierto le han dado 2 puntos y por cada fallo le han restado 1 punto. Escribe un sistema de dos ecuaciones que corresponda a este enunciado y elige, entre los siguientes resultados, el que ha obtenido Rosa. Ha contestado:

a) 10 bien y 5 mal c) 12 bien y 3 mal
 b) 14 bien y 7 mal d) 15 bien y 6 mal

8 ● Al final de un partido de baloncesto, el resultado muestra una diferencia de 12 puntos entre los dos equipos, y entre ambos han logrado 132 puntos.

a) Plantea un sistema de dos ecuaciones que permita averiguar los puntos que ha obtenido cada equipo.
 b) ¿Qué puntuación ha conseguido el equipo ganador: 65, 72 u 80?

9 ● Razona por qué cualquier ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

10 ● ¿Se puede decir que $x = 2$ es una solución de la ecuación $3x + 4y = 1$?

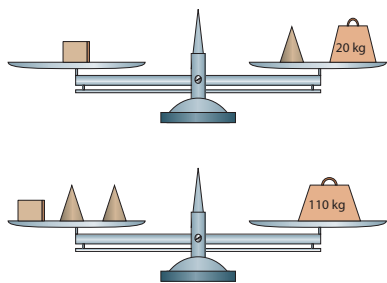
11 ● Razona por qué el siguiente sistema no puede tener solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{array} \right\}$$

12 ● Explica por qué dos ecuaciones equivalentes forman un sistema con infinitas soluciones.

2 Resolución de un sistema de ecuaciones

2.1. Método de sustitución



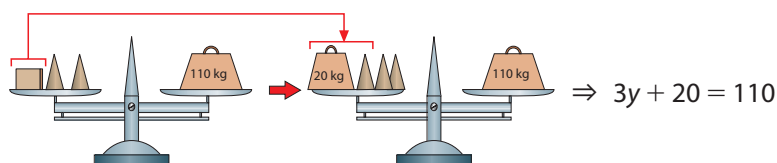
Piensa y deduce

Observa las dos balanzas del margen y deduce el peso del cubo y del cono.

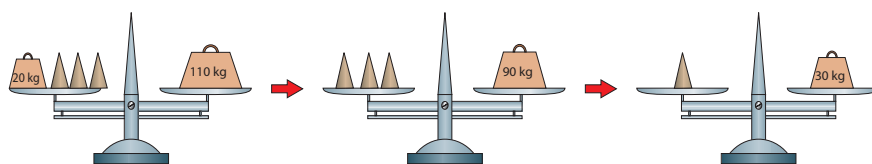
Podemos considerar que las dos balanzas del *Piensa y deduce* constituyen el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones, en el que x representa el peso del cubo e y , el del cono:

$$\left. \begin{aligned} x &= y + 20 \\ x + 2y &= 110 \end{aligned} \right\}$$

La primera balanza nos indica que un cubo pesa igual que un cono más 20 g. Por tanto, podemos sustituir el cubo de la segunda balanza por un cono y una pesa de 20 g:

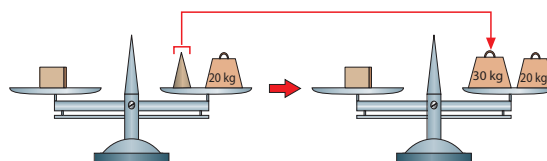


Ahora, calcular el peso de un cono es sencillo: basta con quitar 20 g en cada platillo y dividir entre 3 su contenido. En realidad se trata de resolver la ecuación $3y + 20 = 110$:



$$3y + 20 = 110 \Rightarrow 3y = 110 - 20 = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{3} = 30$$

Por último, para calcular el peso del cubo, podemos sustituir el cono de la primera balanza por una pesa de 30 g:



$$x = y + 20 \Rightarrow x = 30 + 20 = 50$$

Este **método** de resolver un sistema de dos ecuaciones se conoce con el nombre de **sustitución** y consiste en:

- 1.º Se despeja una de las dos incógnitas de cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.
- 2.º Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación para obtener una ecuación de primer grado con una incógnita.
- 3.º Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior, cuya solución es el valor numérico de una de las dos incógnitas.
- 4.º Se halla el valor de la otra incógnita en la ecuación en la que dicha incógnita está despejada (obtenida en el primer paso).

