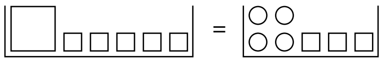
PÁGINA 112

Yolanda, Óscar y Manuel están trasteando en el laboratorio del instituto con unas balanzas y algunos objetos. Su objetivo es conseguir equilibrar sus balanzas, pero tienen el problema de que no saben exactamente cuánto pesan cada uno de los objetos que han elegido, por lo que tienen que hacer pruebas.

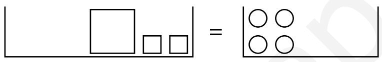
Tras muchos intentos, Óscar y Manuel han conseguido equilibrar las suyas con los objetos que ves en el dibujo de arriba.

1 **¿Hacia qué lado crees que se desequilibrará la balanza de Yolanda? ¿Por qué?**

Juntamos los platillos de Óscar y Manuel:

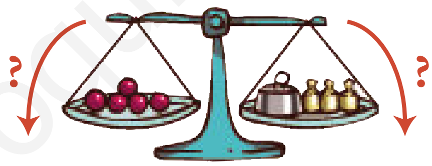


Quitamos tres pesitas de cada uno de ellos:



Así, vemos que la balanza de Yolanda se inclinará hacia el plato que tiene la pesa grande y las tres pequeñas (tiene una pesa pequeña más que el plato de la izquierda anterior).

2 **Antes de que Óscar equilibrara su balanza, había probado con la siguiente combinación de objetos:**



¿Se desequilibró? ¿Hacia dónde?

Se inclinará hacia la izquierda, pues una bola pesa más que una pesa pequeña, según se deduce de la balanza inicial de Óscar.

PÁGINA 113

1 **Obtén dos soluciones de cada ecuación y representa las rectas correspondientes:**

a) $2x + y = 3$ **b)** $x + y = 4$

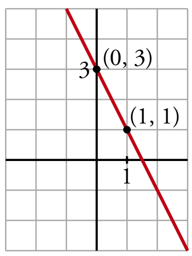
a) $2x + y = 3$

Dos soluciones son (0, 3) y (1, 1).

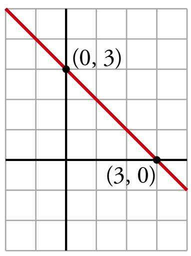
b) $x + y = 3$

(0, 3) y (3, 0) son soluciones de la ecuación.

a)



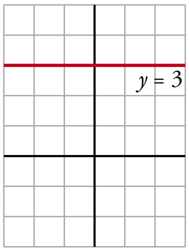
b)

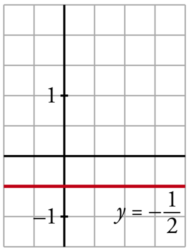


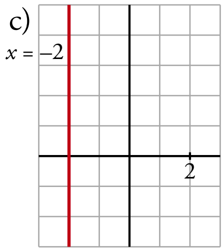
7 Soluciones a las actividades de cada epígrafe

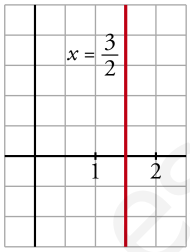
2 **Representa gráficamente:**

a) $y = 3$ **b)** $y = -\frac{1}{2}$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = \frac{3}{2}$

a)


b)


c)


d)


PÁGINA 114

1 **Representa las rectas en cada caso y di si el sistema tiene una solución, si es indeterminado (tiene infinitas) o si es incompatible (no tiene solución). En el caso de que tenga una solución, di cuál es:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

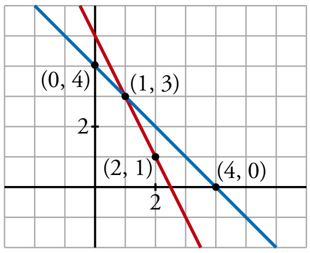
a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$