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Resuelve por sustitución el sistema $\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \end{array} \right\}$

1.º **Despejamos**, por ejemplo, la x en la primera ecuación: $x = 3 - y$

2.º **Sustituimos** la x en la segunda ecuación: $3 \cdot (3 - y) - 2y = -1$

3.º **Resolvemos** la ecuación obtenida en el paso anterior:

$$9 - 3y - 2y = -1 \Rightarrow -5y = -1 - 9 \Rightarrow -5y = -10 \Rightarrow y = \frac{-10}{-5} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

4.º **Averiguamos** el valor de x , sustituyendo y por su valor, 2, en la ecuación del primer paso (en la que x ya está despejada):

$$x = 3 - y \Rightarrow x = 3 - 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Solución: $x = 1, y = 2$

2.2. Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Resuelve por igualación el sistema $\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right\}$

1.º **Despejamos**, por ejemplo, la y en las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 3 - x \\ y = 7 - 3x \end{array} \right\}$$

2.º **Igualamos** los dos valores de la y obtenidos en el paso anterior y **resolvemos** la ecuación que se obtiene:

$$3 - x = 7 - 3x \Rightarrow -x + 3x = 7 - 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

3.º **Averiguamos** el valor de y , sustituyendo x por su valor, 2, en cualquiera de las ecuaciones en las que está despejada la y :

$$y = 3 - x \Rightarrow y = 3 - 2 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Solución: $x = 2, y = 1$

Actividades

13 • Resuelve por sustitución:

a) $\left. \begin{array}{l} x + 5y = -10 \\ 3x - 2y = 4 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 14 \\ x + 4y = 10 \end{array} \right\}$

d) $\left. \begin{array}{l} 4x - 5y = 4 \\ 3x + y = 3 \end{array} \right\}$

14 •• Resuelve por sustitución:

a) $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 3x + 2y = 16 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = -7 \\ 2x - 5y = 3 \end{array} \right\}$

15 • Resuelve por igualación:

a) $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -9 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} x + 3y = 8 \\ x - 5y = -16 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} -x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\}$

d) $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ x + y = -4 \end{array} \right\}$

16 ••• Resuelve por igualación:

a) $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 2y = 0 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 4 \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{l}
 \text{Camiseta} + \text{Gorra} = 30 \text{ €} \\
 \text{Camiseta} + \text{Gorra} = 21 \text{ €}
 \end{array}$$

2.3. Método de reducción

Piensa y deduce

En el margen están representadas un par de compras que se han hecho de camisetas y gorras. Deduce el precio de cada artículo teniendo en cuenta el importe de las dos compras.

La diferencia entre las dos compras es 1 camiseta, por tanto la diferencia entre sus importes, $30 - 21 = 9 \text{ €}$, es el precio de una camiseta.

Sustituyendo el importe de las dos camisetas, 18 € , en la segunda compra, deducimos que el importe de una gorra es $21 - 18 = 3 \text{ €}$.

Traduzcamos al lenguaje algebraico las dos compras por medio del siguiente sistema de dos ecuaciones, en las que c es el precio de una camiseta y g , el de una gorra:

$$\begin{array}{l}
 3c + g = 30 \\
 2c + g = 21
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Restamos a la 1.ª ecuación la 2.ª}} \begin{array}{l}
 3c + g = 30 \\
 -2c - g = -21 \\
 \hline
 c = 9
 \end{array}$$

Para calcular el valor de g , sustituimos c por 9 en cualquiera de las ecuaciones iniciales:

$$3c + g = 30 \Rightarrow 3 \cdot 9 + g = 30 \Rightarrow g = 30 - 27 = 3$$

Propiedad de las igualdades

Si se tienen dos igualdades numéricas y se suman sus miembros, se obtiene otra igualdad.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 3 + 2 = 5 \\
 4 + 5 = 9 \\
 \hline
 7 + 7 = 14
 \end{array}$$

El método de reducción para resolver sistemas se basa en esta propiedad.

Este **método** de resolver un sistema de ecuaciones se conoce con el nombre de **reducción** y consiste en:

- 1.º Se obtienen ecuaciones equivalentes al sistema inicial de forma que los coeficientes de una de las dos incógnitas son opuestos.
- 2.º Se suman las dos ecuaciones del sistema resultante para obtener una ecuación con una incógnita.
- 3.º Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior, cuya solución es el valor de una de las dos incógnitas.
- 4.º Se calcula el valor de la otra incógnita, sustituyendo la que ya se conoce por su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

EJERCICIOS RESUELTOS

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{3} \text{ Resuelve por reducción el sistema } 3x + y = 10 \\
 x - 2y = 1
 \end{array}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 (así logramos que la y tenga coeficientes opuestos); después sumamos las dos ecuaciones y resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{array}{l}
 3x + y = 10 \\
 x - 2y = 1
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Multiplicamos por 2 la 1.ª ecuación}} \begin{array}{l}
 6x + 2y = 20 \\
 x - 2y = 1 \\
 \hline
 7x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{7} \Rightarrow \boxed{x = 3}
 \end{array}$$

Calculamos el valor de y , sustituyendo x por su valor, 3 , en la ecuación que más convenga, en este caso en la primera ecuación:

$$3x + y = 10 \Rightarrow 3 \cdot 3 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 9 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Solución: $x = 3, y = 1$

EJERCICIOS RESUELTOS

4 Resuelve por reducción el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$

La x tiene por coeficientes 6 y 3.

Como 6 es múltiplo de 3 ($6 : 3 = 2$), basta con multiplicar la primera ecuación por -2 para obtener un sistema equivalente en el que la x tiene coeficientes opuestos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Multiplicamos por } -2 \text{ la 1.ª ecuación}} \begin{cases} -6x - 4y = 14 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$-7y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{-7} \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Por último, sustituimos y por su valor, -2 , en la primera ecuación y calculamos el valor de x :

$$3x + 2y = -7 \Rightarrow 3x + 2 \cdot (-2) = -7 \Rightarrow 3x = -7 + 4 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Solución: $x = -1, y = -2$

5 Resuelve por reducción el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

En este caso, ninguna de las dos incógnitas tiene coeficientes en los que se dé que uno sea múltiplo del otro.

Para conseguir, por ejemplo, un sistema en el que sea la x la incógnita que tenga coeficientes opuestos, multiplicamos la primera ecuación por el coeficiente de la x en la segunda, 5, y esta por el opuesto del coeficiente que tiene x en la primera, -2 .

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{Multiplicamos la 1.ª por 5 y la 2.ª por } -2} \begin{cases} 10x + 15y = 60 \\ -10x - 4y = -16 \end{cases}$$

$$11y = 44 \Rightarrow y = \frac{44}{11} \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

Por último, sustituimos y por su valor, 4, en la primera ecuación y calculamos el valor de x :

$$2x + 3y = 12 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow 2x = 12 - 12 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Solución: $x = 0, y = 4$

Actividades

17 ● Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -4x + 5y = -2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - y = -14 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x - 3y = -6 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 6x + 6y = -1 \end{cases}$

18 ●● Resuelve por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x - 5y = 12 \\ 6x + 2y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -2x + 5y = -18 \\ 7x + 8y = 12 \end{cases}$

19 ●● Resuelve por reducción y por igualación ambos sistemas. ¿Qué método resulta más cómodo en cada caso?

a) $\begin{cases} y = -1 - 2x \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$

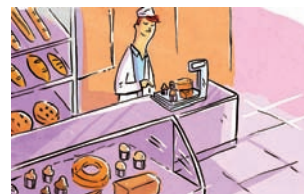
Estrategias para resolver problemas

Plantear un sistema de ecuaciones

Si en un problema intervienen dos incógnitas, suele resultar más cómodo resolverlo con un sistema de dos ecuaciones que mediante una única ecuación con una incógnita.