$2x + y = 5$

x	y
2	1
1	3

$x + y = 4$

x	y
0	4
4	0

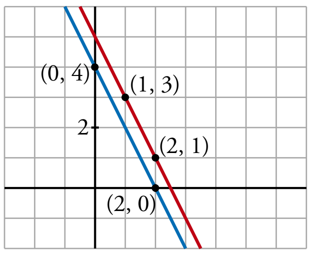


El sistema tiene una solución $x = 1$, $y = 3$, punto de corte de ambas rectas.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

$4x + 2y = 8$

x	y
0	4
2	0

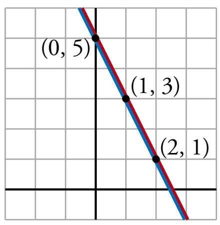


Las dos rectas son paralelas $\rightarrow$ El sistema no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ Antes de representarlas observamos que la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2.

$4x + 2y = 10$

x	y
0	5
2	1



Se trata de la misma recta $\rightarrow$ Infinitas soluciones.

d) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\}$

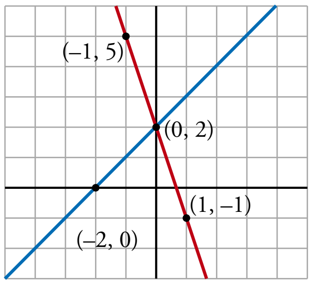
$-x + y = 2$

x	y
0	2
–2	0

$3x + y = 2$

x	y
1	–1
–1	5

Las dos rectas se cortan en el punto (0, 2) $\rightarrow$
El sistema tiene una solución $x = 0$, $y = 2$.



PÁGINA 115

1 Resuelve gráficamente el sistema del ejercicio resuelto anterior:

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{array}\right.$$

Comprueba que las dos rectas se cortan en el punto (7, 4), solución que hemos obtenido.

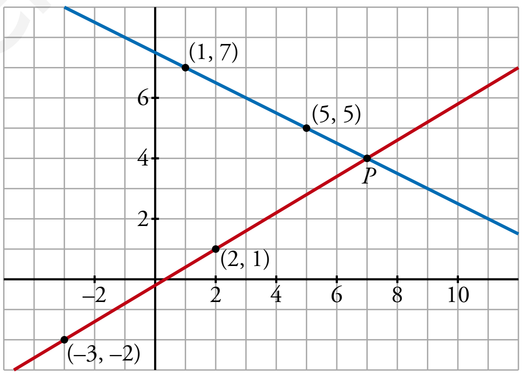
$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{array}\right\}$

Buscamos soluciones que verifiquen la ecuación $3x - 5y = 1$:

x	y
2	1
–3	–2

Análogamente para la ecuación $x + 2y = 15$:

x	y
5	5
1	7



Ambas rectas se cortan en el punto $P(7, 4)$, solución que se había obtenido anteriormente.

2 Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{4x + y = 9} \\ \mathbf{3x + 2y = 8} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{-x + 4y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = -1} \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - 3y = 9} \\ \mathbf{3x - y = 10} \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y + 2 = 5} \\ \mathbf{3x + 4y = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + \ \ y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$y = 9 - 4x$

$3x + 2(9 - 4x) = 8 \ \rightarrow\ 3x + 18 - 8x = 8 \ \rightarrow\ -5x = -10 \ \rightarrow\ x = 2$

$y = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

Solución: $x = 2$, $y = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 4y = \ \ 1 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right\}$

Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$x = 4y - 1$

$4y - 1 + 2y = -1 \ \rightarrow\ 6y = 0 \ \rightarrow\ y = 0$

$x = 4 \cdot 0 - 1 = -1$

Solución: $x = -1$, $y = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = \ \ 9 \\ 3x - \ \ y = 10 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$y = 3x - 10$

$2x - 3(3x - 10) = 9 \ \rightarrow\ 2x - 9x + 30 = 9 \ \rightarrow\ -7x = -21 \ \rightarrow\ x = 3$

$y = 3 \cdot 3 - 10 = 9 - 10 = -1$

Solución: $x = 3$, $y = -1$

d) $\left.\begin{array}{r} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y \quad = 0 \end{array}\right\}$

Despejando y de la primera ecuación obtenemos $y = 5 - 2 = 3$.