Problema

Dos bolsas de bizcochos y una de magdalenas pesan 900 g, y tres bolsas de bizcochos y dos de magdalenas pesan 1 550 g, ¿cuál es el peso de una bolsa de bizcochos y cuál el de una de magdalenas?



Resolución

1. Se nombran las dos incógnitas.

$b \Rightarrow$ peso de una bolsa de bizcochos

$m \Rightarrow$ peso de una bolsa de magdalenas.

2. Se plantean dos ecuaciones que relacionan los datos dados en el problema con las incógnitas:

- 2 bolsas de bizcochos y 1 de magdalenas pesan 900 g:

$$2b + m = 900$$

- 3 bolsas de bizcochos y 2 de magdalenas pesan 1 550 g:

$$3b + 2m = 1550$$

3. Se resuelve el sistema formado por esas dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 2b + m = 900 \\ 3b + 2m = 1550 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Se multiplica por } -2 \\ \text{la 1.ª ecuación} \end{array} \right\} \begin{array}{r} -4b - 2m = -1800 \\ 3b + 2m = 1550 \\ \hline -b = -250 \Rightarrow b = 250 \end{array}$$

Sustituyendo b por 250 en la primera ecuación:

$$2 \cdot 250 + m = 900 \Rightarrow 500 + m = 900 \Rightarrow m = 400$$

Una bolsa de bizcochos pesa 250 g y una de magdalenas, 400 g.

4. Se comprueba la solución:

$$2 \text{ bolsas de bizcocho} + 1 \text{ bolsa de magdalenas: } 2 \cdot 250 + 400 = 900 \text{ g}$$

$$3 \text{ bolsas de bizcochos} + 2 \text{ bolsas de magdalenas: } 3 \cdot 250 + 2 \cdot 400 = 1550 \text{ g}$$

Ambos resultados coinciden con los datos del enunciado.

Otros problemas

- 1 • La suma de dos números es 57 y su diferencia 11. ¿De qué números se trata?

- 2 •• Busca dos números tales que el doble de la suma de ambos sea 36 y, además, el menor más el doble del mayor sumen 28.

- 3 • Tres bolígrafos y cinco cuadernos cuestan 15,50 € y dos bolígrafos y un cuaderno, 4,50 €, ¿Cuál es el precio de un bolígrafo y cuál el de un cuaderno?

- 4 •• Las edades de Marta y de su hija Sofía suman 55 años. Si dentro de diez años Marta tendrá el doble de años que su hija, ¿cuál es la edad actual de cada una de ellas?

- 5 • Guillermo compra, en una frutería, plátanos de Canarias a 1,20 €/kg y manzanas procedentes del Bierzo a 2,45 €/kg. Si se ha llevado en total 6 kg de fruta y ha pagado 12,20 €. ¿Qué cantidad ha comprado de cada fruta?

Ejercicios y problemas

Ecuaciones de dos incógnitas

1 • Busca tres soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 3y = 4$ c) $3x - 2y = -10$

b) $2x + y = \frac{1}{2}$ d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$

2 •• Halla las soluciones propuestas a continuación de la ecuación $x + y = 5$:

a) Todas las soluciones enteras positivas.

b) Tres soluciones en las que uno de los valores sea negativo.

3 • Si $x = -2$, averigua cuánto tiene que valer y para que ese par de valores sea solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2x + y = 5$ c) $3x = 3 + y$

b) $y = 3x + 3$ d) $2y = 4 - x$

4 •• Despeja la incógnita y de las siguientes ecuaciones y calcula su valor para $x = -1$:

a) $3x + y = 5$ e) $\frac{x + y}{2} = 1$

b) $x - y = 4$ f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$

c) $2x + 3y = 1$ g) $\frac{y}{2} + 2x = 3$

d) $x - 2y = 7$ h) $2 \cdot (x - 2y) = \frac{2}{3}$

5 • Reduce a la forma general las siguientes ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a) $3 \cdot (x - 2y) - 3 = 2x + 2$

b) $4x - 2 \cdot (3x + y) = 3$

c) $\frac{2x - y}{3} = \frac{x + y}{2}$

6 • Comprueba si $x = 5$ e $y = -2$ es solución de alguna de las siguientes ecuaciones:

a) $2x + y = 8$

b) $3y - x = 1$

c) $y - x = -7$

d) $2 \cdot (3x - 2y) = 38$

7 •• Se han pagado 45 € empleando billetes de 5 € y de 10 €. ¿Con cuántos billetes de cada valor se ha podido pagar? Escribe la ecuación correspondiente y halla todas las soluciones posibles.

Sistemas de ecuaciones

8 • Asocia, sin resolverlo, cada sistema con su solución.

$$\begin{cases} 5x + 3y = -1 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

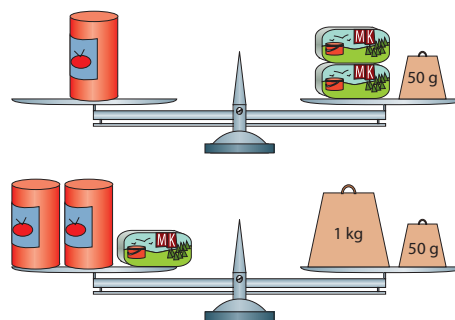
$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

9 • Calcula el peso de un bote de tomate y de un paquete de mantequilla:



10 • Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 2y = -12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

11 •• Resuelve por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - (2y + 3) = 5 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - (y + 3) = 0 \\ 4x + y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - 3y = 7 \\ -3x - 2y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x - 4y = -11 \\ y - (3 + x) = 0 \end{cases}$

12 • Observa el dibujo y calcula cuánto cuestan, respectivamente, un helado y un vaso de horchata:



Ejercicios y problemas

13 • Resuelve por igualación:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x + 4y = -5 \\ \quad \quad x - 2y = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{e)} \quad 2x - y = 2 \\ \quad \quad x + y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 2x - y = 3 \\ \quad \quad 5x + y = 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{f)} \quad x - 5y = 0 \\ \quad \quad x + y = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad 3x - 3y = -3 \\ \quad \quad 2x + 4y = 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{g)} \quad 4x - 2y = 16 \\ \quad \quad x + 3y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \quad 2x - 3y = 3 \\ \quad \quad x + 2y = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{h)} \quad 5x + 2y = 3 \\ \quad \quad 5x + 3y = 2 \end{array}$$

14 •• Dos entradas de cine y un paquete de palomitas cuestan 16 € y cuatro entradas de cine y tres paquetes de palomitas, 36 €. Contesta cuánto hay que pagar por:

- Seis entradas y cuatro paquetes de palomitas.
- Dos entradas y dos paquetes de palomitas.
- Una entrada y un paquete de palomitas.
- Una entrada de cine.
- Un paquete de palomitas.

15 • Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 2x + y = 5 \\ \quad \quad 3x + 2y = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{e)} \quad 3x - 5y = -3 \\ \quad \quad 7x - 5y = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 3x + 2y = 6 \\ \quad \quad 2x - 2y = 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{f)} \quad 4x - 6y = 6 \\ \quad \quad 5x + 3y = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad 5x + y = -12 \\ \quad \quad 5x + 3y = -16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{g)} \quad -4x - 2y = 20 \\ \quad \quad 2x - 3y = -18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \quad x + 3y = 3 \\ \quad \quad x + 6y = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{h)} \quad x + 2y = 10 \\ \quad \quad 3x - 2y = 18 \end{array}$$