Sustituimos en la segunda ecuación para obtener el valor de x:

$3x + 4 \cdot 3 = 0 \ \rightarrow\ 3x = -12 \ \rightarrow\ x = -4$

Solución: $x = -4$, $y = 3$

PÁGINA 116

1 **Resuelve, por el método de igualación, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + 5y = 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x+1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 5y = \ \ 4 \\ x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ Despejamos x de ambas ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} x = \ \ 4 - 5y \\ x = -4 + 3y \end{array}\right\}$ $4 - 5y = -4 + 3y \ \rightarrow \ 8 = 8y \ \rightarrow \ y = 1$

Luego $x = 4 - 5 \cdot 1 = 4 - 5 = -1$

Solución: $x = -1, \ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x+1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y la igualamos con la primera:

$y = 4 - 2x$

$\dfrac{3x+1}{2} = 4 - 2x \ \rightarrow \ 3x + 1 = 8 - 4x \ \rightarrow \ 7x = 7 \ \rightarrow \ x = 1$

$y = 4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$

Solución: $x = 1, \ y = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 5x + y = \ \ 3 \\ 2x - y = -3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de ambas ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} y = 3 - 5x \\ y = 2x + 3 \end{array}\right\} \rightarrow$ $3 - 5x = 2x + 3 \ \rightarrow \ -7x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

$y = 3 - 5 \cdot 0 = 3$

Solución: $x = 0, \ y = 3$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 4x = 3 - 3y \ \rightarrow \ x = \dfrac{3-3y}{4} \\ 2x = 3 - 6y \ \rightarrow \ x = \dfrac{3-6y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \frac{3-3y}{4} = \frac{3-6y}{2} \ \rightarrow \ 3 - 3y = 6 - 12y \ \rightarrow \ 9y = 3 \ \rightarrow \ y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{3 - 3 \cdot \frac{1}{3}}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{2}, \ y = \dfrac{1}{3}$

PÁGINA 117

1 **Resuelve, por el método de reducción, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

$$\begin{array}{l} x + y = 4 \\ \underline{x - y = 2} \\ 2x \quad\;\; = 6 \end{array} \;\to\; x = 3$$

$3 + y = 4 \;\to\; y = 1$

Solución: $x = 3,\; y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

$9x = 18 \;\to\; x = 2$

$4 \cdot 2 + 3y = 5 \;\to\; 8 + 3y = 5 \;\to\; 3y = -3 \;\to\; y = -1$

Solución: $x = 2,\; y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{l} 4x - 6y = 22 \\ \underline{5x + 6y = 14} \\ 9x \quad\;\;\; = 36 \end{array} \;\to\; x = 4$$

$2 \cdot 4 - 3y = 11 \;\to\; 8 - 3y = 11 \;\to\; -3 = 3y \;\to\; y = -1$

Solución: $x = 4,\; y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la primera ecuación por 5, la segunda por 2, y sumamos:

$$\begin{array}{l} 35x + 10y = 125 \\ \underline{\;\;6x - 10y = -2} \\ 41x \qquad\;\; = 123 \end{array} \;\to\; x = \frac{123}{41} = 3$$

$7 \cdot 3 + 2y = 25 \;\to\; 2y = 4 \;\to\; y = 2$

Solución: $x = 3,\; y = 2$

PÁGINA 118

1 **Resuelve, simplificando previamente:**

a) $\begin{cases} 2(x-y+3)-3x=0 \\ \dfrac{2(x+1)}{3}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{3y}{2}=2(x+y)+3 \\ \dfrac{x-y}{3}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2(x-y+3)-3x=0 \\ \dfrac{2(x+1)}{3}-\dfrac{y}{2}=1 \end{array}\right\}$