16 •• Resuelve por reducción:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 3x + 5y = -4 \\ \quad \quad 4x - 2y = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad 18x + 12y = 17 \\ \quad \quad 12x + 9y = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 6x - 3y = -6 \\ \quad \quad -4x - 2y = -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{e)} \quad -3x + 2y = 7 \\ \quad \quad 9x + 4y = -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad 4x + 3y = -14 \\ \quad \quad 3x + 7y = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{f)} \quad -2x - 3y = -14 \\ \quad \quad 5x + 2y = 13 \end{array}$$

17 • Resuelve cada sistema por el método que creas más adecuado:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 2x + y = -3 \\ \quad \quad 3x - y = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad 6x + 4y = -6 \\ \quad \quad 3x - 2y = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad x + 4y = 21 \\ \quad \quad 2x - 3y = -13 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{e)} \quad -x + 3y = 12 \\ \quad \quad 4x - 3y = -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad 4x + 5y = -3 \\ \quad \quad 4x - 3y = 21 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{f)} \quad 5x + 4y = -10 \\ \quad \quad 3x - 3y = 21 \end{array}$$

18 • Resuelve:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 2x = 3y + 2 \\ \quad \quad x = y + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c)} \quad 2x = -3 \\ \quad \quad 3x = 4y - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 2x = 4 \\ \quad \quad x - y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad y = x - 2 \\ \quad \quad 2x = 3y + 2 \end{array}$$

19 ••• Transforma las ecuaciones de cada sistema en su expresión general y después resuélvelo por el método que estimes más conveniente:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 4x = y + 1 \\ \quad \quad x + 10 = 4y - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c)} \quad 2 \cdot (x + 3) = 3y + 22 \\ \quad \quad 2x = -y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 3x - 7 = -5 - 7y \\ \quad \quad 4y + 3x = 2x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad 3 \cdot (2y + 4) = x - (y - 1) \\ \quad \quad y - (2x + 3) = -3x \end{array}$$

20 ••• Resuelve los siguientes sistemas

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \frac{x+1}{2} = y \\ \quad \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c)} \quad \frac{3x-1}{2} = \frac{y-8}{3} \\ \quad \quad 2 \cdot (x+y) = 3y-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \frac{x-1}{2} = y-1 \\ \quad \quad 2x = \frac{y}{2} + 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad \frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{5} = 2 \\ \quad \quad \frac{2 \cdot (x-3)}{4} = y-6 \end{array}$$

Problemas con sistemas de ecuaciones

21 • Unas zapatillas y unos guantes cuestan 100 €. Si las zapatillas cuestan 5 € más que los guantes, ¿alguna de las siguientes propuestas indica correctamente el precio de cada artículo?

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) Zapatillas: 95 € | b) Zapatillas: 50 € |
| Guantes: 5 € | Guantes: 45 € |

22 • Averigua qué dos números suman 25 y se diferencian en 5 unidades.

23 • Adrián y su hermano Marcos tienen 60 cromos entre los dos. Si Marcos tiene el doble que Adrián, ¿cuántos tiene cada uno?

24 • Calcula la edad de Marta y de su hijo Tomás, sabiendo que la diferencia entre ambos es de 25 años y Marta tiene 4 años más que el cuádruple de la edad de su hijo.

25 • En un estante hay 5 libros más que en otro y entre los dos suman 45 libros. ¿Cuántos libros hay en cada estante?

26 • En la clase de 2.º A de un instituto hay 3 alumnos menos que en la de 2.º B y entre las dos tienen 47 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada clase?

Ejercicios y problemas

- 27 •** Un número más el doble de otro suman 34, y el doble de la suma de ambos es 24. ¿De qué números se trata?
- 28 •** El doble de la suma de dos números es 26 y la suma del doble del mayor más el triple del menor es 31. ¿De qué números se trata?
- 29 ••** El coche de Belén tiene 3 años más que el de Luis. Si dentro de dos años será el doble de viejo que el de Luis. ¿Cuántos años tiene actualmente cada coche?
- 30 ••** Javier ha comprado 12 botellas de aceite: unas de aceite de oliva que cuestan 4 € la unidad y otras de aceite de girasol que cuestan 1,50 € cada una. Si ha pagado por todas 28 €, ¿cuántas ha comprado de cada clase?
- 31 ••** Tres paquetes de galletas y dos de bizcochos pesan 1 250 g, y dos paquetes de galletas y tres de bizcochos pesan 1 100 g. ¿Cuál es el peso de cada paquete?
- 32 ••** Una abuela le dice a su nieta: «Hace 10 años mi edad era 4 veces la tuya, pero si cumplo 20 años más, tú tendrás entonces la mitad de mi edad». ¿Cuántos años tienen actualmente cada una?
- 33 ••** Celia colecciona mariposas y arañas. Tiene nada menos que 50 ejemplares que suman un total de 320 patas. ¿Cuántas mariposas más que arañas tiene Celia?
- 34 •••** Divide 27 en dos partes, de forma que al dividir la mayor entre la menor el cociente sea 4 y el resto 2.
- 35 •••** Un número tiene dos cifras cuya suma es 9. Si el doble de ese número es igual a 4 más cuatro veces la cifra de las unidades ¿de qué número se trata?
- 36 •••** Luis y Rocío han cogido cada uno un puñado de caramelos en la Cabalgata de Reyes. Luis le dice a Rocío: «Si me dieras dos de tus caramelos, tendría el doble que tú». Y Rocío le responde: «Pues sería más justo que tú me dieras a mí dos, así tendríamos los dos la misma cantidad». ¿Cuántos caramelos tiene cada uno?
- 37 •••** Un coche parte a las tres de una ciudad, A, hacia otra, B, a una velocidad de 90 km/h. Dos horas después sale otro coche de B hacia A a una velocidad de 110 km/h. Si entre ambas ciudades hay 300 km de distancia, ¿a qué distancia de B se cruzan y a qué hora lo hacen?
- 38 •••** Una moto sale de una ciudad con destino a otra que está a 250 km, a una velocidad de 90 km/h, y 30 minutos después sale un coche en la misma dirección con una velocidad de 110 km/h. ¿Logrará el coche alcanzar a la moto antes de que llegue a su destino?
- 39 •••** Un rectángulo tiene un perímetro de 16 cm, pero si se duplica la base y se triplica la altura, el perímetro aumenta en 22 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?

Evaluación

Reconoces y buscas soluciones de ecuaciones con dos incógnitas y de sistemas de ecuaciones lineales

1 Indica de qué ecuaciones es solución el par de valores $x = 3, y = -1$:

- a)** $4x - 5y = 7$ **c)** $3 \cdot (2x + y) = 3x + 6$
b) $3x = 2 - 5y$ **d)** $2y = 4 - (x + 3)$

2 Escribe tres soluciones de la ecuación $2x = y + 3$.

3 ¿Es $x = 2$ e $y = 4$ una solución de alguno de estos sistemas?

- a)** $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2 \cdot (x + 3y) = 28 \\ 3y = 6x \end{cases}$

Resuelves sistemas de ecuaciones

4 Resuelve por sustitución o igualación:

- a)** $\begin{cases} 5x - y = 17 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$

5 Resuelve por reducción:

- a)** $\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ 4x + 2y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 3y = 12 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 6x - 4y = 4 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$

Resuelves problemas usando sistemas de ecuaciones

6 En un montón de monedas hay 4 monedas más que en otro y entre los dos suman 50 monedas. ¿Cuántas monedas hay en cada montón?

7 En un establo conviven vacas y gallinas. En total hay 28 animales que, entre todos ellos, suman 80 patas. ¿Cuántas vacas y cuántas gallinas hay en el establo?

8 ¿Qué cantidad de café de una clase a 1,5 €/kg y de otra clase a 1,2 €/kg hay que mezclar para obtener 500 kg de una mezcla de la que, vendida a 2,88 €/kg, se obtenga un beneficio de 1,50 €/kg?