Simplificamos cada una de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2y+6-3x=0 \\ 4(x+1)-3y=6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -x-2y=-6 \\ 4x+4-3y=6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+2y=6 \\ 4x-3y=2 \end{array}\right\}$$

Despejamos x de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$x=6-2y$

$4(6-2y)-3y=2 \to 24-8y-3y=2 \to -11y=-22 \to y=2$

$x=6-2\cdot 2=6-4=2$

Solución: $x=2,\ y=2$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{3y}{2}=2(x+y)+3 \\ \dfrac{x-y}{3}=\dfrac{5}{3} \end{array}\right\}$

Simplificamos previamente cada una de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-9y=12(x+y)+18 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4x-9y=12x+12y+18 \\ x-y=5 \end{array}\right\} \to$$

$\to \left.\begin{array}{r} -8x-21y=18 \\ x-y=\ \ 5 \end{array}\right\}$ Multiplicamos la segunda ecuación por 8 y sumamos:

$$\begin{array}{r} -8x-21y=18 \\ 8x-\ \ 8y=40 \\ \hline -29y=58 \end{array} \to y=\frac{-58}{29} \to y=-2$$

$x-(-2)=5 \to x+2=5 \to x=3$

Solución: $x=3,\ y=-2$

PÁGINA 119

1 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$

$x = 15 + y$

$(15 + y)y = 100 \;\rightarrow\; 15y + y^2 = 100 \;\rightarrow\; y^2 + 15y - 100 = 0$

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -20 \end{cases}$$

$y_1 = 5 \;\rightarrow\; x_1 = 20 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_1 = 20,\; y_1 = 5$

$y_2 = -20 \;\rightarrow\; x_2 = -5 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_2 = -5,\; y_2 = -20$

b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$x = 1 - y$

$(1 - y)^2 + (1 - y)y + y^2 = 21 \;\rightarrow\; 1 + y^2 - 2y + y - y^2 + y^2 = 21$

$$y^2 - y - 20 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Si $y_1 = 5 \;\rightarrow\; x_1 = -4 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_1 = -4,\; y_1 = 5$

Si $y_2 = -4 \;\rightarrow\; x_2 = 5 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_2 = 5,\; y_2 = -4$

c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$y = 2x - 2$

$x^2 + x(2x - 2) = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Si $x = 0 \rightarrow y = -2$

$x = \frac{2}{3} \rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$

Soluciones $\begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = -2 \\ x_2 = \frac{2}{3},\ y_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

Igualamos ambas ecuaciones y resolvemos la ecuación radical que nos queda:

$\sqrt{x+1} = 5 - x \rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (5-x)^2 \rightarrow x + 1 = 25 - 10x + x^2$

$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} =$

$= \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$

Si $x = 8 \rightarrow y = 5 - 8 = -3$

Si $x = 3 \rightarrow y = 5 - 3 = 2$

Comprobación

$x = 8,\ y = -3$ no verifica la primera ecuación $\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$, luego no es solución.

$x = 3,\ y = 2$ cumple ambas ecuaciones $\begin{cases} \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \\ 5 - 3 = 2 \end{cases}$

Solución: $x = 3,\ y = 2$

PÁGINA 120

1 **Tres kilos de peras y dos de naranjas cuestan 6,70 €; un kilo de peras y cinco de naranjas cuestan 7 €. ¿A cómo está el kilo de peras? ¿Y el de naranjas?**

$x \rightarrow$ precio de un kilo de peras
$y \rightarrow$ precio de un kilo de naranjas

$\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}70 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5y \\ 3(7 - 5y) + 2y = 6{,}70 \end{array}\right\} \rightarrow 21 - 15y + 2y = 6{,}70 \rightarrow -13y = -14{,}30 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{-14{,}30}{-13} = 1{,}1$$

$x = 7 - 5 \cdot 1{,}1 = 7 - 5{,}5 = 1{,}5$

Solución: Un kilo de peras cuesta 1,5 €, y uno de naranjas, 1,1 €.

2 **La suma de las dos cifras de un número es 5. Si invertimos el orden de las cifras, el número es 9 unidades menor que el inicial. ¿De qué número se trata?**

- El número buscado tiene dos cifras: xy

  $y \rightarrow$ unidades $\quad x \rightarrow$ decenas

  El número es $y + 10x$

  La suma de sus cifras es 5 $\rightarrow x + y = 5$

- El número invertido, yx, es $x + 10y$.

  Este número es 9 unidades menor que el inicial: $x + 10y = (y + 10x) - 9$

- Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 10y = y + 10x - 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 9x - 9y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

  Sumando ambas ecuaciones obtenemos el valor de x:

  $2x = 6 \rightarrow x = 3$

  $y = 5 - x \rightarrow y = 5 - 3 \rightarrow y = 2$

  Solución: El número es el 32.

PÁGINA 121

3 **Jaime tiene 20 000 €. Coloca una parte al 7%, y el resto, al 3%. Gana 760 € en un año. ¿Cuánto puso en cada sitio?**

Llamamos x al dinero que puso al 7% e y, al que puso al 3%.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20\,000 \\ 0{,}07x + 0{,}03y = 760 \end{array}\right\} \rightarrow y = 20\,000 - x$$

$0{,}07x + 0{,}03(20\,000 - x) = 760 \rightarrow 0{,}07x + 600 - 0{,}03x = 760 \rightarrow$

$$\rightarrow 0{,}04x = 160 \rightarrow x = \frac{160}{0{,}04} \rightarrow x = 4\,000$$

$$y = 20\,000 - 4\,000 = 16\,000$$

Jaime puso 4 000 € al 7% y 16 000 € al 3%

4 **Sofía tiene un capital de 200 000 €. Deposita una parte en un banco, al 4% anual. El resto lo invierte en acciones, con las que pierde el 11%. Al final del año ha ganado 4 250 €. ¿Cuánto destinó a cada inversión?**

Llamamos x al capital que deposita en el banco e y al que invierte en acciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 200\,000 \\ 0{,}04x - 0{,}11y = 4\,250 \end{array}\right\} \rightarrow \; y = 200\,000 - x$$

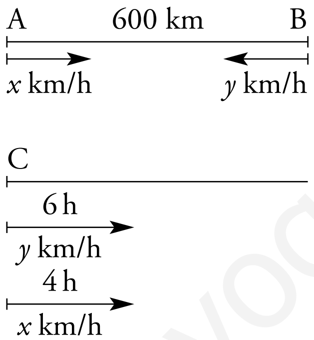
$$0{,}04x + 0{,}11(200\,000 - x) = 4\,250 \rightarrow 0{,}04x - 22\,000 + 0{,}11x = 4\,250 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}15x = 26\,250 \rightarrow x = \frac{26\,250}{0{,}15} \rightarrow x = 175\,000$$

$$y = 200\,000 - 175\,000 = 25\,000$$

Sofía invirtió 175 000 € en el banco y 25 000 € en acciones.

5 **Las estaciones A y B están separadas 600 km. Un Talgo sale de A hacia B y, simultáneamente, un tren de mercancías sale de B hacia A. Se cruzan 3 h después. Otro día sale de la estación C el mercancías y 2 h después sale el Talgo en la misma dirección. Lo alcanza 4 h después. Suponiendo que mantienen la velocidad y que no paran, averigua qué velocidad lleva cada uno de ellos.**



$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \; 3(x + y) = 600 \\ \\ \rightarrow \; 6y = 4x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \; x + y = 200 \rightarrow x = 200 - y \\ \\ \rightarrow \; 4x - 6y = 0 \end{array}$$

$$4(200 - y) - 6y = 0 \rightarrow 800 - 4y - 6y = 0 \rightarrow 10y = 800 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 80$$

$$x = 200 - 80 = 120$$

El Talgo viaja a 120 km/h, y el mercancías, a 80 km/h.